الدوال النظامية

يقال لدالة المتغير العقدي $f(z)$ بأنها نظامية عند z_0 اذا كان تفاضلها موجود عند z_0 وعند كل نقطة من z تقع في جوار العدد z_0. او يقال ان $f(z)$ نظامية في D اذا كانت نظامية عند كل نقاط D.

امثلة:

$f(z) = z^2$ نظامية في المستوي العقدي كله.

$f(z) = \bar{z}$ ليست نظامية، لأنها غير قابلة للاشتقاق.

ماذا بالنسبة الى $f(z) = |z|^2$؟؟؟؟.

اذا كانت $f(z)$ دالة نظامية في المنطقة D، فينبغي ان يوجد حول كل نقطة في D جوار تكون فيه الدالة معرفة. وهذا يعني ان تكون z نقطة داخلية في المنطقة. وعندئذ تكون الدالة النظامية معرفة في هذه المنطقة.

يقال ان الدالة النظامية كلية اذا كانت نظامية عند كل نقطة بالمستوي العقدي كله.

الدوال التوافقية Harmonic functions

افترض أن الدالة المعقدة $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ تحليلية في مجال D. وأن u و v لديهم مشتقات جزئية مستمرة من الدرجة الثانية في D. بما أن $f(z)$ تحليلية، فإن معادلات كوشي – ريمان تتحقق في كل نقطة z. فاذا فاضلنا معادلتي كوشي– ريمان، المعادلة الاولى بالنسبة الى x و الثانية بالنسبة الى y، نحصل

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

بجمع المعادلتين نحصل

$$\nabla^2 u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (L1)$$

اذا تحققت المعادلة اعلاه، فهذا يدل أن $u(x,y)$ دالة توافقية. اما اذا فاضلنا معادلتي كوشي– ريمان، المعادلة الاولى بالنسبة الى y والثانية بالنسبة الى x، نحصل

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

بطرح المعادلتين، نحصل

$$\nabla^2 v(x,y) = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \qquad (L2)$$

اذا تحققت المعادلة اعلاه، فهذا يدل أن $v(x,y)$ دالة توافقية. تسمى المعادلات $(L1)$ و $(L2)$ معادلات لابلاس ،ويسمى ∇^2 **بثابت لا بلاس.**

الدوال التوافقية المترافقة

لقد أوضحنا للتو أنه إذا كانت دالة $f(z) = u\,(x,y) + iv\,(x,y)$ تحليلية في المجالD، فإن أجزائها الحقيقية والخيالية u و v توافقية بالضرورة في D. الآن لنفترض $u\,(x,y)$ هي دالة حقيقية توافقية في D. إذا كان من الممكن ايجاد دالة توافقية حقيقية أخرى $v\,(x,y)$ بحيث u و v يحققان معادلات كوشي- ريمان في المجال D، تسمى الدالة $v\,(x,y)$ مترافقة توافقية لـ $u\,(x,y)$. من خلال الجمع بين الدالات مثل $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ نحصل على دالة تحليلية فيD.

مثال: لديك الدالة $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 5y$،حقق المطالب التالية:

(١) اثبت ان الدالة هي دالة توافقية في كامل المستوي المعقد.

(٢) جد الدالة التوافقية المترافقة $v\,(x,y)$ للدالة $u(x,y)$.

الحل:

اولاً: الان نحاول ان نثبت ان $u(x,y)$ تحقق معادلة لا بلاس. المشتقة الجزئية الاولى للدالة u بالنسبة الى x.

$$\frac{\partial u}{\partial \mathrm{x}} = 3x^2 - 3y^2 \qquad (1CR)$$

المشتقة الجزئية الثانية للدالة u بالنسبة الى x.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x$$

المشتقة الجزئية الاولى للدالة u بالنسبة الى y.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy - 5 \qquad (2CR)$$

المشتقة الجزئية الثانية للدالة u بالنسبة الى y.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x$$

وبالتالي

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0$$

نلاحظ بان الدالة u حققت معادلة لا بلاس وبالتالي فهي دالة توافقية.

ثانياً: نحاول ايجاد الدالة التوافقية المترافقة $v(x,y)$ للدالة $u(x,y)$. ان من خصائص الدالة التوافقية المترافقة هي ان الدالة تحقق معادلتي كوشي– ريمان.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

باستخدام $(1CR)$ و $(2CR)$ فأن

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 \qquad (3CR)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + 5 \qquad (4CR)$$

التكامل الجزئي للمعادلة $(3CR)$ بالنسبة الى y

$$v(x,y) = 3x^2y - y^3 + h(x) \qquad (5CR)$$

لاستخراج قيمة $h(x)$ ، نأخذ المشتقة الجزئية للمعادلة $(5CR)$ بالنسبة الى x.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + h'(x) \qquad (6CR)$$

نعوض المعادلة $(6CR)$ في المعادلة $(4CR)$، ومن ذلك نحصل:

$$h'(x) = 5 \qquad (7CR)$$

نكامل المعادلة $(7CR)$ بالنسبة الى x نحصل

$$h(x) = 5x + C$$

حيث C ثابت حقيقي. لذلك فأن الدالة التوافقية المرافقة للدالة u في المعادلة $(5CR)$ تأخذ الصيغة التالية:

$$v(x, y) = 3x^2y - y^3 + 5x + C \qquad (8CR)$$

الان نحاول ان نثبت بأن v دالة توافقية من خلال تحقق معادلة لا بلاس $(L2)$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -6y$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 6y$$

وبالتالي

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

اذن الدالة v تحقق معادلة لا بلاس وبالتالي فهي دالة توافقية.

مثال: اذا كان لدينا الدالة $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$، حيث ان $u(x, y) = ln(x^2 + y^2)$ دالة حقيقية. حقق المطالب التالية:

١- اثبت ان الدالة $u(x, y)$ دالة توافقية.

٢- جد الدالة التوافقية المترافقة $v(x, y)$.

٣- عند $y = 0$ و $z = x$ ، أثبت ان الدالة التحليلية $f(z)$ بدلالة z تعطى بالشكل التالي:

$$f(z) = ln(z^2) + iC$$

حيث ان C هو ثابت التكامل.

الحل:

اولاً: الان نحاول ان نثبت ان $u(x, y)$ تحقق معادلة لا بلاس $(L1)$. المشتقة الجزئية الاولى للدالة u بالنسبة الى x.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2} \qquad (1CR)$$

المشتقة الجزئية الثانية للدالة u بالنسبة الى x.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

المشتقة الجزئية الاولى للدالة u بالنسبة الى y.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2} \qquad (2CR)$$

المشتقة الجزئية الثانية للدالة u بالنسبة الى y.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

نلاحظ بان الدالة u حققت معادلة لا بلاس وبالتالي فأنها دالة توافقية.

نحاول ايجاد الدالة التوافقية المترافقة $v(x,y)$ للدالة $u(x,y)$ من خلال تحقيق معادلة لا بلاس $(L2)$. ان من خصائص الدالة التوافقية المترافقة $v(x,y)$هي انها تحقق معادلتي كوشي– ريمان.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

باستخدام $(1CR)$ و $(2CR)$ فأن

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2x}{x^2 + y^2} \qquad (3CR)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2y}{x^2 + y^2} \qquad (4CR)$$

التكامل الجزئي للمعادلة $(3CR)$ بالنسبة الىy

$$v(x,y) = 2\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + h(x) \qquad (5CR)$$

لاستخراج قيمة $h(x)$، نأخذ المشتقة الجزئية للمعادلة $(5CR)$ بالنسبة الىx.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2y}{x^2+y^2} + \acute{h}(x) \qquad (6CR)$$

نعوض المعادلة $(6CR)$ في المعادلة $(4CR)$، ومن ذلك نحصل:

$$\acute{h}(x) = 0 \qquad (7CR)$$

نكامل المعادلة $(7CR)$ نحصل

$$h(x) = C$$

حيث C ثابت حقيقي. لذلك فأن الدالة التوافقية المرافقة للدالة u في المعادلة $(5CR)$ تأخذ الصيغة التالية:

$$v(x,y) = 2\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + C \qquad (8CR)$$

الان نحاول ان نثبت بأن الدالة v توافقية من خلال تحقق معادلة لا بلاس

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

وبالتالي فأن v تحقق معادلة لا بلاس فهي دالة توافقية.

نحاول ان نجد $f(z) = ln(z^2) + iC$، عند $y = 0$ و $z = x$

$$f(z) = \ln(z^2) + iC$$

تمارين

لديك الدوال التالية

١. $u(x,y) = x^2 - y^2 - y$
٢. $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$
٣. $u(x,y) = sinx\ coshy$
٤. $u(x,y) = 2x - 2xy$

٥. $u(x,y) = e^{-x}(x\,siny - ycosy)$

حقق المطالب التالية:

(أ) اثبت ان الدالة $u(x,y)$ دالة توافقية.

(ب) جد الدالة $v(x,y)$ التوافقية المترافقة.

(ج) جد الدالة التحليلية $f(z)$

النقاط المنفردة

هي النقاط التي ليس للدالة فيها مشتقة، فاذا لم تكن لدالة نظامية او تحليلية مشتقة في z_0 ولكن توجد لها مشتقة في نقاط اخرى، تسمى بذلك z_0 نقطة منفردة.

مثال: لدينا الدالة

$$f(z) = \frac{1}{z+1}$$

نفاضل الدالة

$$\acute{f}(z) = -\frac{1}{(z+1)^2}$$

الدالة نظامية او تحليلية ماعدا $z = -1$ تصبح الدالة غير معرفة، حيث تمثل نقطة منفردة وحيدة.

الاقطاب

اذا كانت لدينا الدالة

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^n}$$

حيث تمثل $\psi(z)$ دالة تحليلية عند جميع النقاط. لمنطقة تضم $z = z_0$. اذا كان n عدد صحيح موجب، تكون نقطة منفردة للدالة $f(z)$ عند $z = z_0$، تسمى هذه النقطة "قطب" من الرتبة n. فاذا كانت $n = 1$ فأن القطب عادة ما يسمى بالقطب البسيط، اما اذا كانت $n = 2$ فأنه يسمى بالقطب المزدوج وهكذا.

مثال: لديك الدالة

$$f(z) = \frac{z}{(z-3)^2(z+1)}$$

للدالة نقطتان منفردتان هما

١- قطب بسيط $z = -1$.
٢- قطب مزدوج $z = 3$.

او بطريقة اخرى ايضا لعدد صحيح n بحيث

$$\lim_{z \to z_0} \left((z - z_0)^n f(z) \right) = A \neq 0$$

فأن $z = z_0$ يسمى قطباً من الرتبة n. فاذا كانت $n = 1$ فأن القطب عادة ما يسمى بالقطب البسيط، اما اذا كانت $n = 2$ فأنه يسمى بالقطب المزدوج و هكذا.

مثال: لديك الدالة

$$f(z) = \frac{z}{(z-3)^2(z+1)}$$

الحل:

عند النقطة المفردة $z = 3$

$$\lim_{z \to 3} \left((z-3)^2 \frac{z}{(z-3)^2(z+1)} \right) = \frac{3}{4} \neq 0$$

اذن النقطة $z = 3$ تمثل قطباً مزدوجاً للدالة من الرتبة $n = 2$.

عند النقطة المفردة $z = -1$

$$\lim_{z \to -1} \left((z+1) \frac{z}{(z-3)^2(z+1)} \right) = \frac{-1}{16} \neq 0$$

اذن النقطة $z = -1$ تمثل قطباً بسيطاً للدالة من الرتبة $n = 1$.

نقاط التفرعات

للدوال المتعددة القيم نقاط فرعية منفردة

مثال: $f(z) = (z-3)^{1/2}$ لها نقطة تفرع $z = 3$.

مثال: $f(z) = ln(z^2 + z - 2)$ لها نقطتا تفرع $z = 1$ و $z = -2$.

النقاط المنفردة القابلة للرفع

النقطة المنفردة z_0 للدالة $f(z)$ تسمى نقطة منفردة قابلة للرفع اذا كانت غاية الدالة

$$\lim_{z \to z_0} f(z)$$

موجودة.

مثال: النقطة $z = 0$ هي نقطة منفردة قابلة للرفع للدالة $f(z) = \frac{\sin z}{z}$، وذلك لان

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

موجودة.

النقاط المنفردة الاساسية

النقطة المنفردة التي ليست قطباً ولا نقطة تفرع او قابلة للرفع تسمى نقطة منفردة اساسية.

مثال: الدالة

$$f(z) = e^{\frac{1}{z-2}}$$

لها نقطة منفردة اساسية هي $z = 2$.

ملاحظة:

اذا كانت الدالة احادية القيمة ولها نقاط منفردة تدعى بالأقطاب او نقاط منفردة قد تكون اساسية واحياناً غير اساسية، فأن ذلك يتم تحديده من خلال:

١- **نقاط منفردة غير اساسية** اذا كان

$$\operatorname*{Lim}_{z \to z_0}\left((z - z_0)^n f(z)\right) = A \neq 0$$

٢- **نقاط منفردة اساسية** اذا كان

$$\lim_{z \to z_0}\left((z - z_0)^n f(z)\right) = A = 0$$

تمرين: جد وحدد نوع النقاط المنفردة للدالة:

$$f(z) = \frac{z}{(z + 2i)^2 (z - 2i)^2}$$