معادلات كوشي – ريمان Cauchy -Riemann equations

مما سبق، رأينا أن الدالة $f(z)$ للمتغير المعقد z تكون تحليلية عند النقطة z عندما تكون الدالة $f(z)$ قابلة للتفاضل عند z وفي كل نقطة في جوار z. هذا المتطلب أكثر من مجرد التفاضل في نقطة ما لأن الدالة المعقدة يمكن أن تكون قابلة للتفاضل عند النقطة z ولكن لا يمكن أن تكون قابلة للتفاضل في أي مكان آخر. تكون الدالة $f(z)$ تحليلية في مجال D إذا كانت الدالة $f(z)$ قابلة للتفاضل في جميع النقاط D. لقد تم تطوير اختباراً اخراً لتقصي تحليلية الدالة المعقدة $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ يقوم على التفاضل الجزئي لأجزائها الحقيقية والخيالية u و v.

نرى أنه إذا كانت الدالة $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ قابلة للتفاضل عند النقطة z، فيجب أن تحقق الدالتان u و v زوج من المعادلات التفاضلات الجزئية من الدرجة الأولى.

لنفترض ان $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ قابلة للتفاضل عند $z = x + iy$. عندها في النقطة z تكون التفاضلات من الرتبة الاولى لكل من u و v موجودة وتحقق معادلتي كوشي – ريمان التالية:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

من معادلتي كوشي ريمان بالصيغة الكارتيزية يمكن كتابة تفاضل $f(z)$ كالتالي:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

مثال: حقق معادلتي كوشي ريمان للدالة $f(z) = z^2 + z$ ، حيث ان الدالة $f(z)$ تحليلية لكل قيم z.

الحل:

ان $f(z)$ بدلالة x و y تكتب بالشكل التالي:

$$f(z) = x^2 - y^2 + x + i(2xy + y)$$

وبالتالي فأن

$$u(x,y) = x^2 - y^2 + x$$

$$v(x,y) = 2xy + y$$

التفاضلات الجزئية من الرتبة الاولى لكل من u و v

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

اما

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

لذلك بالنسبة لأي نقطة (x, y) في المستوى المعقد، نرى أن معادلتي كوشي ريمان قد تحققت. من معادلتي كوشي ريمان يمكن كتابة تفاضل $f(z)$ كالتالي:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$f'(z) = 2x + 1 + i2y = 2x + 1 + i2y$$

$$f'(z) = 2z + 1$$

معيار عدم التحليلية *Criterion for Non-analyticity*

إذا لم تتحقق معادلتا كوشي- ريمان في كل نقطة من z في المجال D، فإن الدالة $f(z) = u + iv$ تكون غير تحليلية في D.

مثال: اثبت ان الدالة المعقدة $f(z) = 2x^2 + y + i(y^2 - x)$ دالة غير تحليلية في كل نقطة من z.

الحل:

$$u(x, y) = 2x^2 + y$$

$$v(x, y) = y^2 - x$$

التفاضلات الجزئية من الرتبة الاولى لكل من u و v

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$$

اما

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

نرى أن معادلات كوشي ريمان تتحقق فقط اذا كانت $y = 2x$، لذلك نستنتج بأن الدالة غير تحليلية في اي نقطة من z.

كافية التحليل A Sufficient Condition for Analyticity

بحد ذاتها ، لا تضمن لنا معادلتا كوشي ريمان فيما اذا كانت الدالة $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ دالة تحليلية عند النقطة $z = x + iy$. من الممكن أن تتحقق معادلات كوشي- ريمان عند z ومع ذلك قد لا تكون $f(z)$ قابلة للتفاضل عند z. في كلتا الحالتين، فإن $f(z)$ ليست تحليلية عند z، عندما نضيف شرط الاستمرارية إلى u و v وإلى المشتقات الجزئية الأربعة $\frac{\partial v}{\partial y}$ و $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ و$\frac{\partial v}{\partial x}$، يمكن إظهار أن معادلات كوشي- ريمان ليست ضرورية فقط ولكنها أيضًا كافية لضمان تحليل $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ عند z.

معيار التحليلية

افترض أن الدوال$u(x,y)$ و $v(x,y)$ حقيقية ومستمرة ولديهما مشتقات جزئية من الدرجة الأولى مستمرة في المجال D. إذا حققت u و v معادلات كوشي- ريمان في جميع نقاط D، فإن الدالة المعقدة

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ تحليلية في D.

مثال: بالنسبة للدالة $f(z)=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$، الدوال $u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$ و $v(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}$

دوال مستمرة ما عدا النقطة $x^2+y^2=0$ اي عند $z=0$. اكثر من ذلك، التفاضلات الجزئية من الرتبة الاولى تكون مستمرة ما عدا النقطة $x^2+y^2=0$ اي عند $z=0$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

وهكذا نستنتج أن $f(z)$ تحليلية في أي مجال D لا يحتوي على النقطة $z=0$.

مثال: باستخدام معادلتي كوشي – ريمان، جد تفاضل الدالة $f(z)=lnz$.

الحل:

$$f(z)=lnz=ln(x+iy)=ln|x+iy|+iarg(x+iy)$$

$$w=u+iv=f(z)=\frac{1}{2}ln(x^2+y^2)+i\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

وبالتالي

$$u=\frac{1}{2}ln(x^2+y^2)$$

$$v=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

باستخدام تفاضلات كوشي – ريمان وباستخدام قواعد التفاضل نحصل:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{x}{(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-\left(\frac{y}{x^2}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\frac{y}{(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

وبالتالي تحققت معادلتا كوشي – ريمان. من معادلتي كوشي ريمان يمكن كتابة تفاضل $f(z)$ كالتالي:

$$\acute{f}(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\acute{f}(z) = \frac{x}{(x^2+y^2)} - i\frac{y}{(x^2+y^2)} = \frac{x}{(x^2+y^2)} - i\frac{y}{(x^2+y^2)}$$

$$\acute{f}(z) = \frac{x-iy}{(x^2+y^2)} = \frac{x-iy}{(x^2+y^2)} = \frac{1}{z}$$

الصيغة القطبية لمعادلات كوشي – ريمان

يمكن التعبير عن الدالة المعقدة بدلالة الإحداثيات القطبية. في الواقع ، الصيغة

$$f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$$

وهي غالبا ما تكون أكثر ملائمة للاستخدام. في الإحداثيات القطبية تصبح معادلات كوشي ريمان

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

من معادلتي كوشي ريمان بالصيغة القطبية يمكن كتابة تفاضل $f(z)$ كالتالي:

$$\acute{f}(z) = e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{e^{-i\theta}}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - i\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$$

مثال: اذا كان لدينا

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

برهن انه يمكن كتابة معادلات كوشي – ريمان بدلالة الاحداثيات القطبية بالشكل التالي:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

الحل:

من الفصل الاول عرفنا ان الجزء الحقيقي والخيالي للعدد المعقد يكتب بدلالة الاحداثيات القطبية بالشكل التالي:

$$x = rcos\theta$$

$$y = rsin\theta$$

وان كل من r و θ يمكن ايجادها من خلال الصيغ التالية:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

التفاضل الجزئي $\frac{\partial u}{\partial x}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{1}{cos\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{1}{sin\theta} \qquad (1)$$

التفاضل الجزئي $\frac{\partial u}{\partial y}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{1}{sin\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{1}{cos\theta} \qquad (2)$$

التفاضل الجزئي $\frac{\partial v}{\partial x}$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial r}\frac{1}{cos\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{1}{sin\theta} \qquad (3)$$

التفاضل الجزئي $\frac{\partial v}{\partial y}$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial r}\frac{1}{sin\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{1}{cos\theta} \qquad (4)$$

من معادلة كوشي ريمان الاولى $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}$ وباستخدام (1) و (4)

$$\frac{\partial u}{\partial r}\frac{1}{cos\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{1}{sin\theta}-\frac{\partial v}{\partial r}\frac{1}{sin\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{1}{cos\theta}=0 \qquad (5)$$

من معادلة كوشي ريمان الثانية $-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}$ وباستخدام (2) و (3)

$$\frac{\partial u}{\partial r}\frac{1}{sin\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{1}{cos\theta}+\frac{\partial v}{\partial r}\frac{1}{cos\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{1}{sin\theta}=0 \qquad (6)$$

بضرب المعادلة (5) بـ $sin\theta$ وضرب المعادلة (6) بـ $cos\theta$ والجمع نحصل على :

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

بضرب المعادلة (5) بـ $-cos\theta$ وضرب المعادلة (6) بـ $sin\theta$ والجمع نحصل على :

$$\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

مثال: حقق معادلتي كوشي ريمان بالصيغة القطبية للدالة $f(z)=\frac{1}{z}$.

الحل:

الصيغة الآسية و القطبية للدالة تعطى

$$f(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{re^{i\theta}}=\frac{cos\theta}{r}-i\frac{sin\theta}{r}$$

وبالتالي

$$u(r,\theta)=\frac{cos\theta}{r}$$

$$v(r,\theta) = -\frac{\sin\theta}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\cos\theta}{r^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{\cos\theta}{r}$$

وبالتالي

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

بالنسبة الى

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\sin\theta}{r^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\sin\theta}{r}$$

اذن

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

وبالتالي تتحقق معادلتا كوشي – ريمان بالصيغة القطبية.

من معادلتي كوشي ريمان بالصيغة القطبية يمكن كتابة تفاضل $f(z)$ كالتالي:

$$\acute{f}(z) = e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{e^{-i\theta}}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - i\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$$

$$\acute{f}(z) = e^{-i\theta}\left(-\frac{\cos\theta}{r^2} + i\frac{\sin\theta}{r^2}\right) = \frac{e^{-i\theta}}{r}\left(-\frac{\cos\theta}{r} + i\frac{\sin\theta}{r}\right)$$

$$\acute{f}(z) = -\frac{e^{-i\theta}}{r^2}(\cos\theta - i\sin\theta) = -\frac{e^{-i\theta}}{r^2}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$\acute{f}(z) = -\frac{e^{-i\theta}}{r^2}\left(e^{-i\theta}\right) = -\frac{e^{-i\theta}}{r^2}\left(e^{-i\theta}\right) = -\frac{1}{z^2}$$