الفصل الثالث

تفاضل الدوال العقدية ومعادلات كوشي-ريمان

الدوال التحليلية: يقال أن الدالة $f(z)$ تكون تحليلية في المجال D إذا كانت $f(z)$ معرفة وقابلة للتفاضل في جميع نقاط D. ويقال أن الدالة $f(z)$ تحليلية عند نقطة $z = z_0$ في D إذا $f(z)$ تحليلية في جوار z_0.

التفاضل:

لتكن $f(z)$ معرفة عند العدد z_0 بالمستوي العقدي، فأن تفاضل $f(z)$ عند z_0 باستخدام التعريف هو:

$$\acute{f}(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}\right)$$

بشرط ان تكون هذه الغاية موجودة. ويقال للدالة $f(z)$ بانها قابلة للتفاضل عند z_0 عندما يكون تفاضل الدالة عند z_0 موجود.

مثال: جد تفاضل الدالة $f(z) = z^2$ و هل هي دالة معرفة وقابلة للتفاضل.

الحل:

$$\acute{f}(z) = \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}\right) = \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z}\right)$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{z^2 + 2z\Delta z + (\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z}\right)$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z}\right) = \lim_{\Delta z \to 0}(2z + \Delta z) = 2z$$

الدالة $f(z) = z^2$ دالة معرفة بالمستوي المعقد كله وقابلة للتفاضل في جميع نقاطه.

مثال: جد تفاضل الدالة $f(z) = z^2 - 5z$ وهل هي دالة معرفة وقابلة للتفاضل.

الحل:

$$\acute{f}(z) = \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}\right) = \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{(z+\Delta z)^2 - 5(z+\Delta z) - z^2 + 5z}{\Delta z}\right)$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{z^2 + 2z\Delta z + (\Delta z)^2 - 5z - 5\Delta z - z^2 + 5z}{\Delta z}\right)$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2 - 5\Delta z}{\Delta z}\right) = \lim_{\Delta z \to 0}(2z + \Delta z - 5)$$

$$\acute{f}(z) = 2z - 5$$

الدالة $f(z) = z^2 - 5z$ دالة معرفة بالمستوي المعقد كله وقابلة للتفاضل في جميع نقاطه.

مثال: اثبت ان الدالة $f(z) = x + 4iy$ غير قابلة للتفاضل لأي نقطة من نقاط z.

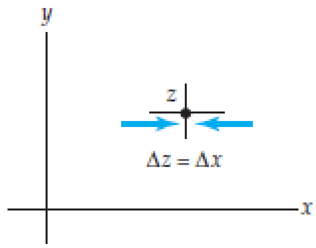
الحل: نفرض ان z نقطة في المستوي المعقد.

$$\acute{f}(z) = \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}\right) = \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{(x+\Delta x) + 4i(y+\Delta y) - x - 4iy}{\Delta x + i\Delta y}\right)$$

$$\acute{f}(z) = \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{\Delta x + 4i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}\right)$$

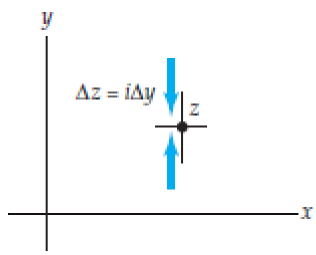
الان، وكما في الشكل ادناه ، لو فرضنا ان $\Delta z \to 0$ على طول الخط الموازي الى المحور x ، وعندئذ $\Delta y = 0$ و $\Delta z = \Delta x$ وبالتالي:

$$\acute{f}(z) = \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta x}\right) = 1 \qquad (1)$$



من جهة اخرى، وكما في الشكل ادناه، لو فرضنا ان $\Delta z \to 0$ على طول الخط الموازي الى المحور y ، وعندئذ $\Delta x = 0$ و $\Delta z = i\Delta y$ وبالتالي:

$$\acute{f}(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \left(\frac{4i\Delta y}{i\Delta y}\right) = 4 \qquad (2)$$



مما سبق فان القيم في المعادلة 1 و 2 مختلفة، وبالتالي نستخلص بأن الدالة $f(z) = x + 4iy$ غير قابلة للتفاضل عند اي نقطة من نقاط z.

مثال: جد تفاضل الدالة $f(z) = \bar{z}$ وهل هي دالة معرفة وقابلة للتفاضل.

الحل:

$$\acute{f}(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \left(\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}\right) = \lim_{\Delta z \to 0} \left(\frac{\overline{z + \Delta z} - \bar{z}}{\Delta z}\right)$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \left(\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\right) = \lim_{\Delta z \to 0} \left(\frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}\right)$$

الان، لو فرضنا ان $\Delta z \to 0$ على طول الخط الموازي الى المحور x ، وعندئذ $\Delta y = 0$ و $\Delta z = \Delta x$ وبالتالي:

$$\acute{f}(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta x}\right) = 1 \qquad (3)$$

من جهة اخرى، لو فرضنا ان $\Delta z \to 0$ على طول الخط الموازي الى المحور y ، وعندئذ $\Delta x = 0$ و $\Delta z = i\Delta y$ وبالتالي:

$$\acute{f}(z) = \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{-i\Delta y}{i\Delta y}\right) = -1 \qquad (4)$$

مما سبق فان القيم في المعادلة 3 و 4 مختلفة وتعتمد على الطريق الذي يقترب فيه Δz من الصفر، وبالتالي نستخلص بأن الدالة $f(z) = \bar{z} = x - iy$ غير قابلة للتفاضل عند أي نقطة من نقاط z وانها دالة غير تحليلية في اي مكان.

مثال: جد تفاضل الدالة $f(z) = |z|^2$ وهل هي دالة معرفة وقابلة للتفاضل.

الحل:

$$\acute{f}(z) = \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}\right) = \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{|z+\Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z}\right)$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{(z+\Delta z)(\overline{z+\Delta z}) - z\bar{z}}{\Delta z}\right) = \lim_{\Delta z \to 0}\left(\bar{z} + \overline{\Delta z} + z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\right)$$

الان، لو فرضنا ان $\Delta z \to 0$ على طول الخط الموازي الى المحور x ، وعندئذ $\Delta y = 0$ و $\Delta z = \Delta x$ وبالتالي:

$$\acute{f}(z) = \bar{z} + z \qquad (5)$$

من جهة اخرى، لو فرضنا ان $\Delta z \to 0$ على طول الخط الموازي الى المحور y ، وعندئذ $\Delta x = 0$ و $\Delta z = i\Delta y$ وبالتالي:

$$\acute{f}(z) = \bar{z} - z \qquad (6)$$

مما سبق فان القيم في المعادلة 5 و 6 مختلفة، وبالتالي نستخلص بأن الدالة $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ غير قابلة للتفاضل عند اي نقطة من نقاط z.

تمارين: باستخدام التعريف، اوجد مشتقة الدالة:

١- $f(z) = z^3 - 2z$ عند نقطة $z = -1$.

٢- $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$، حدد اين تكون الدالة غير تحليلية:

٣- برهن ان $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f(z) = z^2\bar{z}$ غير موجودة في اي مكان.

قواعد التفاضل

اذا كانت $f(z)$ و $g(z)$ و $h(z)$ دوال تحليلية في z فأن قواعد التفاضل للدوال المعقدة التالية (مطابقة لقوانين تفاضل الدوال الحقيقية) تتحقق:

1- $\frac{d}{dz}\{f(z)+g(z)\}=\frac{d}{dz}f(z)+\frac{d}{dz}g(z)=\acute{f}(z)+\acute{g}(z)$

2- $\frac{d}{dz}\{f(z)-g(z)\}=\frac{d}{dz}f(z)-\frac{d}{dz}g(z)=\acute{f}(z)-\acute{g}(z)$

3- $\frac{d}{dz}\{cf(z)\}=c\frac{d}{dz}f(z)=c\acute{f}(z) \qquad ,where\ c=constant$

4- $\frac{d}{dz}\{f(z)g(z)\}=f(z)\frac{d}{dz}g(z)+g(z)\frac{d}{dz}f(z)=f(z)\acute{g}(z)+g(z)\acute{f}(z)$

5- $\frac{d}{dz}\left\{\frac{f(z)}{g(z)}\right\}=\frac{g(z)\frac{d}{dz}f(z)-f(z)\frac{d}{dz}g(z)}{\{g(z)\}^2}=\frac{g(z)\acute{f}(z)-f(z)\acute{g}(z)}{\{g(z)\}^2} \qquad ,where\ g(z)\neq 0$

6- *If* $w=f(\xi)$, *where* $\xi=g(z)$

$$\frac{dw}{dz}=\frac{dw}{d\xi}\frac{d\xi}{dz}=\acute{f}(\xi)\frac{d\xi}{dz}=\acute{f}(g(z))\acute{g}(z)$$

7- *If* $w=f(\xi)$, *where* $\xi=g(\eta)$ *and* $\eta=h(z)$

$$\frac{dw}{dz}=\frac{dw}{d\xi}\frac{d\xi}{d\eta}\frac{d\eta}{dz}$$

تسمى العلاقات ٦ و ٧ بقواعد تسلسل التفاضل (دوال الدوال).

8- *If* $w=f(z)$

لذلك فأن

$z=f^{-1}(w)$

وبالتالي فأن كل من $\frac{dw}{dz}$ و $\frac{dz}{dw}$ تحقق

$$\frac{dw}{dz}=\frac{1}{\frac{dz}{dw}}$$

9- *If* $z=f(t)$ *and* $w=g(t)$ *,where t parameter*

فأن

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\frac{dw}{dt}}{\frac{dz}{dt}}=\frac{\acute{g}(z)}{\acute{f}(z)}$$

10- $\frac{d}{dz}z^n=nz^{n-1}$ $\quad n$ *an integer*

العلاقة اعلاه، لا يمكن تطبيقها لقوى المترافق المعقد،

11- $\frac{d}{dz}[g(z)]^n=n[g(z)]^{n-1}\,\acute{g}(z)$ $\quad n$ *an integer*

مثال: استخدم قواعد التفاضل لإيجاد تفاضل الدوال المعقدة التالية:

1- $f(z)=3z^4-5z^3+2z \quad \Longrightarrow \acute{f}(z)=12z^3-15z^2+2$

2- $f(z)=\frac{z^2}{4z+1} \quad \Longrightarrow \acute{f}(z)=\frac{(4z+1)(2z)-z^2(4)}{(4z+1)^2}=\frac{4z^2+2z}{(4z+1)^2}$

3- $f(z)=(iz^2+3z)^5 \Longrightarrow 5(iz^2+3z)^4(2iz+3)$

4- $f(z)=\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\Rightarrow \frac{d}{dz}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=\frac{(1-z)(1)-(1+z)(-1)}{(1-z)^2}=\frac{2}{(1-z)^2}$

الدالة$\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = f(z)$دالة تحليلية لكل قيم z ما عدا $z=1$ حيث ان تفاضل الدالة غير موجود والدالة غير تحليلية. اما النقطة $z=1$ فتسمى النقطة الشاذة.

مثال: باستخدام قاعدة قسمة دالتين اثبت ان:

$$\frac{d}{dz}\tan z = \sec^2 z$$

الحل:

$$\frac{d}{dz}\tan z = \frac{d}{dz}\left(\frac{\sin z}{\cos z}\right) = \frac{\cos z\frac{d}{dz}\sin z - \sin z\frac{d}{dz}\cos z}{(\cos z)^2}$$

$$= \frac{\cos z\,(\cos z) - \sin z\,(-\sin z)}{(\cos z)^2} = \frac{\cos^2 z + \sin^2 z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z} = \sec^2 z$$

مثال: برهن ان

$$\frac{d}{dz}\ln f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

الحل:

لنفرض ان $w = ln\xi$ وان $\xi = f(z)$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\xi}\frac{d\xi}{dz} = \frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{dz} = \frac{1}{f(z)}f'(z) \qquad ,where \qquad d\xi = f'(z)dz$$

مثال: برهن ان

$$\frac{d}{dz}\tanh^{-1} z = \frac{1}{1-z^2}$$

الحل:

$$\frac{d}{dz}\tanh^{-1} z = \frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{2}ln\frac{1+z}{1-z}\right\} = \frac{1}{2}\frac{d}{dz}ln(1+z) - \frac{1}{2}\frac{d}{dz}ln(1-z)$$

$$\frac{d}{dz}\tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\frac{1}{1+z} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-z^2}$$

مثال: باستخدام قواعد التفاضل، جد

$$f(z) = \cos^2(2z+3i)$$

الحل:

$$\frac{d}{dz}\cos^2(2z+3i) = 2\{\cos(2z+3i)\}\left\{\frac{d}{dz}\cos(2z+3i)\right\}$$

$$= 2\{\cos(2z+3i)\}\{-\sin(2z+3i)(2)\}$$

$$\frac{d}{dz}\cos^2(2z+3i) = -4\cos(2z+3i)\sin(2z+3i)$$

مثال: باستخدام قواعد التفاضل، جد تفاضل حاصل ضرب الدالتين:

$$z\tan^{-1}(ln\, z)$$

الحل:

$$\frac{d}{dz}(z\tan^{-1}(ln\, z)) = z\frac{d}{dz}(\tan^{-1}(ln\, z)) + \tan^{-1}(ln\, z)$$

$$= z\left\{\frac{1}{1+(ln\, z)^2}\right\}\frac{d}{dz}(ln\, z) + \tan^{-1}(ln\, z) \qquad ,where \quad \frac{d}{dz}(\tan^{-1}(z)) = \frac{1}{1+z^2}$$

$$= z\left\{\frac{1}{1+(ln\, z)^2}\right\}\frac{1}{z} + \tan^{-1}(ln\, z)$$

$$\frac{d}{dz}(z\tan^{-1}(ln\, z)) = \left\{\frac{1}{1+(ln\, z)^2}\right\} + \tan^{-1}(ln\, z)$$

تمرين: باستخدام قواعد التفاضل ودوال القوى المعقدة، جد

$$f(z) = (z-3)^{4z+3}$$

تمرين: باستخدام قواعد التفاضل، جد

$$f(z) = \{\tanh^{-1}(iz+2)\}^{-1}$$

العلاقات الخاصة بتفاضل الدوال المعقدة البسيطة

1. $\dfrac{d}{dz}(c) = 0$
2. $\dfrac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}$
3. $\dfrac{d}{dz} e^z = e^z$
4. $\dfrac{d}{dz} a^z = a^z \ln a$
5. $\dfrac{d}{dz} \sin z = \cos z$
6. $\dfrac{d}{dz} \cos z = -\sin z$
7. $\dfrac{d}{dz} \tan z = \sec^2 z$
8. $\dfrac{d}{dz} \cot z = -\csc^2 z$
9. $\dfrac{d}{dz} \sec z = \sec z \tan z$
10. $\dfrac{d}{dz} \csc z = -\csc z \cot z$
11. $\dfrac{d}{dz} \log_e z = \dfrac{d}{dz} \ln z = \dfrac{1}{z}$
12. $\dfrac{d}{dz} \log_a z = \dfrac{\log_a e}{z}$
13. $\dfrac{d}{dz} \sin^{-1} z = \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$
14. $\dfrac{d}{dz} \cos^{-1} z = \dfrac{-1}{\sqrt{1-z^2}}$
15. $\dfrac{d}{dz} \tan^{-1} z = \dfrac{1}{1+z^2}$
16. $\dfrac{d}{dz} \cot^{-1} z = \dfrac{-1}{1+z^2}$
17. $\dfrac{d}{dz} \sec^{-1} z = \dfrac{1}{z\sqrt{z^2-1}}$
18. $\dfrac{d}{dz} \csc^{-1} z = \dfrac{-1}{z\sqrt{z^2-1}}$
19. $\dfrac{d}{dz} \sinh z = \cosh z$
20. $\dfrac{d}{dz} \cosh z = \sinh z$
21. $\dfrac{d}{dz} \tanh z = \operatorname{sech}^2 z$
22. $\dfrac{d}{dz} \coth z = -\operatorname{csch}^2 z$
23. $\dfrac{d}{dz} \operatorname{sech} z = -\operatorname{sech} z \tanh z$
24. $\dfrac{d}{dz} \operatorname{csch} z = -\operatorname{csch} z \coth z$
25. $\dfrac{d}{dz} \sinh^{-1} z = \dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}$
26. $\dfrac{d}{dz} \cosh^{-1} z = \dfrac{1}{\sqrt{z^2-1}}$
27. $\dfrac{d}{dz} \tanh^{-1} z = \dfrac{1}{1-z^2}$
28. $\dfrac{d}{dz} \coth^{-1} z = \dfrac{1}{1-z^2}$
29. $\dfrac{d}{dz} \operatorname{sech}^{-1} z = \dfrac{-1}{z\sqrt{1-z^2}}$
30. $\dfrac{d}{dz} \operatorname{csch}^{-1} z = \dfrac{-1}{z\sqrt{z^2+1}}$