الفصل الثاني

الدوال النظامية البسيطة

المتغير ودوال المتغير العقدي

يسمى الرمز z الذي يعبر عن أي عنصر في فئة الاعداد المعقدة بالمتغير المعقد. اذا كان لكل قيمة للمتغير المعقد z توجد قيمة واحدة او عدة قيم للمتغير المعقد w، فيقال ان w هي دالة لـ z وتكتب:

$$w = f(z)$$

يسمى z بالمتغير المعقد المستقل، بينما w بالمتغير المعقد المعتمد. اذا وجدت لكل قيمة للمتغير المستقل z قيمة واحدة فقط للمتغير المعتمد w ، فإننا نقول ان w دالة وحيدة القيمة للمتغير z او ان $f(z)$ وحيدة القيمة. اما اذا وجدت لكل قيمة مقابلة للعدد z اكثر من قيمة لـ w ، فإننا نقول ان w دالة متعددة القيم او كثيرة القيم للمتغير z. فاذا كانت $w = z^2$ فإن لكل قيمة للمتغير z قيمة واحدة فقط w، اما $w = z^{\frac{1}{2}}$ فأن لكل قيمة z توجد قيمتان لـ w .

الدوال العكسية

اذا كان $w = f(z)$ ، فإنه يمكن أيضاً أن نعتبر z كدالة في المتغير w وتكتب $z = g(w) = f^{-1}(w)$ وعادة تسمى الدالة f^{-1} بالدالة العكسية المناظرة للدالة f.

التحويلات

اذا كان $w(= u + iv)$ (حيث u و v حقيقيان) دالة واحدة القيمة في المتغير $z(= x + iy)$ (حيث x و y حقيقيان) فأنه يمكن ان نكتب:

$$u + iv = f(x + iy)$$

وبمساواة الجزأين الحقيقيين والجزأين الخياليين في الطرفين فإننا نرى أنها تكون مكافئة الى:

$$u = u(x, y) \quad , \quad v = v(x, y)$$

اذا اعطينا نقطة مثل P في المستوي z ، فأنه توجد نقطة مثل $\acute{P}$ مناظرة في المستوي w. ونقول ان النقطة P نقلت او حولت الى النقطة $\acute{P}$ باستخدام التحويل وتسمى $\acute{P}$ بصورة P.

مثال: أكتب $f(z) = z^2$ على شكل $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

الحل:

$$w = u + iv = f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

وبمساواة الجزأين الحقيقيين والجزأين الخياليين في الطرفين فأننا نرى:

$$u = u(x,y) = x^2 - y^2$$

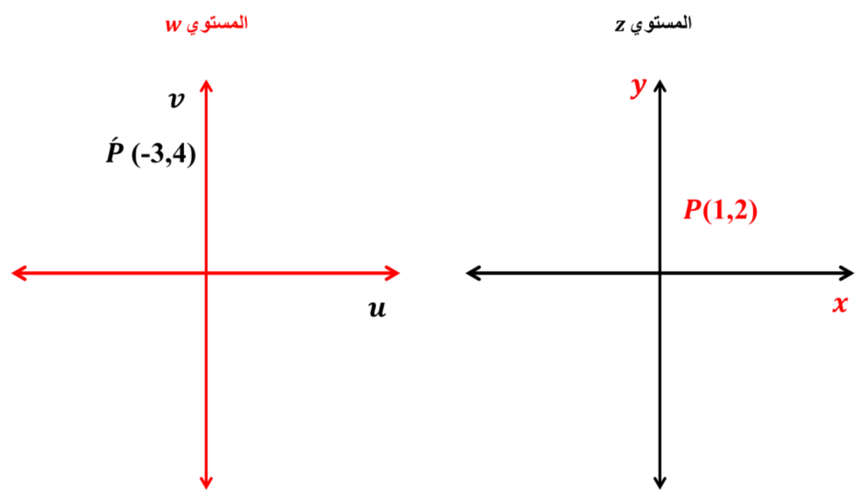
$$v = v(x,y) = 2xy$$

لنقل النقطة $(1,2)$ في المستوي العقدي z الى النقطة المناظرة لها في المستوي w:

$$u = 1^2 - 2^2 = -3$$

$$v = 2xy = 4$$

اذن تكون النقطة المناظرة في المستوي w هي $(-3,4)$وكما في الرسم التقريبي في ادناه:



مثال: لديك $w = f(z) = z^2 + 3z$، جد u و v واحسب f في $z = 1 + 3i$.

الحل:

$$u = Re\{f(z)\} = x^2 - y^2 + 3x$$

$$v = Im\{f(z)\} = 2xy + 3y$$

$$f(1+3i) = (1+3i)^2 + 3(1+3i) = 1 - 9 + 6i + 3 + 9i = -5 + 15i$$

وهكذا نرى بأن

$v(1,3) = 15$ و $u(1,3) = -5$

مثال: لديك $w = f(z) = 2zi + 6\bar{z}$، جد u و v واحسب f في $z = \frac{1}{2} + 4i$.

الحل:

$$f(z) = 2i(x+iy) + 6(x-iy)$$

$$u(x,y)) = 6x - 2y$$

$$v(x,y) = 2x - 6y$$

$$f\left(\frac{1}{2} + 4i\right) = 2i\left(\frac{1}{2} + 4i\right) + 6\left(\frac{1}{2} - 4i\right) = i - 8 + 3 - 24i = -5 - 23i$$

وهكذا نرى بأن

$$u\left(\frac{1}{2}, 4\right) = -5$$

$$v\left(\frac{1}{2}, 3\right) = -23$$

مثال: اعتبر $w = f(z) = z^2$ ، اوجد قيم w المناظرة لكل من:

(أ) $z = -2 + i$ ، (ب): $z = 1 - 3i$

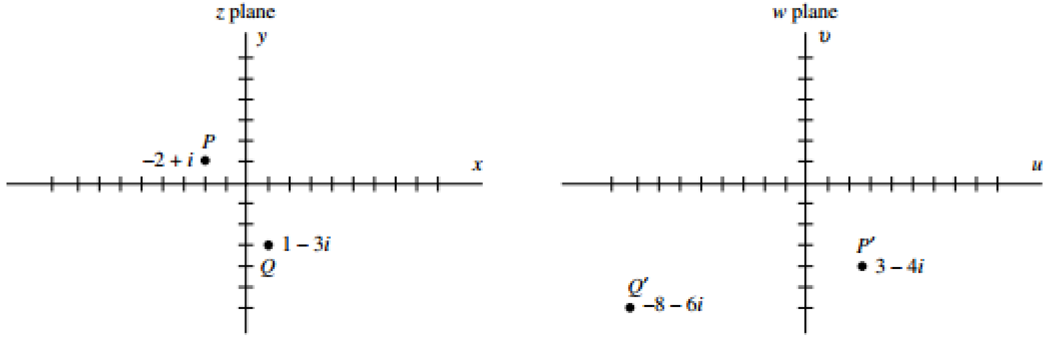
وبين كيف يمكن تمثيل هذا التناظر بيانياً.

الحل: (أ)

$$w = f(-2+i) = (-2+i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 3 - 4i$$

(ب):

$$w = f(1-3i) = (1-3i)^2 = 1 - 6i + 9i^2 = -8 - 6i$$



النقطة $z=-2+i$ ، الممثلة بالنقطة P في المستوي z لها صورة $\text{w}=3-4i$ الممثلة بالنقطة $\acute{P}$ في المستوي w، نقول ان P قد نقلت الى $\acute{P}$ بواسطة دالة الرسم او التحويل $w=z^2$. بالمثل $z=1-3i$ قد نقلت الى $\text{w}=-8-6i$، اذن لكل نقطة واحدة في المستوي z توجد نقطة واحدة تمثلها في المستوي w وبالتالي تكون دالة وحيدة القيمة للمتغير z.

الاحداثيات الانحنائية

اذا اعطينا التحويل$w = f(z)$ او المكافئ له $v = v(x,y)$ و $u = u(x,y)$ فأننا نسمي (x,y) الاحداثيات المتعامدة بالنسبة الى نقطة ما في المستوي z و (u,v) بالإحداثيات الانحنائية للنقطة P في المستوي z .

التحويل الخطي Linear Transformation

يسمى التحويل $w = az + b$ بالتحويل الخطي حيث ان a و b اعداد معقدة وw دالة خطية. هنالك ثلاثة انواع من التحويل الخطي يتم فيها تحويل النقاط من المستوي z الى المستوي المعقدw و هي:

١- تحويل النقل (ازاحة بمقدار *b* (*Transport Transformation*:

إذا كان $a = 1$ و b اختيارية فأن

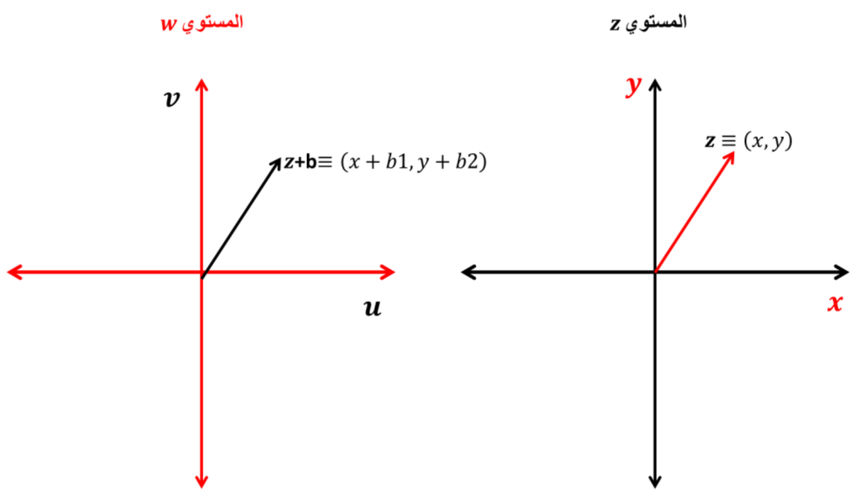
$$w = f(z) = z + b$$

وهنا نلاحظ أن كل نقطة z أزيحت بإضافة العدد b . وبما ان $b = b1 + ib2$ فأن

$$w = u + iv = x + iy + b1 + ib2$$

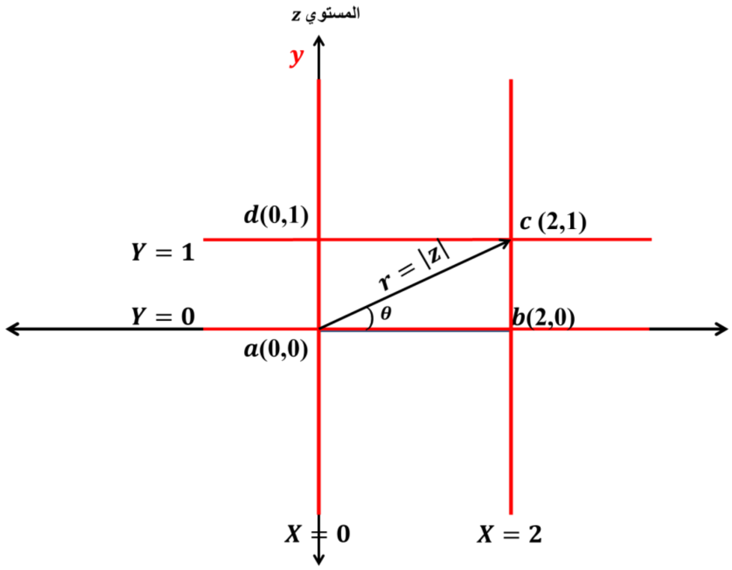
$$u = x + b1$$
$$v = y + b2$$

هذا يعني ان النقطة (x,y) في المستوي z هي النقطة $(x + b1, y + b2)$ في المستويw كما في الشكل ادناه



مثال: افرض ان لدينا المستطيل الذي تكون من تقاطع المستقيمات $X=0$ و $X=2$ و $Y=0$ و $Y=1$ وكما موضح في الرسم ادناه حيث كل نقطة من نقاط المستطيل تكونت من تقاطع مستقيمين، جد r و θ ومن ثم باستخدام التحويل الخطي حول المستطيل في المستوي z الى المستوي w، باستخدام تحويل النقل اذا علمت بأن $w=z+1-2i$.

الحل:



العدد العقدي z ممثل بالرسم بالنقطة c بحيث ان

$$z=2+i\equiv(2,1)$$

نستخرج قيمة r من خلال التالي:

$$r=|z|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

نستخرج قيمة θ بالدرجة من خلال:

$$\theta=\tan^{-1}\frac{1}{2}=26.5^o$$

لاستخراج النقاط المقابلة في المستوي w نعوض نقاط المستطيل الناتجة من تقاطع كل مستقيمين في المستوي المعقد z في التحويل الخطي ، بالنسبة الى $a(0,0)$

$$w=(0+i0)+1-2i=1-2i\equiv a'(1,-2)$$

اما بالنسبة الى $b(2,0)$

$$w = (2 + i0) + 1 - 2i = 3 - 2i \equiv b'(3, -2)$$

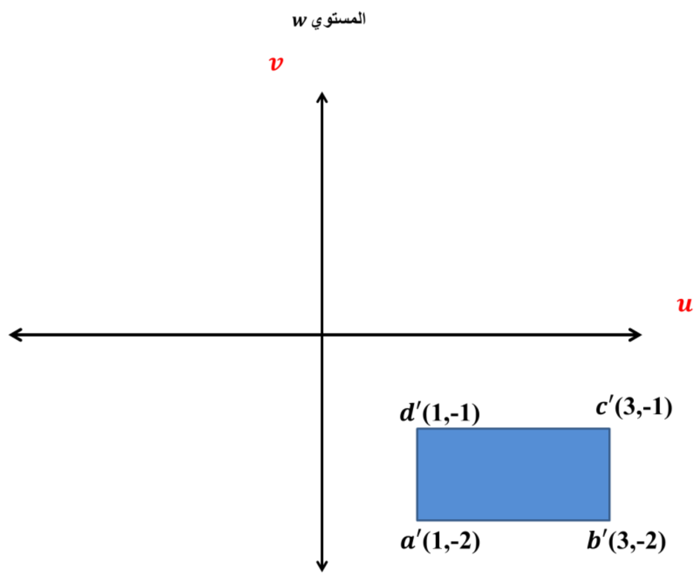
اما بالنسبة الى $c(2,1)$

$$w = (2 + i) + 1 - 2i = 3 - i \equiv c'(3, -1)$$

اما بالنسبة الى $d(0,1)$

$$w = (0 + i) + 1 - 2i = 1 - i \equiv d(1, -1)$$

لذلك نعين نقاط المستوي w كما في الشكل ادناه:



٢- تحويل التدوير (ازاحة بمقدار $arg\{a\}$) Rotation Transformation:

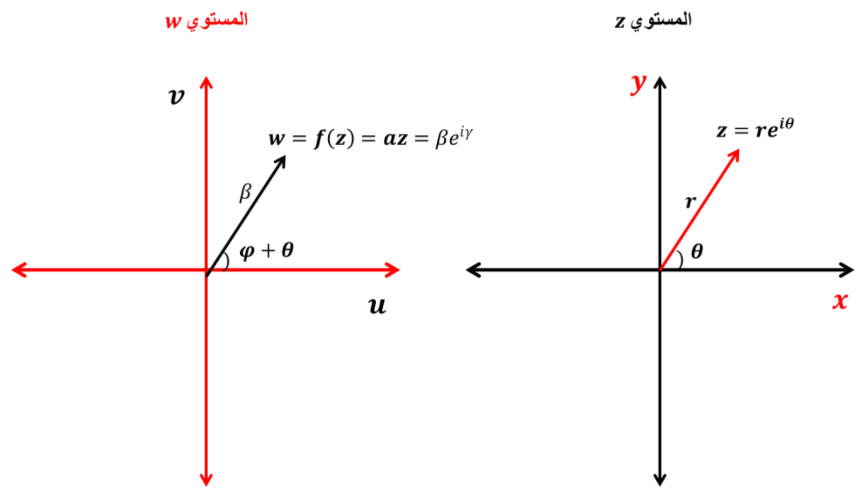
إذا كان $b = 0$ و a اختيارية وهو عدد معقد أي أن

$$w = f(z) = az$$

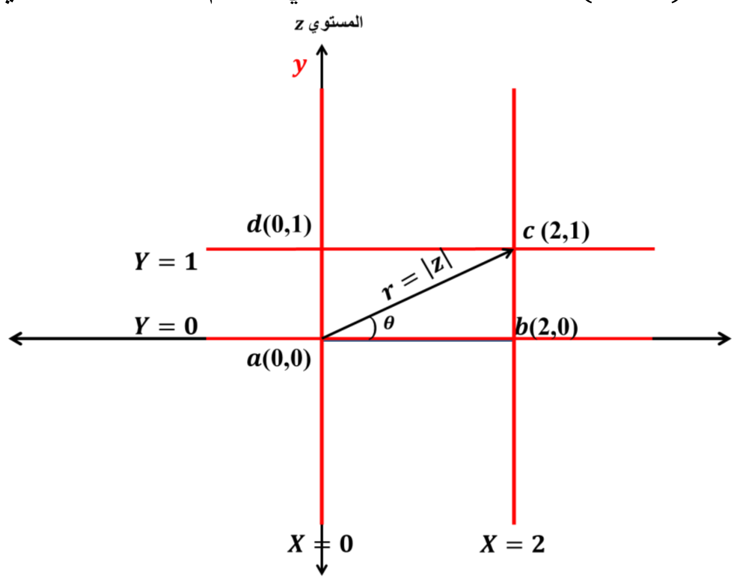
حيث أن $a = \rho e^{i\varphi}$ و $z = re^{i\theta}$ ، وعلية يكون

$$w = f(z) = \rho r e^{i(\varphi+\theta)} = \beta e^{i\gamma}$$

هذا النوع من التحويل يعني تدوير (ازاحة) المتجه z حول نقطة الاصل بزاوية φ حيث $\varphi = arg\{a\}$ مع تصغير او تكبير هذا المتجه بمقدار ρ حيث $\rho = |a|$.



مثال: استعمل التحويل $w = (1 + i)z$ بنقل المستطيل في الرسم ادناه من المستوي z الى المستوي w.



الحل:

$$w = f(z) = \rho r e^{i(\varphi+\theta)} = \beta e^{i\gamma}$$

نجد r و θ :

$$r = \sqrt{5}$$

$$\theta = 26.5^0$$

نستخرج ρ و φ من

$$\rho = |a| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{1}{1} = 45^0$$

وبالتالي فأن β والزاوية γ تكون

$$\beta = r\rho = \sqrt{10}$$

$$\gamma = 71.5^0$$

لذا فأن $f(z)$ تكون

$$f(z) = \beta e^{i\gamma} = \sqrt{10}e^{i71.5}$$

لاستخراج النقاط المقابلة في المستوي w نعوض نقاط المستطيل - الناتجة من تقاطع كل مستقيمين في المستوي المعقد z - في التحويل الخطي ، بالنسبة الى $a(0,0)$

$$w = (1+i)(0+i0) \equiv a'(0,0)$$

اما بالنسبة الى $b(2,0)$

$$w = (1+i)(2+i0) \equiv b'(2,2)$$

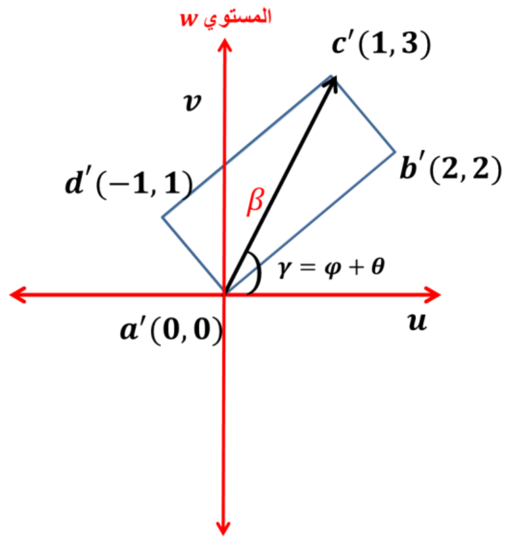
اما بالنسبة الى $c(2,1)$

$$w = (1+i)(2+i) \equiv c'(1,3)$$

اما بالنسبة الى $d(0,1)$

$$w = (1+i)(0+i) \equiv d'(-1,1)$$

لذلك نعين نقاط المستوي w كما في الشكل ادناه:

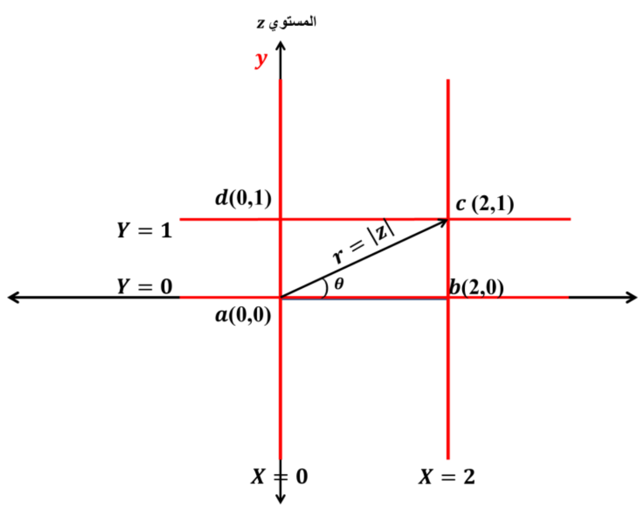


٣- تحويل النقل و التدوير (ازاحة بمقدار b و $(arg\{a\}$

Transport &Rotation Transformation

يجمع التحويل $w = az + b$ بين تحويل النقل و التدوير وكما مبين في المثال التالي:

مثال: أستخدم التحويل $w = (1+i)z + (1-2i)$ لنقل المستطيل الى المستوي w



$$w = f(z) = \rho r e^{i(\varphi+\theta)} = \beta e^{i\gamma}$$

كما في المثال اعلاه نجد r و θ :

$$r = \sqrt{5}$$

$\theta = 26.5^0$

نستخرج ρ و φ من

$\rho = |a| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\varphi = \tan^{-1}\frac{1}{1} = 45^0$

وبالتالي فأن β والزاوية γ تكون

$\beta = r\rho = \sqrt{10}$

$\gamma = 71.5^0$

لذا فأن $f(z)$ تكون

$f(z) = \beta e^{i\gamma} = \sqrt{10}e^{i71.5}$

لاستخراج النقاط المقابلة في المستوي w نعوض نقاط المستطيل - الناتجة من تقاطع كل مستقيمين في المستوي المعقد z - في التحويل الخطي $w = (1+i)z + (1-2i)$ ، بالنسبة الى $a(0,0)$

$w = (1+i)(0+i0) + 1 - 2i = 1 - 2i \equiv a'(1,-2)$

اما بالنسبة الى $b(2,0)$

$w = (1+i)(2+i0) + 1 - 2i = 3 - 0i \equiv b'(3,0)$

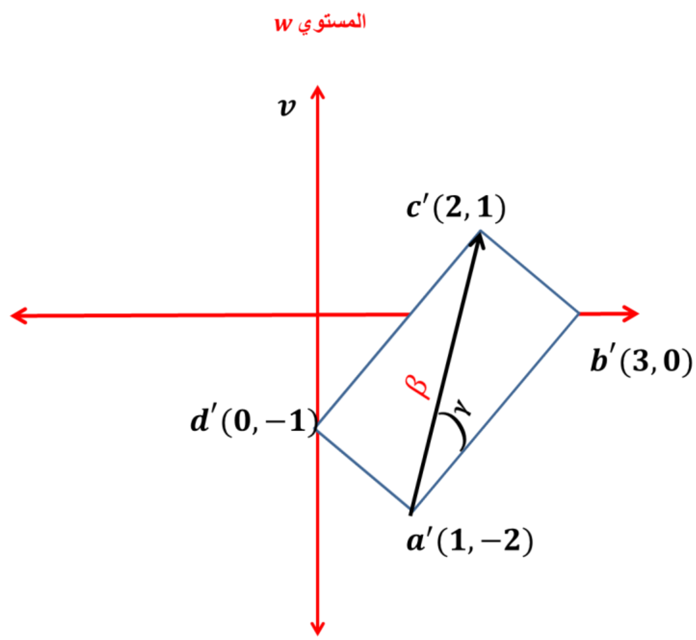
اما بالنسبة الى $c(2,1)$

$w = (1+i)(2+i) + 1 - 2i = 2 + i \equiv c'(2,1)$

اما بالنسبة الى $d(0,1)$

$w = (1+i)(0+i) + 1 - 2i = 0 - i \equiv d'(0,-1)$

لذلك نعين نقاط المستوي w كما في الشكل ادناه:



المستوي w
v
$c'(2,1)$
$b'(3,0)$
$d'(0,-1)$
β
γ
$a'(1,-2)$

الدوال البسيطة:

١- الدوال المعقدة الآسية : تكتب الدالة المعقدة الآسية $f(z) = e^z$ في المستوي المعقد بدلالة الاحداثيات المتعامدة وباستخدام صيغة اويلر كالآتي:

$$f(z) = e^z$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

$$e^z = e^x(cosy + isiny)$$

لحالة $y = 0$ ، الدالة المعقدة الآسية تكون

$$e^z = e^x$$

نلاحظ ان هذه الدالة تتحول الى دالة آسية لمتغيرات حقيقية. اما عندما $x = 0$ ، الدالة المعقدة الآسية تكون

$$e^{iy} = cosy + isiny$$

وتعرف بصيغة اويلر. ان الدالة الاسية المعقدة تحقق قانون الاشتقاق لكل z

$$\frac{d}{dz}e^z = e^z$$

يمكن اعادة كتابة صيغة الدالة المعقدة الآسية $f(z) = e^z$ في المستوي المعقد بدلالة الاحداثيات المتعامدة وباستخدام صيغة اويلر بالشكل:

$$f(z) = e^z = (e^x cosy) + i(e^x siny)$$

الصيغة القطبية للدالة المعقدة الآسية

$$f(z) = e^z = (\rho cos\varphi) + i(\rho sin\varphi)$$

من المقارنة بين الصيغتين نجد ان

$$\rho = e^x$$

و

$$\varphi = y$$

حيث تقاس y بنصف قطرية وهي الزاوية القطبية للدالة المعقدة الآسية ويرمز لها بالرمز $arg\,(f(z))$ **ويتم حسابها بنفس طريقة حساب θ في الفصل الاول.**

اما بالنسبة للقيمة المطلقة للدالة المعقدة الآسية فهي

$$|f(z)| = |\,e^{z}|$$

$$= \left|\,e^{x}\,e^{iy}\right| = |e^{x}\,|\left|e^{iy}\right|$$

$$= |e^{x}||(cosy + isiny)|$$

$$= e^{x}\sqrt{cos^{2}y + sin^{2}y}$$

$$|f(z)| = e^{x} = \rho$$

ان المعادلة الاخيرة تتيح لنا حساب ρ بنفس طريقة حساب r من القيمة المطلقة $|z|$ في الفصل الاول. ان **$e^{x} > 0$** لكل عدد حقيقي x لهذا فأن $|e^{z}| > 0$ وان $e^{z} \neq 0$ لكل عدد عقدي z. هذا يعني ان مدى الدالة المعقدة الآسية هو كل المستوي العقدي ماعدا نقطة الاصل.

اما الجزء الحقيقي و الخيالي للدالة المعقدة الآسية $f(z) = e^{z}$ فهما:

$$Re(e^{z}) = e^{x}cosy$$

$$Im(e^{z}) = e^{x}siny$$

مثال: اكتب $f(z) = e^{z^{2}}$ بدلالة الاحداثيات المتعامدة وباستخدام صيغة اويلر ، وما الجزء الحقيقي، والخيالي، والزاوية والقيمة المطلقة للدالة المعقدة الاسية ؟

الحل: نكتب الدالة الاسية بدلالة الاحداثيات المتعامدة x و y وباستخدام صيغة اويلر، بالشكل التالي:

$$e^{z^{2}} = e^{(x^{2}-y^{2})+2ixy} = e^{(x^{2}-y^{2})}(cos(2xy) + isin(2xy))$$

لغرض ايجاد الجزء الحقيقي والخيالي ، نعيد كتابة المعادلة اعلاه بالشكل التالي:

$$e^{z^{2}} = \left(e^{(x^{2}-y^{2})}cos(2xy)\right) + i\left(e^{(x^{2}-y^{2})}sin(2xy)\right)$$

من المعادلة اعلاه ، الجزء الحقيقي يكون:

$$Re\left(e^{z^{2}}\right) = e^{(x^{2}-y^{2})}cos(2xy)$$

والجزء الخيالي يكون:

$$Im(e^{z^2}) = e^{(x^2-y^2)}sin(2xy)$$

اما زاوية الدالة المعقدة الآسية تكون:

$$arg\,(e^{z^2}) = 2xy$$

والقيمة المطلقة للدالة المعقدة الآسية تكون:

$$|e^{z^2}| = e^{(x^2-y^2)}\sqrt{cos^2(2xy) + sin^2(2xy)} = e^{(x^2-y^2)}$$

مثال: اثبت ان $e^{z+2\pi i} = e^z$.

الحل:

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos(2\pi) + \mathrm{i}\sin(2\pi)) = e^z(1 + i0)$$

$$= e^z$$

مثال: جد حل الدالة الاسية المعقدة $e^z = -1$.

الحل: يمكن ان نكتب (1-) بالصيغة القطبية التالية:

$$-1 = 1(cos\pi + isin\pi)$$

حيث ان

$$\rho = |e^x| = |e^z| = |-1 + 0| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$$

$$\varphi = tan^{-1}\left(\frac{0}{-1}\right) = \pi$$

من مساواة صيغة الدالة المعقدة الآسية وصيغة الدالة المعقدة القطبية يمكن كتابة

$$e^x(cosy + isiny) = 1(cos\pi + isin\pi)$$

نجد ان

$$e^x = 1 \qquad x = 0$$

و

$$y = \pi$$

ولعدد k من الدورات تكون y :

$$y = \pi + 2k\pi \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \dots \dots \dots ..$$

وبالتالي يكون الحل

$$z = x + iy = i\pi(1 + 2k)$$

مثال: جد حل الدالة الاسية المعقدة $e^{2z} = 1 + i$.

الحل: يمكن ان نكتب (1+i) بالصيغة القطبية التالية :

$$1 + i = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$$

حيث

$$\rho = |e^{2x}| = |e^{2z}| = |1 + i| = \sqrt{(1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\varphi = tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

من مساواة صيغة الدالة المعقدة الآسية وصيغة الدالة المعقدة القطبية يمكن كتابة

$$e^{2x}(cos2y + isin2y) = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$$

حيث

$$e^{2x} = \sqrt{2}$$

بأخذ اللوغاريتم للطرفين

$$ln(e^{2x}) = ln(\sqrt{2})$$

$$2x = ln(\sqrt{2})$$

$$x = \frac{1}{2}ln(\sqrt{2}) = ln(\sqrt{2})^{\frac{1}{2}} = ln(2)^{\frac{1}{4}}$$

$$x = ln\sqrt[4]{2}$$

و

$$y = \frac{\pi}{8}$$

ولعدد k من الدورات تكون y :

$$y = \left(\frac{\pi + 8k\pi}{8}\right)$$

وبالتالي يكون الحل

$$z = x + iy = ln\sqrt[4]{2} + i\left(\frac{\pi + 8k\pi}{8}\right)$$

من خواص الدالة الاسية ما يأتي:

1- $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

2- $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$

3- $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$

4- $(e^z)^n = e^{nz}$

حيث ان n عدد صحيح.

تمارين:

اثبت مايآتي

١- $e^{(2+3\pi i)} = -e^2$

٢- $e^{\left(\frac{2+\pi i}{4}\right)} = \sqrt{e}\,\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

٣- $e^{z+\pi i} = -e^z$

جد حل الدوال الاسية المعقدة التالية:

١- $e^z = 1$

٢- $e^z = 2 - 2i$

٣- $e^{2z} = i$

٤- $e^{4z} = i$

٥- $e^z = 1 + i\sqrt{3}$

٢- **الدوال المثلثية المعقدة :** تعرف الدوال المثلثية $\sin z$ و $\cos z$ والدوال الاخرى بدلالة الدالة الاسية للمتغير z كما يأتي:

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z \qquad (1)$$

$$e^{-iz} = \cos z - i\sin z \qquad (2)$$

من جمع المعادلتين اعلاه نحصل على

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

من طرح المعادلتين اعلاه نحصل على

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

بالنسبة الى تفاضل كل من $\cos z$ و $\sin z$ فيكون

$$\frac{d}{dz}\cos z = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = i\frac{\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)}{2} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z$$

$$\frac{d}{dz}\sin z = \frac{ie^{iz} - \left(-ie^{-iz}\right)}{2i} = i\frac{\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

بالنسبة للدالة المثلثية المعقدة $\cos z$ يمكن كتابتها بالصيغة الرياضية التالية:

$$\cos z = \cos x \ \cosh y - i\sin x \ \sinh y$$

حيث يمكن اثبات العلاقة اعلاه من خلال التالي:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad , z = x + iy$$

$$\cos z = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^{y}}{2} \qquad , \quad ii = -1 \quad , -ii = 1$$

$$\cos z = \frac{e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^{y}(\cos x - i\sin x)}{2}$$

$$\cos z = \cos x\left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right) - i\sin x\left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right)$$

$$\cos z = \cos x \ \cosh y - i\sin x \ \sinh y$$

يمكن ايجاد القيمة المطلقة $\cos z$ بشكل التالي:

$$|cos\,z| = |cos(x+iy)| = |cos\,x\ coshy - i\,sinx\ sinh\,y|$$

$$= \sqrt{cos^2x\ cosh^2y + \ sin^2x\ sinh^2 y} \qquad , -ii = 1$$

$$= \sqrt{cos^2x(1+sinh^2y) + \ (1-cos^2x)\ sinh^2 y}$$

$$= \sqrt{cos^2x + cos^2xsinh^2y + \ sinh^2 y - cos^2x\ sinh^2 y}$$

$$|\cos z| = \sqrt{cos^2x\ + \ sinh^2 y}$$

كذلك الحال بالنسبة للقيمة المطلقة $sin\,z$ (اختبر نفسك)

$$|\sin z| = \sqrt{sin^2x\ + \ sinh^2 y}$$

الان نريد ان اثبت $sinz_1\,cosz_2 + cosz_1\,sinz_2 = \sin(z_1+z_2)$

$$sinz_1\ cosz_2 + cosz_1\ sinz_2 =$$

$$= \left(\frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i}\right)\left(\frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2}\right) + \left(\frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2}\right)\left(\frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i}\right)$$

$$= \left[\frac{1}{2i\times 2}(e^{iz_1} - e^{-iz_1})(e^{iz_2} + e^{-iz_2})\right] + \left[\frac{1}{2\times 2i}(e^{iz_1} + e^{-iz_1})(e^{iz_2} - e^{-iz_2})\right]$$

$$= \frac{\left[e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} - e^{i(z_2-z_1)} - e^{-i(z_1+z_2)}\right] + \left[e^{i(z_1+z_2)} - e^{i(z_1-z_2)} + e^{i(z_2-z_1)} - e^{-i(z_1+z_2)}\right]}{4i}$$

$$= \frac{2e^{i(z_1+z_2)} - 2e^{-i(z_1+z_2)}}{4i} = \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} = \sin(z_1+z_2)$$

بطريقة اخرى

$$\sin(z_1+z_2) = \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i}$$

$$= \frac{e^{iz_1}.e^{iz_2} - e^{-iz_1}.e^{-iz_2}}{2i}$$

$$= \frac{[(cosz_1 + isinz_1)(cosz_2 + isinz_2)] - [(cosz_1 - isinz_1)(cosz_2 - isinz_2)]}{2i}$$

$$= \frac{[\cos z_1 \cos z_2 + \cos z_1 i\sin z_2 + i\sin z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2] - [\cos z_1 \cos z_2 - \cos z_1 i\sin z_2 - i\sin z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2]}{2i}$$

$$= \frac{2i\cos z_1 \sin z_2 + 2i\sin z_1 \cos z_2}{2i}$$

$$= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

بالنسبة للدالة المثلثية المعقدة ادناه

$$\tan z = \left(\frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sinh^2 y}\right) + i\left(\frac{\cosh y \sinh y}{\cos^2 x + \sinh^2 y}\right)$$

فيكون اثباتها من خلال

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\sin(x+iy)}{\cos(x+iy)} = \frac{\sin x \cosh y + i\cos x \sinh y}{\cos x \cosh y - i\sin x \sinh y}$$

$$= \frac{\sin x \cosh y + i\cos x \sinh y}{\cos x \cosh y - i\sin x \sinh y} \cdot \frac{\cos x \cosh y + i\sin x \sinh y}{\cos x \cosh y + i\sin x \sinh y}$$

$$= \frac{\sin x \cos x \cosh^2 y + i\sin^2 x \cosh y \sinh y + i\cos^2 x \sinh y \cosh y - \cos x \sin x \sinh^2 y}{\cos^2 x + \sinh^2 y}$$

$$= \frac{\sin x \cos x (\cosh^2 y - \sinh^2 y) + i(\cos^2 x + \sin^2 x) \cosh y \sinh y}{\cos^2 x + \sinh^2 y}$$

$$= \frac{\sin x \cos x + i \cosh y \sinh y}{\cos^2 x + \sinh^2 y}$$

$$= \left(\frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sinh^2 y}\right) + i\left(\frac{\cosh y \sinh y}{\cos^2 x + \sinh^2 y}\right)$$

الان نحاول ان نثبت ان

$$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$$

يكون ذلك من خلال

$$\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \left(\frac{1}{2i}\right)^3 (e^{ix} - e^{-ix})^3$$

$$=\left(\frac{1}{2i}\right)^3 \left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2i}\right)^3 \left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\left(e^{2ix}-2+e^{-2ix}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2i}\right)^3 \left(e^{3ix}-2e^{ix}+e^{-ix}-e^{ix}+2e^{-ix}-e^{-3ix}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2i}\right)^3 \left(\left(e^{3ix}-e^{-3ix}\right)-3\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right)$$

$$=-\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\left(e^{3ix}-e^{-3ix}\right)}{2i}-3\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)\right)$$

$$=\frac{3sinx-sin3x}{4}$$

مثال: اثبت ان $\overline{\sin z}=\sin\bar{z}$

الحل:

الدالة المثلثية المعقدة $sin\, z$ تعطى بالعلاقة التالية:

$$sin\, z = sinx\ coshy + i\cos x\ \sinh y$$

في الطرف الايسر، المترافق المعقد للدالة المثلثية المعقدة $sin\, z$ تعطى بالعلاقة التالية:

$$\overline{sin\, z} = \overline{sinx\ coshy + i\cos x\ \sinh y} = sinx\ coshy - i\cos x\ \sinh y$$

يمكن كتابة الدالة المثلثية المعقدة $sin\, z$:

$$sin\, z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

الطرف الايمن، المترافق المعقد للدالة المثلثية المعقدة $sin\, z$ في المعادلة اعلاه:

$$sin\,\bar{z} = \frac{e^{i\bar{z}}-e^{-i\bar{z}}}{2i} = \frac{e^{i(x-iy)}-e^{-i(x-iy)}}{2i} = \frac{e^{ix}e^{y}-e^{-ix}e^{-y}}{2i} \qquad , z = x+iy$$

$$=\frac{(cosx+isinx)e^{y}-(cosx-isinx)e^{-y}}{2i}=\frac{(e^{y}cosx+e^{y}isinx)-(e^{-y}cosx-e^{-y}isinx)}{2i}$$

$$=\frac{e^{y}cosx+e^{y}isinx-e^{-y}cosx+e^{-y}isinx}{2i}=\frac{(e^{y}-e^{-y})cosx+(e^{y}+e^{-y})isinx}{2i}$$

$$= cosx\frac{(e^{y}-e^{-y})}{2i} + isinx\frac{(e^{y}+e^{-y})}{2i} = -icosx\frac{(e^{y}-e^{-y})}{2} + sinx\frac{(e^{y}+e^{-y})}{2}$$

$$= sinx\frac{(e^{y}+e^{-y})}{2} - icosx\frac{(e^{y}-e^{-y})}{2}$$

$$= sinx\cosh y - icosx\sinh y$$

وبالتالي يتساوى الطرفان.

من المتطابقات الاخرى هي

$$sec\,z = \frac{1}{cos\,z}$$

$$csc\,z = \frac{1}{sin\,z}$$

$$cot\,z = \frac{cos\,z}{sin\,z}$$

$$1 + tan^2 z = sec^2 z$$

$$1 + cot^2 z = csc^2 z$$

تمرين: اختبر نفسك لأثبات الاتي:

$$sin\,z = sinx\,coshy + i\,cos\,x\,\sinh y$$

$$sinz_1\,cosz_2 - cosz_1\,sinz_2 = sin(z_1 - z_2)$$

$$cosz_1\,cosz_2 + sinz_1\,sinz_2 = cos(z_1 + z_2)$$

$$cosz_1\,cosz_2 - sinz_1\,sinz_2 = cos(z_1 - z_2)$$

$$\overline{cos\,z} = cos\,\bar{z}$$

$$sin(-z) = -sin\,z$$

$$cos(-z) = cos\,z$$

$$tan(-z) = -tan\,z$$

$$cot(-z) = cot\,z$$

٣- الدوال المثلثية الزائدية المعقدة

تعرف دالة الجيب الزائدية وجيب التمام الزائدية للمتغير العقدي z بالمعادلتين:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

اما بالنسبة لاشتقاقهما:

$$\frac{d}{dz}\cosh z = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = sinh\, z$$

$$\frac{d}{dz} sinhz = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos hz$$

للدالتين $\sinh z$ و $\cosh z$ خصائص مشابهة لما هي عليه كل من $\sin z$ و $\cos z$، نجمل بعضها بما يلي:

$$sinh\, z = \frac{e^{(x+iy)} - e^{-(x+iy)}}{2} = \frac{1}{2}e^x(cosy + i\, siny) - \frac{1}{2}e^{-x}(cosy - i\, siny)$$

$$sinh\, z = cosy\frac{e^x - e^{-x}}{2} + i\, siny\frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

وعلى هذا يكون

$$sinh\, z = \sinh x\, cos\, y + i\cosh x\, sin\, y$$

وبطريقة مشابهة نجد

$$cosh\, z = \cosh x\, cos\, y + i\sinh x\, sin\, y$$

$$coshz = \frac{e^{(x+iy)} + e^{-(x+iy)}}{2} = \frac{1}{2}e^x(cosy + i\, siny) + \frac{1}{2}e^{-x}(cosy - i\, siny)$$

$$coshz = cosy\frac{e^x + e^{-x}}{2} + isiny\frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

وعلى هذا يكون

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2 = 1$$

$$\sinh(-z) = -\sinh z$$

$$\sinh(-z) = \frac{e^{-z} - e^{+z}}{2} = -\frac{e^z - e^{-z}}{2} = -\sinh z$$

$$\cosh(-z) = \cosh z$$

$$\cosh(-z) = \frac{e^{-z} + e^{+z}}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$$

$$= \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$$

$$= \left(\frac{e^{z_1} - e^{-z_1}}{2}\right)\left(\frac{e^{z_2} + e^{-z_2}}{2}\right) + \left(\frac{e^{z_1} + e^{-z_1}}{2}\right)\left(\frac{e^{z_2} - e^{-z_2}}{2}\right)$$

$$= \frac{e^{z_1+z_2} + e^{z_1-z_2} - e^{-z_1+z_2} - e^{-(z_1+z_2)}}{4} + \frac{e^{z_1+z_2} - e^{z_1-z_2} + e^{-z_1+z_2} - e^{-(z_1+z_2)}}{4}$$

$$= \frac{2e^{z_1+z_2} - 2e^{-(z_1+z_2)}}{4} = \frac{e^{z_1+z_2} - e^{-(z_1+z_2)}}{2} = \sinh(z_1 + z_2)$$

بنفس الطريقة

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$$

$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$$

$$\sinh z = \sinh x \cos y \ + i \cosh x \sin y$$

$$|\sinh z|^2 = |\sinh x \cos y \ + i \cosh x \sin y|^2$$

$$= \left(\sqrt{\sinh^2 x \cos^2 y \ + \cosh^2 x \sin^2 y}\right)^2$$

$$= \sinh^2 x \cos^2 y \ + (1 + \sinh^2 x)\sin^2 y$$

$$= \sinh^2 x \cos^2 y \ + \sin^2 y + \sinh^2 x \sin^2 y$$

$$= \sinh^2 x \,(\cos^2 y + \sin^2 y) + \sin^2 y$$

$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$$

$$\sinh(iz) = i \sin z$$

$$\sinh(iz) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i \sin z$$

$$\cosh(iz) = \cos z$$

$$\cosh(iz) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

اما الدوال الزائدية الاربع الاخرى، يتم تعريفها بطريقة مشابهة لنظائرها من الدوال المثلثية، بحيث ان

$$\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$$

$$\operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}$$

مثال: اثبت ان

$$sinh(z+i\pi) = -\,sinh\,z$$

الحل:

$$sinh(z+i\pi) = \frac{e^{(z+i\pi)} - e^{-(z+i\pi)}}{2} = \frac{e^{z}e^{i\pi} - e^{-z}e^{-i\pi}}{2}$$

$$= \frac{e^{z}(cos\pi + isin\pi) - e^{-z}(cos\pi - isin\pi)}{2} = \frac{e^{z}(-1+i0) - e^{-z}(-1-i0)}{2}$$

$$= \frac{-e^{z} + e^{-z}}{2} = -\frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = -\,sinh\,z$$

بنفس الطريقة

$$cosh(z+i\pi) = -\cosh z$$

ومن اعلاه نستطيع ان نثبت

$$tanh(z+i\pi) = \frac{sinh(z+i\pi)}{cosh(z+i\pi)} = \frac{-\,sinh\,z}{-\cosh z} = tanh\,z$$

مثال: اثبت ان

$$1 - tanh^2 z = sech^2 z$$

الحل

$$cosh^2 z - sinh^2 z = \left(\frac{e^{z} + e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{z} - e^{-z}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2z} + 2 + e^{-2z}}{2} - \frac{e^{2z} - 2 + e^{-2z}}{2} = 1$$

اذن

$$cosh^2 z - sinh^2 z = 1$$

بالقسمة على $cosh^2 z$ نحصل على

$$\frac{cosh^2 z}{cosh^2 z} - \frac{sinh^2 z}{cosh^2 z} = \frac{1}{cosh^2 z}$$

$$1 - tanh^2 z = sech^2 z$$

٤- دالة اللوغاريتم المعقدة

الصيغة الاسية للعدد العقدي $z = re^{i\theta}$، فأن دالة اللوغاريتم الطبيعي له تكون:

$$lnz = ln(re^{i\theta}) = lnr + ln(e^{i\theta}) = ln\, r + i\theta$$

حيثlnr تمثل دالة اللوغاريتم الطبيعي للعدد الحقيقي الموجب r والذي يكون $r = |z|$ وان $\theta = \arg z$، لهذا فأنlnz دالة متعددة القيم للعدد العقدي غير الصفري z. اذا كان φ القيمة الرئيسية لـ $\arg z$ حيث $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ وبالتالي يمكن ان نكتب $\theta = \varphi + 2n\pi$ حيث ان $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\ldots..$ ، لهذا يمكن كتابة المعادلة اعلاه بالصورة التالية:

$$ln\, z = ln\, r + i(\varphi + 2n\pi)$$

حيث تبين المعادلة اعلاه ان lnz هو دالة متعددة لقيم z وبعدد غير منتهي من قيم دالة اللوغاريتم، التي لها الجزء الحقيقي نفسه، اما الجزء الخيالي فيختلف بمضاعفات صحيحة من العدد 2π.

عندما $n = 0$ نحصل على ما يسمى بالقيمة الرئيسية لدالة اللوغاريتم وتكتب بالشكل:

$$ln\, z = ln\, r + i\varphi \qquad r > 0, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi$$

حيث تكون $ln\, z$ مفردة القيمة، تحتوي منطقة تعريفها على الاعداد العقدية غير الصفرية، ومداها هي الشريحة $-\pi < Im(lnz) < \pi$.

<u>مثال</u>: اوجد $\ln z$ اذا علمت بأن $z = 1 + i$.

الحل:

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\varphi = arg\, z = tan^{-1}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$

$$ln\,(1 + i) = ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)$$

مثال: اوجد $\ln z$ اذا علمت بأن $z = \sqrt{3} + i$.

الحل:

$$r = |z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$$

$$\varphi = arg\, z = tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

$$ln\left(\sqrt{3} + i\right) = ln\, 2 + i\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right)$$

مثال: اذا علمت بأن الصيغة الأسية للعدد العقدي هي $z = re^{i\theta}$، اثبت ان

$$\frac{d}{dz}lnz = \frac{1}{z}$$

الحل:

الصيغة الأسية للعدد العقدي هي: $z = re^{i\theta}$

مشتقة الصيغة الأسية للعدد العقدي هي:

$$dz = rie^{i\theta}d\theta + e^{i\theta}dr = e^{i\theta}(ird\theta + dr)$$

$$\frac{dz}{e^{i\theta}} = ird\theta + dr \qquad (1)$$

دالة اللوغاريتم الطبيعي للعدد العقدي z تعطى:

$$lnz = ln\, r + i\theta$$

مشتقة دالة اللوغاريتم الطبيعي للعدد العقدي z :

$$dlnz = \frac{dr}{r} + id\theta = \frac{1}{r}(ird\theta + dr)$$

باستخدام (1) تصبح المعادلة اعلاه

$$dlnz = \frac{1}{r}\frac{dz}{e^{i\theta}}$$

$$\frac{d}{dz}lnz = \frac{1}{z}$$

من الخواص الاخرى ، اذا كان z_1 و z_2 عددين عقديين غير صفريين، حيث

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \quad , \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

من السهولة ان نبرهن ان

$$lnz_1 z_2 = lnz_1 + lnz_2$$

$$lnz_1 z_2 = \ln\left(r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2}\right) = ln\left(r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}\right) = lnr_1 r_2 + i(\theta_1 + \theta_2)$$

لتبسيط المعادلة اعلاه نستخدم

$$lnr_1 r_2 = lnr_1 + lnr_2$$

وبالتالي

$$lnz_1 z_2 = lnr_1 + lnr_2 + i\theta_1 + i\theta_2 = (lnr_1 + i\theta_1) + (lnr_2 + i\theta_2)$$

$$lnz_1 z_2 = lnz_1 + lnz_2$$

مثال: افرض أن الصيغة الكارتيزية لكل من z_1 و z_2 تعطى

$$z_1 = e^{i\pi} \quad , \quad z_2 = e^{-i\pi}$$

اثبت ان

$$lnz_1 z_2 = lnz_1 + lnz_2$$

بالنسبة للطرف الايسر

$$lnz_1 z_2 = l\,n\left(e^{i\pi} . e^{-i\pi}\right) = l\,n(e^0) = l\,n\,1 = 0$$

بالنسبة للطرف الايمن

$$lnz_1 + lnz_2 = ln\left(e^{i\pi}\right) + ln\left(e^{-i\pi}\right) = i\pi - i\pi = 0$$

نلاحظ ان

$$lnz_1 z_2 = lnz_1 + lnz_2$$

وهي ليس لجميع القيم، فعلى سبيل المثال نفرض ان الصيغة الكارتيزية لكل من z_1 و z_2 تعطى

$$z_1 = z_2 = e^{i\pi}$$

نحاول اثبات ان

$$lnz_1z_2 = lnz_1 + lnz_2$$

بالنسبة للطرف الايسر

$$lnz_1z_2 = ln\left(e^{i\pi}.e^{i\pi}\right) = ln(e^{i2\pi})$$

$$lnz_1z_2 = l\,n(cos2\pi + isin2\pi) = l\,n(1+0) = 0$$

وبالنسبة للطرف الأيمن

$$lnz_1 + lnz_2 = ln(e^{i\pi}) + ln(e^{i\pi})$$

$$lnz_1 + lnz_2 = i\pi + i\pi = i2\pi$$

نلاحظ ان

$$lnz_1z_2 \neq lnz_1 + lnz_2$$

كذلك من الخواص الاخرى هي

$$ln\frac{z_1}{z_2} = lnz_1 - lnz_2$$

اثبت بنفس اسلوب اثبات

$$lnz_1z_2 = lnz_1 + lnz_2$$

ايضاً من الخواص

$$ln\left(z^{\frac{1}{m}}\right) = \frac{1}{m} lnz \qquad m = 1,2, \dots, \dots,$$

لأثبات تلك العلاقة نتبع التالي:

الصيغة القطبية للعدد العقدي تعطى بالشكل

$$z = r(cos\theta + isin\theta)$$

باستخدام تعميم الزاوية القطبية

$$z = r\big(cos(\theta + 2\pi k) + isin(\theta + 2\pi k)\big)$$

نجذر الطرفين بالنسبة الى m

$$z^{\frac{1}{m}} = r^{\frac{1}{m}}[cos(\theta + 2\pi k) + isin(\theta + 2\pi k)]^{\frac{1}{m}}$$

باستخدام نظرية دي موفر للطرف الايمن

$$= r^{\frac{1}{m}}\left(\left[cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{m}\right) + isin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{m}\right)\right]\right)$$

يمكن كتابة المعادلة اعلاه بالصيغة الآسية

$$z^{\frac{1}{m}} = r^{\frac{1}{m}} e^{i\left(\frac{\theta+2\pi k}{m}\right)}$$

من معادلة اللوغاريتم الطبيعي للعدد العقدي بالصيغة الأسية تكون المعادلة اعلاه بالشكل التالي:

$$lnz^{\frac{1}{m}} = lnr^{\frac{1}{m}} + i\left(\left(\frac{\theta + 2\pi k}{m}\right) + 2\pi n\right)$$

$$lnz^{\frac{1}{m}} = lnr^{\frac{1}{m}} + i\left(\frac{\theta + 2\pi k + 2\pi nm}{m}\right) = \frac{1}{m}\big(lnr + i(\theta + 2\pi q)\big) \qquad , q = (k + nm)$$

$$lnz^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m} lnz$$

من الخواص الاخرى هي

$$e^{lnz} = z$$

حيث ان الطرف الايسر

$$e^{lnz} = e^{ln|z|+i\theta} = e^{ln|z|}e^{i\theta} = |z|e^{i\theta} = re^{i\theta} = z$$

من الخواص الاخرى هي

$$lnz^n = nlnz$$

وهي ليست بصورة عامة

<u>مثال</u>: اثبت ان

$$ln(1+i)^2 = 2ln(1+i)$$

الحل:

بالنسبة للطرف الايسر

$$ln(1+i)^2 = ln(1+2i-1) = \ln(0+2i)$$

$$ln2i = ln(0^2+2^2)^{\frac{1}{2}} + i\tan^{-1}\left(\frac{2}{0}\right)$$

$$ln2i = ln2 + i\tan^{-1}(\infty)$$

$$ln2i = ln2 + i\frac{\pi}{2}$$

بالنسبة للطرف الايمن

$$2ln(1+i) = 2\left[ln\sqrt{1^2+1^2} + i\tan^{-1}\frac{1}{1}\right]$$

$$= 2\left[ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= 2ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{2}$$

$$= ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 + i\frac{\pi}{2}$$

$$2ln(1+i) = ln2 + i\frac{\pi}{2}$$

وبالتالي:

$$ln(1+i)^2 = 2ln(1+i)$$

وهو المطلوب

مثال: اثبت ان

$$ln((-1+i)^4) \neq 4ln(-1+i)$$

الحل:

بالنسبة للطرف الايسر

$$ln((-1+i)^4) = ln(((-1+i)^2)^2)$$

$$ln((-1+i)^4) = ln((1-2i-1)^2) = ln((-2i)^2)$$

$$= ln(-4) = ln((-4)^2+0^2)^{\frac{1}{2}} + i\tan^{-1}\left(\frac{0}{-4}\right)$$

$$ln((-1+i)^4) = ln(4) + i\pi$$

بالنسبة للطرف الايمن

$$4ln(-1+i) = 4\left[ln\sqrt{1^2+1^2} + i\tan^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right)\right]$$

$$= 4\left[ln\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4}\right]$$

$$= 4ln\sqrt{2} + i3\pi$$

$$= 2ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 + i3\pi$$

$$= 2ln2 + i3\pi$$

وبالتالي

$$ln((-1+i)^4) \neq 4ln(-1+i)$$

وهو المطلوب

٦- دوال القوى المعقدة

تعرف الدالة الآسية العامة a^z ، $a \neq 0$ بالمعادلة:

$$a^z = e^{z\,ln\,a}$$

وعندما $z = 0$، تكون $a^0 = 1$ وبخلافه فأن

$$ln\,a = ln|a| + i\,arg\{a\}$$

ويكون للدالة الآسية العامة متعددة القيم

$$a^z = e^{z\{ln|a|+i\,(\arg\{a\}+2n\pi)\}}$$

مثال: اثبت ان

$$(1+i)^i = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{4}}}\left[cos\left(\frac{ln(2)}{2}\right) + isin\left(\frac{ln(2)}{2}\right)\right]$$

الحل:

باستخدام

$$a^z = e^{z\,ln\,a}$$

نعيد كتابة $(1+i)^i$ على شكل

$$(1+i)^i = e^{i\,ln(1+i)} = e^{i(ln|a|+i\,arg\{a\})}$$

$$= e^{i\left\{ln\left(\sqrt{1^2+1^2}\right)+i\,tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right)\right\}}$$

$$= e^{i\left\{ln(\sqrt{2})+i\frac{\pi}{4}\right\}} = e^{-\frac{\pi}{4}}e^{iln(\sqrt{2})}$$

$$plnf = lnf^p$$

باستخدام صيغة اويلر نحصل على

$$(1+i)^i = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{4}}}\left[cos\left(\frac{ln(2)}{2}\right) + isin\left(\frac{ln(2)}{2}\right)\right]$$

مثال: اثبت ان

$$2i^{(-2i)} = e^{\pi}[cos(ln(4)) - isin(ln(4))]$$

الحل:

باستخدام

$$a^z = e^{z\,ln\,a}$$

نعيد كتابة $2i^{(-2i)}$ على شكل

$$= e^{-2i\left\{ln\left(\sqrt{0^2+2^2}\right)+i\,tan^{-1}\left(\frac{2}{0}\right)\right\}}$$

$$= e^{-2i\left\{ln(2)+i\frac{\pi}{2}\right\}} = e^{\pi}e^{-2iln(2)} = e^{\pi}e^{-iln(4)} \qquad , \; plnf = lnf^{p}$$

باستخدام صيغة اويلر نحصل على

$$2i^{(-2i)} = e^{\pi}[cos(ln(4)) - isin(ln(4))]$$

مثال: اذا علمت بأن $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$ ، اثبت ان

$$-(-i)^{i} = e^{\frac{\pi}{2}}[cos(\pi) + isin(\pi)]$$

الحل:

باستخدام $a^z = e^{z\,ln\,a}$ ، نعيد كتابة $(-i)^{i}$ على شكل

$$(-i)^{i} = e^{i\left\{ln\left(\sqrt{0^2+(-1)^2}\right)+i\,tan^{-1}\left(\frac{-1}{0}\right)\right\}}$$

وبالتالي فأن $-(-i)^{i}$

$$-(-i)^{i} = -1e^{i\left\{ln(1)-i\frac{\pi}{2}\right\}} = -e^{\frac{\pi}{2}} \qquad ,where\; ln(1) = 0$$

$$-(-i)^{i} = e^{\frac{\pi}{2}}[cos(\pi) + isin(\pi)] \qquad ,where\; -1 = cos(\pi) + isin(\pi)$$

مثال: اثبت ان

$$(1-i)^{4i} = \frac{cos(ln(4))}{e^{7\pi}} + i\frac{sin(ln(4))}{e^{7\pi}}$$

الحل: باستخدام $a^z = e^{z\,ln\,a}$ ، نعيد كتابة $(1-i)^{4i}$ على شكل

$$(1-i)^{4i} = e^{4i\left\{ln\left(\sqrt{1^2+(-1)^2}\right)+i\,tan^{-1}\left(\frac{-1}{1}\right)\right\}}$$

$$= e^{4i\left\{ln(\sqrt{2})+i\frac{7\pi}{4}\right\}} = e^{\{4iln(\sqrt{2})-7\pi\}} = e^{-7\pi}e^{4iln(\sqrt{2})} = e^{-7\pi}e^{iln(\sqrt{2})^4} = e^{-7\pi}e^{iln4}$$

باستخدام صيغة اويلر نحصل على

$$(1-i)^{4i} = \frac{cos(ln(4))}{e^{7\pi}} + i\frac{sin(ln(4))}{e^{7\pi}} \qquad ,where\ e^{-7\pi} = \frac{1}{e^{7\pi}}$$

٧- معكوس الدوال المثلثية المعقدة

يمكن تعريف معكوس الدوال المثلثية بدلالة الدالة اللوغاريتمية، لتعريف دالة معكوس دالة جيب للعدد العقدي z :

$$w = sin^{-1} z$$

يمكن كتابة المعادلة اعلاه

$$z = sin\, w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

وبالتالي:

$$2iz = e^{iw} - e^{-iw}$$

بضرب الطرفين بـ e^{iw} نحصل على

$$2ize^{iw} = e^{2iw} - 1$$

ومنها نحصل على معادلة من الدرجة الثانية في e^{iw}

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$$

لنفرض ان $v = e^{iw}$ ونعيد كتابة المعادلة اعلاه، وبالتالي:

$$v^2 - 2izv - 1 = 0$$

باستخدام طريقة الدستور

$$v = iz + \sqrt{1 - z^2}$$

$$v = iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$$

باستخدام $a^z = e^{z \ln a}$ بالنسبة الى $(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$ في المعادلة اعلاه، نحصل

$$v = iz + e^{\left(\frac{1}{2}[ln|1-z^2|+i\, arg\{1-z^2\}]\right)} = iz + e^{\left(\frac{1}{2}ln|1-z^2|+\frac{i}{2}\, arg\{1-z^2\}\right)}$$

$$v = iz + e^{\left(ln|1-z^2|^{\frac{1}{2}}+\frac{i}{2}\, arg\{1-z^2\}\right)}$$

$$v = iz + |1 - z^2|^{\frac{1}{2}}\, e^{\left(\frac{i}{2} arg\{1-z^2\}\right)}$$

باستخدام التعريف

$$v = e^{iw}$$

واخذ اللوغاريتم

$$iw = ln v$$

$$w = \frac{1}{i} ln v = \frac{1}{i} ln \left\{ iz + |1 - z^2|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2} arg\{1-z^2\}} \right\}$$

$$w = sin^{-1} z = \frac{1}{i} ln \left\{ iz + |1 - z^2|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2} arg\{1-z^2\}} \right\}$$

او

$$w = sin^{-1} z = \frac{1}{i} ln \left\{ iz + \sqrt{1 - z^2} \right\}$$

بنفس الطريقة (اختبر نفسك) نستطيع اثبات ان

$$cos^{-1} z = w = \frac{1}{i} ln \left\{ z + |z^2 - 1|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2} arg\{z^2-1\}} \right\}$$

او

$$cos^{-1} z = w = \frac{1}{i} ln \left\{ z + \sqrt{z^2 - 1} \right\}$$

الان نحاول ان نثبت ان

$$tan^{-1} z = \frac{1}{2i} ln \left(\frac{i - z}{i + z} \right)$$

$$w = tan^{-1} z$$

$$z = \tan w = \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{\left(\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}\right)}{\left(\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}\right)} = \frac{1}{i}\left(\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}}\right)$$

$$iz = \left(\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}}\right)$$

$$iz\left(e^{iw} + e^{-iw}\right) = e^{iw} - e^{-iw}$$

نضرب طرفي المعادلة اعلاه e^{iw} نحصل

$$iz\left(e^{2iw} + 1\right) = e^{2iw} - 1$$

نرتب المعادلة اعلاه

$$ize^{2iw} + iz = e^{2iw} - 1$$

$$ize^{2iw} - e^{2iw} = -1 - iz$$

$$(iz - 1)e^{2iw} = -1 - iz$$

نضرب طرفي المعادلة بـ i

$$-(z + i)e^{2iw} = -(i - z)$$

$$e^{2iw} = \frac{i - z}{z + i}$$

نأخذ اللوغاريتم للطرفين

$$2iw = \ln\left(\frac{i - z}{z + i}\right)$$

$$w = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{i - z}{z + i}\right)$$

$$w = \tan^{-1}z = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{i - z}{z + i}\right)$$

مثال: اثبت ان

$$sin^{-1}(2) = \frac{\pi}{2} - iln(2 + \sqrt{3})$$

الحل:

$$w = sin^{-1}(z) = \frac{1}{i} ln\left\{iz + \sqrt{1 - z^2}\right\}$$

$$sin^{-1}(2) = \frac{1}{i} ln\left(i2 + \sqrt{1 - 2^2}\right) = \frac{1}{i} ln(i2 + \sqrt{-3}) = \frac{1}{i} ln(i2 + i\sqrt{3})$$

$$= \frac{1}{i} ln[i(2 + \sqrt{3})] = \frac{1}{i}[lni + ln(2 + \sqrt{3})] = -i[lni + ln(2 + \sqrt{3})]$$

$$= -ilni - iln(2 + \sqrt{3}) = -i\left(ln1 + i\frac{\pi}{2}\right) - iln(2 + \sqrt{3})$$

$$= -i\left(0 + i\frac{\pi}{2}\right) - iln(2 + \sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} - iln(2 + \sqrt{3})$$

$$sin^{-1}(2) = \frac{\pi}{2} - iln(2 + \sqrt{3})$$

مثال: اثبت ان

$$w = cos^{-1}(i) = \frac{\pi}{2} - iln(1 + \sqrt{2})$$

الحل:

$$cos^{-1}(z) = \frac{1}{i} ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

$$cos^{-1}(i) = \frac{1}{i} ln(i + \sqrt{-1 - 1}) = \frac{1}{i} ln(i + i\sqrt{2}) = \frac{1}{i} ln(i(1 + \sqrt{2}))$$

$$= \frac{1}{i}[lni + ln(1 + \sqrt{2})] = -ilni - iln(1 + \sqrt{2})$$

$$= -i\left(ln\sqrt{0+1^2} + i\tan^{-1}\frac{1}{0}\right) - iln(1+\sqrt{2})$$

$$= -i\left(ln1 + i\frac{\pi}{2}\right) - iln(1+\sqrt{2}) = -i\left(0 + i\frac{\pi}{2}\right) - iln(1+\sqrt{2}) = \frac{\pi}{2} - iln(1+\sqrt{2})$$

مثال: اثبت ان

$$w = tan^{-1}(2i) = \frac{i}{2}ln3 + \frac{\pi}{2}$$

الحل:

$$tan^{-1}z = \frac{1}{2i}ln\left(\frac{i-z}{z+i}\right)$$

$$tan^{-1}(2i) = \frac{1}{2i}ln\left(\frac{i-2i}{2i+i}\right) = \frac{1}{2i}ln\left(\frac{-i}{3i}\right) = \frac{1}{2i}ln\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(ln\left(\frac{1}{3}\right) + i\pi\right) = \frac{1}{2i}(ln(1) - ln(3) + i\pi) = \frac{1}{2i}(0 - ln(3) + i\pi)$$

$$tan^{-1}(2i) = \frac{-1}{2i}ln(3) + \frac{\pi}{2} = \frac{i}{2}ln(3) + \frac{\pi}{2}$$

من الدوال المثلثية المعقدة المعكوسة الاخرى:

$$\csc^{-1}(z) = \frac{1}{i}ln\left(\frac{i+\sqrt{z^2-1}}{z}\right)$$

$$\sec^{-1}(z) = \frac{1}{i}ln\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right)$$

$$cot^{-1}z = \frac{1}{2i}ln\left(\frac{i+z}{z-i}\right)$$

٨- الدوال الزائدية المعقدة المعكوسة

يمكن تعريف معكوس الدوال الزائدية بدلالة الدالة اللوغاريتمية المعقدة كالتالي :

اذا كان $w = sinh^{-1}z$ ، فأن

$$z = sinh\, w = \frac{e^{w} - e^{-w}}{2}$$

افرض ان $v = e^{w}$ وبالتالي:

$$2z = v - \frac{1}{v}$$

$$v^2 - 2zv - 1 = 0$$

$$v = z + (1 + z^2)^{\frac{1}{2}} = z + e^{\frac{1}{2}ln(1+z^2)} = z + e^{\frac{1}{2}[ln|1+z^2| + iarg(1+z^2)]}$$

$$= z + |1 + z^2|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}arg(1+z^2)}$$

من التعريف $v = e^{w}$ اعلاه

$$w = lnv = ln\left(z + |1 + z^2|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}arg(1+z^2)}\right)$$

وبالتالي:

$$w = sinh^{-1}z = ln\left(z + |1 + z^2|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}arg(1+z^2)}\right)$$

او يكون $sinh^{-1}z$ بالصيغة التالية:

$$w = sinh^{-1}z = ln\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right)$$

وبنفس الطريقة (اختبر نفسك) نستطيع ان نثبت بأن:

$$w = cosh^{-1}z = ln\left(z + |z^2 - 1|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}arg(z^2-1)}\right)$$

او يكون $cosh^{-1}z$ بالصيغة التالية:

$$w = cosh^{-1}z = ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

الان نعمل على ايجاد:

$$w = tanh^{-1} z$$

$$z = tanh\, w = \frac{sinh\, w}{cosh\, w} = \frac{\frac{e^w - e^{-w}}{2}}{\frac{e^w + e^{-w}}{2}} = \frac{e^w - e^{-w}}{e^w + e^{-w}}$$

$$z = \frac{e^{2w} - 1}{e^{2w} + 1}$$

$$e^{2w} = \frac{1 + z}{1 - z}$$

$$w = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right)$$

$$w = tanh^{-1} z = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right)$$

مثال: جد ناتج $cosh^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

الحل:

$$w = cosh^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = ln\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1}\right) = ln\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}}\right) = ln\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= ln\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + i\tan^{-1}(-\sqrt{3})$$

$$cosh^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = i\frac{2\pi}{3} \qquad ,ln1 = 0$$

مثال: جد ناتج $cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

الحل:

$$w = cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1}\right) = ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{-\frac{1}{2}}\right) = ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= ln\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} + i\tan^{-1}(1)$$

$$cosh^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} = i\frac{\pi}{4} \qquad ,ln1 = 0$$

مثال: جد ناتج $tanh^{-1}(1+2i)$.

الحل:

$$w = tanh^{-1}(1+2i) = \frac{1}{2}ln\left(\frac{1+1+2i}{1-1-2i}\right) = \frac{1}{2}ln(-1+i) = \frac{1}{4}ln2 + i\frac{3}{8}\pi$$

من الدوال الزائدية المعقدة المعكوسة الاخرى هي

$$w = csch^{-1}z = ln\left(\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\right)$$

$$w = sech^{-1}z = ln\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right)$$

$$w = coth^{-1}z = \frac{1}{2}ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$