الفصل الاول

Complex Number الاعداد العقدية

التمهيد: لماذا نظام الاعداد العقدية ؟: لقد تعلمنا سابقاً ان حل المعادلة

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad (1)$$

باستخدام طريقة الدستور هو:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (2)$$

وعرفنا ان جذور المعادلة (1) حقيقية عندما يكون المقدار تحت الجذر $(b^2 - 4ac \geq 0)$ موجب، اما اذا كان المقدار $b^2 - 4ac < 0$ فهذا يعني ان جذور المعادلة (1) ليست ضمن نظام الاعداد الحقيقية. لذلك اقتضت الضرورة وجود نظام اعداد اخر يقع ضمنه الحلول غير الحقيقية للمعادلات. لقد وضع العالم الرياضي **كاوس** نظام اعداد جديد يشمل على:

١- يشمل جميع الاعداد الحقيقية.

٢- يشتمل على **الوحدة التخيلية i والتي لها الخاصية $i^2 = -1$.**

هذا النظام هو **نظام الاعداد العقدية**، حيث يعتبر $i(=\sqrt{-1})$ هو اساس النظام.

اليك بعض الامثلة البسيطة:

اليك مجموعة من الاعداد التالية:

$$\sqrt{-16} = \sqrt{-1}\sqrt{16} = 4i, \qquad \sqrt{-3} = \sqrt{-1}\sqrt{3} = i\sqrt{3}, \qquad i^3 = i^2 i = -i$$

هذه الاعداد هي اعداد **خيالية**، لكن مجموعة الاعداد التالية:

$$\sqrt{-2}\sqrt{-8} = i\sqrt{2}.\, i\sqrt{8} = -4, \qquad i^2 = -1$$

هي اعداد **حقيقية**.

الاجزاء الحقيقة والخيالية للعدد العقدي

Real and Imaginary Parts of a Complex Number

لو رجعنا الى المعادلة (1) وعوضنا عن $a = 1$ و $b = -2$ و $c = 2$، فأنها تصبح:

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \qquad (3)$$

حل المعادلة (4) يكون:

$$z = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \ \pm i$$

حيث نلاحظ ان جذري z لهما جزء حقيقي والاخر خيالي معاً ، لذلك سنطلق مصطلح العدد العقدي على z ليعني المجموعة الكاملة للأعداد الحقيقية والخيالية او تركيب الاثنين معاً. لتوضيح اكثر، ان العدد العقدي $z = a + ib$ مركب من جمع حدين، الحد الحقيقي (لا يحتوي على i) ويسمى الجزء الحقيقي (العدد الحقيقي) للعدد العقدي ويرمز له $Re\{z\}$. ومعامل i في الحد الاخر يسمى بالجزء الخيالي (العدد الخيالي) للعدد العقدي ويرمز له $Im\{z\}$، حيث ان b هو ليس خيالياً. ان الجزء الحقيقي او الخيالي للعدد العقدي ممكن ان يكون صفراً، فاذا كان الجزء الحقيقي صفرا ، فأن العدد العقدي يكون خياليا، اما اذا كان الجزء الخيالي للعدد العقدي صفراً، فأن العدد العقدي يكون حقيقاً. يمكن ان نكتب العدد العقدي على شكل زوج من الاعداد الحقيقية، الجزء الحقيقي اولاً ومن ثم الجزء الخيالي، فمثلاً يمكن كتابة العدد العقدي $5 + 3i$ على الشكل التالي $(5,3)$. ان هذا ليس الشكل المناسب جداً في الحسابات، لكنه يستخدم في التمثيل الهندسي للعدد العقدي.

أن الاعداد العقدية لها اهمية كبيرة في مجالات تطبيقية عديدة مثل الهندسة الكهربائية وكذلك في حل المعادلات التفاضلية في فروع الفيزياء المختلفة بالإضافة الى حقول متقدمة في الرياضيات تتعامل مع دوال المتغير العقدي التي تعطي طرق مفيدة متعددة لحل التمارين حول انسياب الموائع ، الكهربائية ، ميكانيك الكم.

العمليات الحسابية الجبرية للأعداد العقدية

Algebraic Calculations of Complex Numbers

يمكن القيام بالعمليات الجبرية للأعداد العقدية باتباع نفس الاسلوب في جبر الاعداد الحقيقية، لأجراء العمليات الاربعة الحسابية، نفترض لدنيا العددين العقديين $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$:

١- عملية الجمع:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

٢-عملية الطرح

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

٣-عملية الضرب

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

٤-عملية القسمة

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1 x_2 - ix_1 y_2 + ix_2 y_1 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\left(\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)$$

مثال: انجز العمليات الحسابية الاربعة للعددين العقدين $z_1 = 2 + i$ و $z_2 = 3 - i$.

الحل:

1)

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = 5 + i0 = 5$$

2)

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) = -1 + 2i$$

3)

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) = 7 + i$$

4)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\left(\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$

اذا كان لدينا z_1 ، z_2 و z_3 ثلاث اعداد عقدية، فأنها تخضع الى القوانين التالية:

١- **قانون التبديل للجمع** $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

٢- **قانون التنسيق للجمع** $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

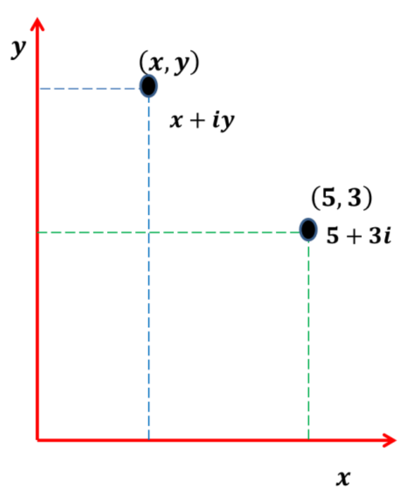
٣- **قانون التبديل للضرب** $z_1 z_2 = z_2 z_1$

٤- **قانون التنسيق للضرب** $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$

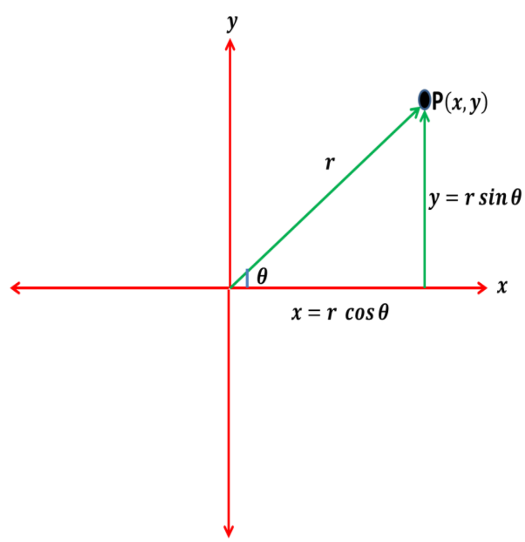
٥- **قانون التوزيع** $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

المستوي العقدي The Complex Plane

في الهندسة التحليلية، يمكن رسم النقطة $(5,3)$ كما موضح بالشكل ادناه. كما رأينا، ان الرمز $(5,3)$ قد يعني ايضاً العدد العقدي $5 + 3i$. لهذا فالنقطة $(5,3)$ تدل اما على $(5,3)$ أو $5 + 3i$ كما في الشكل(١). بنفس الطريقة ، اي عدد عقدي $x + iy$ (x, y) حقيقيان) يمكن تمثيله في المستوي xy كذلك اي نقطة (x, y) في المستوي xy يمكن تمثيلها بـ $x + iy$ بالإضافة الى (x, y). عندما يستخدم المستوي xy بهذه الطريقة لرسم الاعداد العقدية، فأنه يسمى **بالمستوي العقدي** حيث يكون x يمثل المحور الحقيقي وy المحور الخيالي.



الشكل(١)



الشكل(٢)

عندما يكتب العدد العقدي بالصيغة $z = x + iy$، نقول انه بالصيغة الكارتزية (التعامدية لأن x وy هي الاحداثيات المتعامدة للنقطة التي تمثل العدد في المستوي العقدي). في الهندسة التحليلية، يمكننا تعيين موضع النقطة بإعطاء احداثياتها القطبية (الاسطوانية)(r, θ) بدلاً من احداثياتها الكارتزية (x, y) كما في الشكل(٢).

$$x = r\ \cos\theta\,, \qquad y = r\sin\theta \qquad r \geq 0 \qquad\qquad (4)$$

حيث ان $r \geq 0$, وان r, θ الاحداثيين القطبيين للنقطة (x, y) المقابلة للعدد العقدية $z = x + iy$. يمثل r **طول العدد العقدي** z ويكون

$$r = |z|$$

او ان

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(Re\{z\})^2 + (Im\{z\})^2}$$

مثال: جد قيمة r للأعداد العقدية التالية:

١- $z = 5 + 10i$
٢- $z = 3 - 2i$
٣- $z = -3$
٤- $z = 2i$

الحل: يمكن استخراج قيمة r من الصيغة الرياضية التالية:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(Re\{z\})^2 + (Im\{z\})^2}$$

1- $r = |z| = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125}$
2- $r = |z| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$
3- $r = |z| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$
4- $r = |z| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$

اما الزاوية θ التي يصنعها متجه العدد العقدي z مع المحور الحقيقي باتجاه الموجب (بعكس اتجاه عقرب الساعة) وتسمى **بزاوية العدد العقدي** او الزاوية القطبية ويرمز لها بالرمز $arg\{z\}$ (او تسمى سعة او طور او الازاحة الزاوية للعدد العقدي). ومن المعادلة (4) نكتب العدد العقدي بالصيغة:

$$z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (5)$$

ان المعادلة (5) تسمى **الصيغة القطبية** للعدد العقدي.

يمكن استخراج زاوية العدد العقدي من خلال المعادلة (4):

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (6)$$

ان الصيغة الرياضية لعلاقة اويلر تعطى بالعلاقة التالية:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

وبالتالي يمكن كتابة العدد العقدي في المعادلة (5) باستخدام صيغة اويلر **بالصيغة الاسية** كما في الشكل التالي:

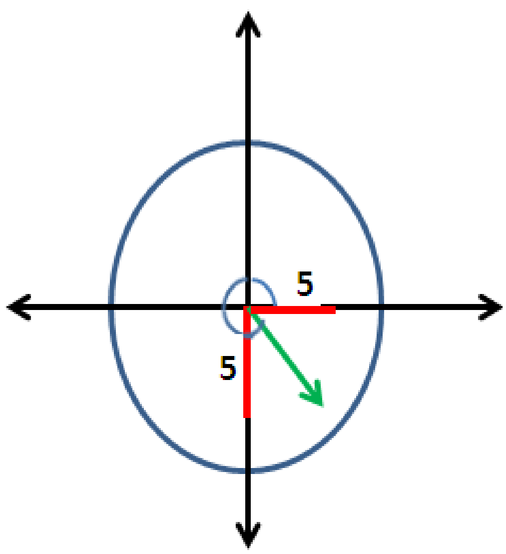
$$z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} \qquad (7)$$

مثال: جد الصيغة القطبية والآسية للعدد العقدي من الصيغة الكارتيزية $z = 5 - i5$ مع الرسم.

الحل:

اولاً: نقوم بتعين الجزء الحقيقي والخيالي في المستوي العقدي. ان الجزء الحقيقي موجب والخيالي سالب فأن العدد العقدي z يقع في الربع الرابع للمستوي العقدي

ثانياً: نستخرج قيم r من خلال المعادلة التالية:



$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(Re\{z\})^2 + (Im\{z\})^2}$$

$$r = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

ثالثاً: نستخرج الزاوية θ من خلال العلاقة التالية:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{-5}{5}\right)$$

$$= \tan^{-1}(-1) = \frac{7\pi}{4}$$

ان قيمة الزاوية θ بالنصف قطرية ، لذلك فأن الصيغة القطبية والآسية للعدد العقدي تكون بالشكل التالية:

$$z = 5\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) = 5\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

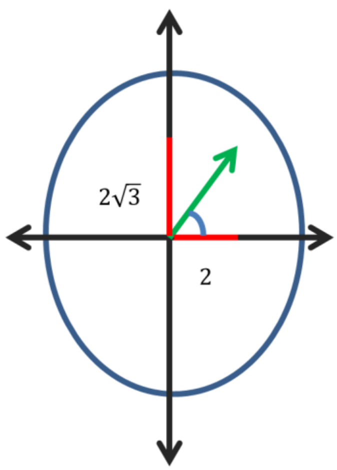
مثال: جد الصيغة القطبية والآسية للعدد العقدي من الصيغة الكارتيزية $z = 2 + i2\sqrt{3}$ مع الرسم.

الحل:

اولاً: نقوم بتعين الجزء الحقيقي والخيالي في المستوي العقدي. العدد العقدي z يقع في الربع الاول للمستوي العقدي.

ثانياً: نستخرج قيم r من خلال المعادلة التالية:

$$r = |z| = \sqrt{4 + 12} = 4$$



ثالثاً: نستخرج الزاوية θ من خلال العلاقة التالية:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

لذلك فأن الصيغة القطبية للعدد العقدي تكون بالشكل التالية:

$$z = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$$

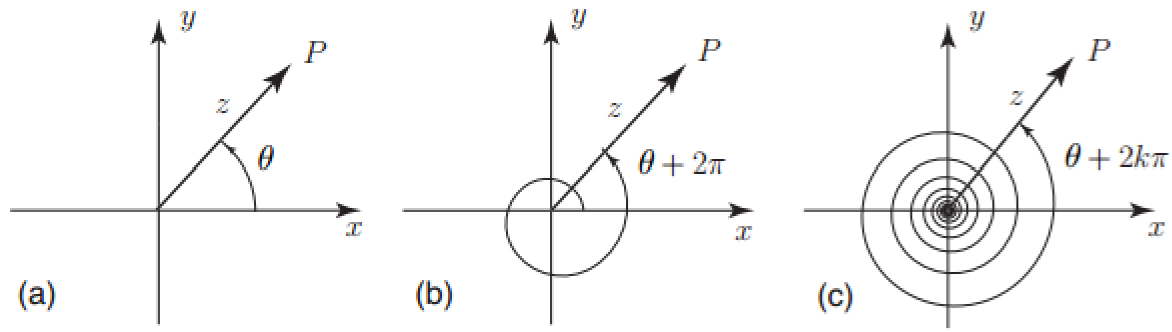
تمارين

١- جد الصيغة القطبية والآسية للعدد العقدي من الصيغة الكارتيزية $\mathrm{z} = -5 + 5\mathrm{i}$ مع الرسم.

٢- جد الصيغة القطبية والآسية للعدد العقدي من الصيغة الكارتيزية $\mathrm{z} = -\sqrt{6} - \sqrt{2}\mathrm{i}$ مع الرسم.

٣- جد الصيغة القطبية والآسية للعدد العقدي من الصيغة الكارتيزية $\mathrm{z} = -3\mathrm{i}$ مع الرسم.

ملاحظة: لأي عدد عقدي $z \neq 0$ توجد فقط قيمة واحدة للسعة θ في الفترة $0 \leq \theta \leq 2\pi$. في الشكل ادناه الزاوية θ التي صنعها z مع المحور الموجب كما في الشكل a. لذلك وكما في الشكل b نرى انه يمكن اضافة 2π او 360^0 ونحصل على نفس z في المستوي xy. في العموم، وكما مبين في الشكل c اي مضاعف صحيح من 2π يمكن اضافته الى او طرحه من θ بدون ان يؤثر على الصيغة الكارتيزية للعدد المعقد.



الشكل(٣).

على سبيل المثال

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$ الصيغة القطبية

ومع ذلك يمكن كتابة الصيغة اعلاه بالصورة المكافئة التالية:

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right)\right)$$

او بصورة اعم:

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right) \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots\dots$$

حيث ان k هو عدد صحيح. ان الصيغة الاخيرة تبين بأن الصيغة القطبية للعدد العقدي z ، $arg\,\{z\}$، يمكن ان تأخذ عدد غير محدد من القيم، كل قيمة تختلف عن الاخرى بـ $2k\pi$ وبالتالي:

$$arg\{z\} = Arg\{z\} + 2k\pi$$

هذا ليس اكثر من نتيجة لخواص الدوال المثلثية لأي عدد صحيح k :

$$\cos(\theta + 2k\pi) \equiv \cos(\theta) \quad , \quad \sin(\theta + 2k\pi) \equiv \sin(\theta),$$

بصورة عامة فأن المعادلة (8) تصبح:

$$z = r\,(\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)) = re^{i(\theta + 2k\pi)} \qquad (8)$$

مثال:

$$\sqrt{3}+i=2\,cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+2i\,sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\,cos\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)+2i\,sin\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)$$

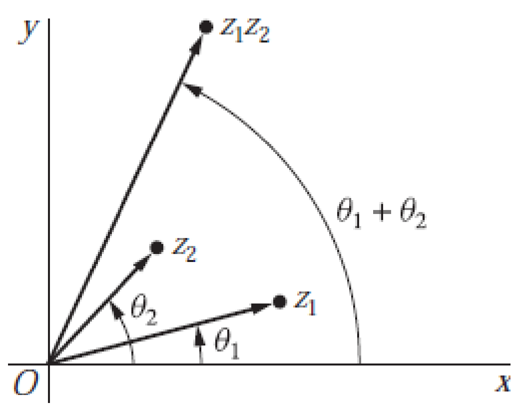
مثال:

$$-\sqrt{3}-i=2\,cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+2i\,sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=2\,cos\left(\frac{7\pi}{6}+2k\pi\right)+2i\,sin\left(\frac{7\pi}{6}+2k\pi\right)$$

ضرب وقسمة الاعداد العقدية بالصيغة القطبية والأسية

اذا كان z_1 و z_2 هما عددان عقديان لهما الصيغ القطبية التالية:

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$$
$$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$



اولاً :سنجد حاصل ضرب العددين z_1 و z_2

$$z_1z_2=[r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)][r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)]$$

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos\theta_1\cos\theta_2+i\cos\theta_1\sin\theta_2+i\sin\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2]$$

$$z_1z_2=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]$$

باستخدام المتطابقات المثلثية:

$$\cos(\theta_1+\theta_2)=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2$$

$$\sin(\theta_1+\theta_2)=\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2$$

اذن

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

ومنها نحصل

$$arg\{z_1z_2\}=arg\{z_1\}+arg\{z_2\}=\theta_1+\theta_2$$

وبدلالة صيغة اويلر $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ فأن

$$z_1z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

ثانياً: سنجد قسمة العددين العقديين

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left[\frac{(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}\frac{(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left[\frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2}\right]$$

لدينا

$$\cos(\theta_1-\theta_2)=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2$$

$$\sin(\theta_1-\theta_2)=\cos\theta_1\sin\theta_2-\sin\theta_1\cos\theta_2$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

ومنها نحصل

$$arg\left\{\frac{z_1}{z_2}\right\}=arg\{z_1\}-arg\{z_2\}=\theta_1-\theta_2$$

مثال: جد $arg\{z_1z_2\}$، اذا علمت بأن $z_1=-1$ و $z_2=i$

الحل:

$$arg\{z_1z_2\} = arg\{z_1\} + arg\{z_2\} = \theta_1 + \theta_2 = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

مثال: جد $arg\left\{\frac{z_1}{z_2}\right\}$، اذا علمت بأن الصيغ الكارتزية لكل من z_1 و z_2 هي: $z_1 = -2$ و

$z_2 = 1 + \sqrt{3}i$

الحل:

$$arg\left\{\frac{z_1}{z_2}\right\} = arg\{z_1\} - arg\{z_2\} = \theta_1 - \theta_2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

مثال: جد بالإحداثيات الكارتزية z_1z_2 و $\frac{z_1}{z_2}$، اذا علمت بأن الصيغ القطبية لكل من z_1 و z_2 هي:

$$z_2 = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \text{ و } z_1 = 12\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

الحل:

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)] = 48\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$z_1z_2 = 48[\cos(\pi) + i\sin(\pi)] = -48 + 0i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)] = \frac{12}{4}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = 0 + 3i$$

تمرين: جد $arg\{z_1z_2\}$ و $arg\left\{\frac{z_1}{z_2}\right\}$ و z_1z_2 و $\frac{z_1}{z_2}$ بالصيغة القطبية ، اذا علمت بأن الصيغ الكارتزية لكل من z_1 و z_2 هي:

$$z_2 = 1 + \sqrt{3}i \text{ و } z_1 = 8i$$

نظرية دي موفر De Moivre's theorem

اذا كان z و w عددين عقديين

$$z = r\ \cos\theta + ir\sin\theta$$

و

$$w = t\cos\varphi + it\sin\varphi$$

عندئذ حاصل ضرب zw

$$zw = (r\cos\theta + ir\sin\theta)(t\cos\varphi + it\sin\varphi)$$

$$= rtcos\theta\cos\varphi + irt\ cos\theta\sin\varphi + irt\sin\theta\cos\varphi - rt\sin\theta\sin\varphi$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية:

$$\cos(\theta+\varphi) = cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$$

$$\sin(\theta+\varphi) = cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi$$

يكون

$$zw = rt\ [\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)]$$

وكنتيجة من حاصل ضرب zw

$$arg\{zw\} = arg\{z\} + arg\{w\} = \theta + \varphi$$

لحالة خاصة: اذا كان $r = 1,\ t = 1$ و $\theta = \varphi$ بمعنى $z = w = \cos\theta + i\sin\theta$

نحصل

$$z^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta) \qquad eq(a)$$

لكن

$$z^2 = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 \qquad eq(b)$$

من المعادلتين $eq(a)$ و $eq(b)$

$$z^2 = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$$

لو ضربنا كلا الطرفين في المعادلة اعلاه بـ $\cos\theta + i\sin\theta$ ، نحصل:

$$z^3 = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$$

لو ضربنا كلا الطرفين في المعادلة اعلاه ب $\cos\theta + i\sin\theta$ وباستخدام المتطابقة المثلثية اعلاه، نحصل:

$$z^4 = (\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos(4\theta) + i\sin(4\theta)$$

لعدد معين من عمليات الضرب p نحصل

$$z^p = (\cos\theta + i\sin\theta)^p = \cos(p\theta) + i\sin(p\theta)$$

حيث p عدد صحيح. في الحقيقة هذه النتيجة يمكن ان تصح للحالات التي يكون فيها عدد p صحيح سالب ايضاً او عدد منطقي مثل $\frac{1}{2}$. هذه النتيجة تسمى **نظرية دي موفر**.

مثال: باستخدام نظرية دي موفر للأعداد المعقدة بالصيغة القطبية ، جد الصيغة الكارتيزية لـ $z^8 = (1+i)^8$.

الحل: لغرض استخراج الصيغة القطبية نتبع:

اولاً: نستخرج قيم r من خلال المعادلة التالية:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$$

ثانياً: نستخرج الزاوية θ من خلال العلاقة التالية:

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

وبالتالي

$$z = 1 + i = r\,(\cos\theta + i\sin\theta) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

نستخدم نظرية دي موفر:

$$(1+i)^8 = \left[\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]^8 = \left(\sqrt{2}\right)^8\left(\cos\left(8\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(8\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$(1+i)^8 = 16(\cos(2\pi) + i\sin(2\pi))$$

$$(1+i)^8 = 16(1 + i0)$$

$$(1+i)^8 = 16 + i0$$

مثال: باستخدام نظرية دي موفر للأعداد المعقدة بالصيغة القطبية ، جد الصيغة الكارتيزية لـ $z^{10} = \left(-1+\sqrt{3}i\right)^{10}$.

الحل:

اولاً: نستخرج قيم r من خلال المعادلة التالية:

$$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = 2$$

ثانياً: نستخرج الزاوية θ من خلال العلاقة التالية:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$$

نكتب $-1+\sqrt{3}i$ بالصيغة $r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ من خلال:

$$-1+\sqrt{3}i = r\,(\cos\theta + i\sin\theta) = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

نستخدم نظرية دي موفر:

$$\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{10} = \left[2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)\right]^{10} = (2)^{10}\left(\cos\left(10\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(10\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{10} &= 1024\left(\cos\left(\frac{20\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{20\pi}{3}\right)\right) = 1024\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}+6\pi\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}+6\pi\right)\right)\\ &= 1024\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)\end{aligned}$$

$$\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{10} = 1024(-0.5+0.866i)$$

تمارين

١- باستخدام نظرية دي موفر للأعداد المعقدة بالصيغة القطبية ، جد الصيغة الكارتيزية لـ $z^{15} = (1+i)^{15}$.

٢- باستخدام نظرية دي موفر للأعداد المعقدة بالصيغة القطبية ، جد الصيغة الكارتيزية لـ $z^7 = \left(1+\sqrt{3}i\right)^7$.

استخراج جذور العدد المعقد حسب نظرية دي موفر

سوف نرى كيف يمكننا ان نستخدم التعميم لزاوية العدد المعقد في ايجاد جذور العدد المعقد باستخدام نظرية دي موفر:

مثال: جد جذور العدد العقدي باستخدام نظري دي موفر $z^3 = 8$.

الحل:

$$8 = 8(\cos(0) + isin(0))$$

نتوقع ثلاثة جذور لـ z تحقق المعادلة التكعيبية. هكذا اعادة ترتيب، الان نكتب الجانب الايمن كعدد معقد بالصيغة القطبية:

$$z^3 = 8(\cos(0) + i\sin(0))$$

لو استخدمنا تعميم زاوية العدد المعقد من خلال اضافة مضروب صحيح اعتباطي من 2π. سوف نحصل على التعبير المعدل التالي:

$$z^3 = 8(\cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi)) \quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3\pm, \dots \dots$$

الان نأخذ الجذر التكعيبي لكلا الطرفين

$$z = \sqrt[3]{8}(\cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi))^{\frac{1}{3}}$$

باستخدام نظرية دي موفر نحصل

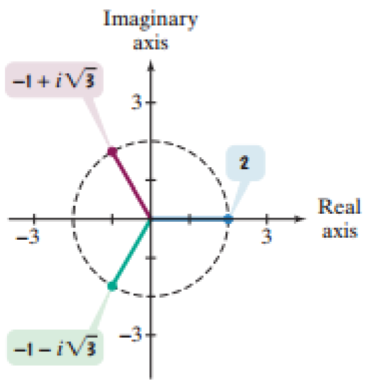
$$z = \sqrt[3]{8}(\cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi))^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right)$$

الاجراء الطبيعي يكون بأخذ ثلاثة قيم لـ k هي $0,1,2$. اي قيمة اخرى لـ k ستقود الى جذر يكون مكرر الى احد الجذور الثلاثة لقيم k اعلاه:

$$k = 0 \qquad z_0 = 2(\cos(0) + i\sin(0)) = 2$$

$$k = 1 \qquad z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -1 + i\sqrt{3}$$

$$k = 2 \qquad z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = -1 - i\sqrt{3}$$



اذن هنالك ثلاثة قيم (معقدة) لـ $8^{\frac{1}{3}}$. لو عوضنا الجذور في $z^3 = 8$ لحصلنا على ان الطرف الايسر يساوي الطرف الايمن :

$$(-1-i\sqrt{3})^3 = 8 \qquad \text{و} \qquad (-1+i\sqrt{3})^3 = 8 \qquad \text{و} \qquad 2^3 = 8$$

مثال: جد جذور العدد العقدي باستخدام نظري دي موفر $z^3 = i$.

الحل :

$$z^3 = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

لو استخدمنا تعميم زاوية العدد المعقد من خلال اضافة مضروب صحيح اعتباطي من 2π. سوف نحصل على التعبير المعدل التالي:

$$z^3 = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right) \quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3\pm, \dots\dots$$

الان نأخذ الجذر التكعيبي لكلا الطرفين

$$z = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)^{\frac{1}{3}}$$

باستخدام نظرية دي موفر نحصل

$$z = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)^{\frac{1}{3}} = 1\left(\cos\left(\frac{\pi+4k\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+4k\pi}{6}\right)\right)$$

الاجراء الطبيعي يكون بأخذ ثلاثة قيم لـ k هي 0,1,2 . اي قيمة اخرى لـ k ستقود الى جذر يكون مكرر لاحد الجذور الثلاثة لقيم k اعلاه:

$$k=0 \qquad z_0 = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$k=1 \qquad z_1 = 1\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$k=2 \qquad z_2 = 1\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = -i$$

مثال: جد جذور العدد العقدي باستخدام نظري دي موفر $z^2 = 1 + i$.

الحل : المطلوب ايجاد جميع الجذور $z = (1+i)^{\frac{1}{2}}$.

نقوم اولاً بإيجاد قيمة r من خلال المعادلة التالية:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(Re\{z\})^2 + (Im\{z\})^2} = \sqrt{2}$$

ومن ثم باستخدام المعادلة التالية نستخرج θ:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$z^2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

لو استخدمنا تعميم زاوية العدد المعقد من خلال اضافة مضروب صحيح اعتباطي من 2π. سوف نحصل على التعبير المعدل التالي:

$$z^2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right) \quad k = 0, \pm 1,$$

الان نأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

$$z = (\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

باستخدام نظرية دي موفر نحصل

$$z = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi + 8k\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 8k\pi}{8}\right)\right)$$

الاجراء الطبيعي يكون بأخذ قيمتان لـ k هي 0,1 . اي قيمة اخرى لـ k ستقود الى جذر يكون مكرر الى احد الجذرين لقيم k اعلاه:

$$k = 0 \qquad z_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) = 1.099 + 0.455i$$

$$k = 1 \qquad z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)\right) = -1.099 - 0.455i$$

تمارين

جد جذور العدد العقدي باستخدام نظري دي موفر **لكل مما يأتي:**

١- $z^2 = \sqrt{3} + 3i$.

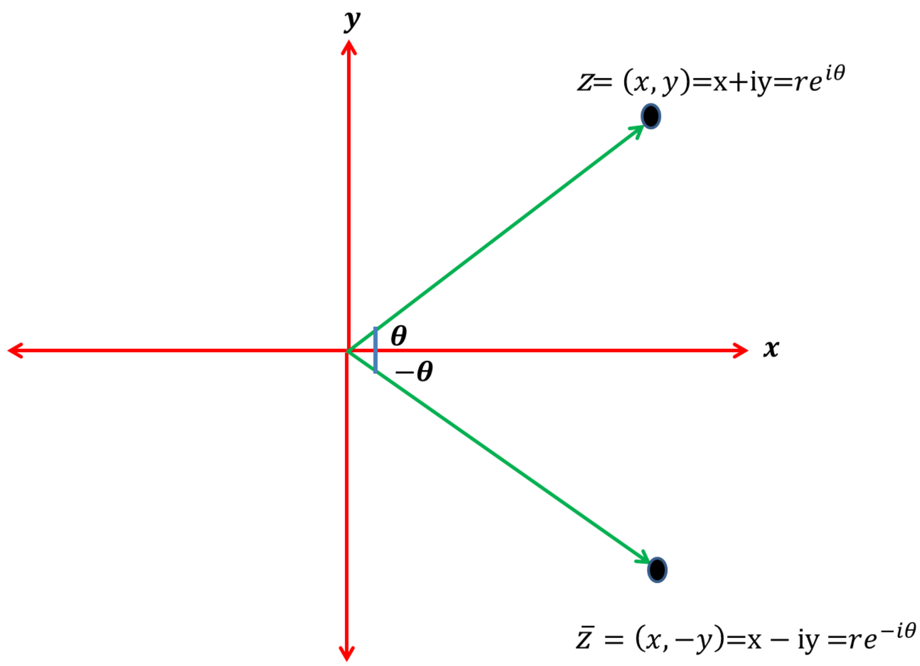
٢- $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$.

٣- $z^4 = -4$.

٤- $z^3 = -8i$.

المترافق المعقد للعدد العقدي Complex Conjugate

اذا كان $z = x + iy$ ، فأن المترافق المعقد للعدد العقدي z والذي يرمز له بالرمز $\bar{z}$ يكون $\bar{z} = x - iy$. يمثل $\bar{z}$ هندسياً بالنقطة $(x, -y)$ و هو انعكاس بالنسبة الى المحور الحقيقي x وكما بالشكل ادناه:



الشكل(٤).

ان زوج النقاط (x, y) و $(x, -y)$ في المستوي العقدي هي صورة مرآة لكل منهما حيث ان x هو المرآة كما في الشكل اعلاه. لذا فأن z و $\bar{z}$ بالصيغة القطبية لهما نفس قيمة r ، لكن قيمة θ هي سالب احدهما الاخر. فاذا كتبنا :

$$z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

فأن

$$\bar{z} = r\,(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = re^{-i\theta}$$

ان مرافق كل عدد حقيقي $z = x + i0$ هو العدد نفسه.

$$\bar{z} = \overline{x + i0} = x - i0 = z$$

اما اذا كان $z = 0 + iy$ عدد تخيلي صرف، فأن مرافقه المعقد هو $-z$

$$\bar{z} = \overline{0 + iy} = 0 - iy = -z$$

اذا كان $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ فأن:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

$$\overline{z_1 + z_2} = x_1 + x_2 - i(y_1 + y_2) = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

وبنفس الطريقة يمكن ان نبرهن على ان

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$$

$$\overline{z_1 - z_2} = x_1 - x_2 - i(y_1 - y_2) = (x_1 - iy_1) - (x_2 - iy_2) = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

اما بالنسبة الى $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ فيكون:

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)} = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1) = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

بالنسبة الى $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_1 - iy_1}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1x_2 - ix_1y_2 + ix_2y_1 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} - i\,\frac{(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \qquad eq(1)$$

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{x_1 - iy_1}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1 - iy_1}{x_2 - iy_2} \cdot \frac{x_2 + iy_2}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + ix_1y_2 - ix_2y_1 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} - i\,\frac{(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \qquad eq(2)$$

من المعادلات ١ و ٢ نحصل على المساواة.

ان حاصل جمع العدد المعقد والمترافق المعقد هو $z + \bar{z} = 2x$ وحاصل طرحهما هو $z - \bar{z} = 2iy$

، وبالتالي فأن الجزء الحقيقي والخيالي بدلالة كل من العدد العقدي والمترافق المعقد يكون:

$$Re\{z\} = x = \frac{z+\bar{z}}{2}$$

$$Im\{z\} = y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

اما ناتج حاصل ضربهما $z\bar{z}$ فيكون

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = \bar{z}z = |z|^2$$

ومنها نجد ان

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = |\bar{z}|$$

تمرين: افرض ان $z = 4+3i$ و $\bar{z} = 4-3i$ جد الجزء الحقيقي والخيالي لهما:

مثال بسط (جد ناتج) $\left|\frac{(3+4i)\overline{(2-i)}}{1+3i}\right|$ حيث ان $|z| = |\bar{z}|$

الحل:

$$\left|\frac{(3+4i)\overline{(2-i)}}{1+3i}\right| = \frac{|3+4i||(2-i)|}{|1+3i|} = \frac{\sqrt{9+16}\sqrt{4+1}}{\sqrt{1+9}} = \frac{\sqrt{25}\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{25}{2}}$$

مثال: بسط (جد ناتج) $(2+i)\overline{(1+3i)} - 2 + 4i$.

الحل:

$$(2+i)\overline{(1+3i)} - 2 + 4i = (2+i)(1-3i) - 2 + 4i$$

$$= 2 - 6i + i + 3 - 2 + 4i = 3 - i$$

مثال: افرض ان $z_1 = 4+3i$ و $z_2 = 2+5i$ ، اثبت أن :

1. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
2. $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
3. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

ثم جد الجزء الحقيقي والخيالي للعدد المعقد z_1 بدلالته والمترافق المعقد له.

الحل:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{(4+3\imath) + (2+5\imath\,)} = (4-3i) + (2-5i\,)$$

$$\overline{6+8\imath} = 6-8i$$

$$6-8i = 6-8i$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

$$\overline{(4+3\imath) - (2+5\imath\,)} = (4-3i) - (2-5i\,)$$

$$\overline{2-2\imath} = 2+2i$$

$$2+2i = 2+2i$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(4+3\imath)(2+5\imath\,)} = \overline{(-7+26\imath)} = -7-26i$$

$$\bar{z}_1 \bar{z}_2 = (4-3i)(2-5i\,) = -7-26i$$

$$Re\{z_1\} = \frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{(4+3i\,)+(4-3i)}{2} = 4$$

$$Im\{z_1\} = \frac{z-\bar{z}}{2i} = \frac{(4+3i\,)-(4-3i)}{2i} = 3$$

مثال: جد $(\overline{z_3})^4$ اذا علمت بأن $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

الحل:

$$(\overline{z_3})^4 = \left(\overline{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\imath}\right)^4 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4 = \left[\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2\right]^2$$

$$= \left[\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4}i^2\right]^2 = \left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right]^2 = \left[\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4}i^2\right] = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

الجذر التربيعي للعدد المعقد Square root of complex number

الان يمكننا أن نستخرج الجذر التربيعي للعدد المعقد، لو فرضنا ان العدد $z = a + ib$ ، فأننا نبحث عن جذور العدد $X = x + iy$ بحيث ان $X^2 = z$:

$$X^2 = (x + iy)^2 = z = a + ib \qquad \dots\dots (1a)$$

$$(x^2 - y^2) + 2ixy = a + ib \qquad \dots\dots (1b)$$

من (1b) نجد ان

$$x^2 - y^2 = a \qquad \dots\dots (2)$$

$$2xy = b \qquad \dots\dots (3)$$

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 \qquad \dots\dots (4)$$

من المعادلات (2) و (3) و (4) نحصل على:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \dots\dots (5)$$

بجمع المعادلتين (2) و (5)

$$2x^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$x^2 = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right) \qquad \dots\dots (6a)$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)} \qquad \dots\dots (6b)$$

بطرح المعادلتين (2) و (5)

$$2y^2 = -a + \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$y^2 = \frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right) \qquad \dots\dots(7a)$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)} \qquad \dots\dots(7b)$$

هذه النتائج كانت تحصيلاً لحل المعادلتين (2) و (5) ، ولكن قد تؤدي إلى حل لا يحقق جميع المعادلات ، ولذلك فإن المعادلة (3) ($2xy = b$) يجب أن تؤخذ بنظر الاعتبار عند ايجاد الحل العام. وبالتالي سوف نناقش الحالتين التاليتين:

الحالة الاولى: عندما $b \neq 0$

أ) $b > 0$ فإن x و y يجب أن يحملان نفس الاشارة.

ب) $b < 0$ فإن x و y يجب أن يحملان اشارتين مختلفتين.

بجذر المعادلة $(1a)$ وتعويض المعادلتان $(6b)$ و $(7b)$

$$X_{1,2} = \sqrt{a + ib} = x + iy = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)}\right) \qquad for \quad b > 0$$

$$X_{1,2} = \sqrt{a - ib} = x - iy = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)} - i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)}\right) \qquad for \quad b < 0$$

الحالة الثانية: عندما $b = 0$

$$X^2 = a$$

$$X_{1,2} = \pm\sqrt{a} \qquad for \quad a > 0$$

$$X_{1,2} = \pm i\sqrt{a} \qquad for \quad a < 0$$

الحالة الثالثة: عندما $a = b = 0$

$$X_{1,2} = 0$$

مثال: حل (جد الجذر التربيعي) المعادلة التالية: $X^2 = -i$

الحل:

$$a = 0, \qquad b = -1 \qquad , b < 0$$

بما ان $b < 0$ نستخدم العلاقة التالية:

$$X_{1,2} = \sqrt{a - ib} = x - iy = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)} - i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)}\right)$$

وبالتالي فأن الجذرين الخياليين هما: $X_1 = +\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ و $X_2 = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

مثال: حل (جد الجذر التربيعي) المعادلة التالية: $X^2 = -5 + 12i$

الحل:

$$a = -5, \qquad b = 12 \qquad , b > 0$$

بما ان $b > 0$ نستخدم العلاقة التالية:

$$X_{1,2} = \sqrt{a + ib} = x + iy = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)}\right)$$

$$X_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(-5 + \sqrt{25 + 144}\right)} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left(5 + \sqrt{25 + 144}\right)}\right)$$

$$X_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}(-5 + 13)} + i\sqrt{\frac{1}{2}(5 + 13)}\right) = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}(8)} + i\sqrt{\frac{1}{2}(18)}\right) = \pm(2 + 3i)$$

وبالتالي فأن الجذرين الخياليين هما: $X_1 = +(2 + 3i)$ $X_2 = -(2 + 3i)$

مثال: جد الجذر التربيعي للعدد العقدي $X^2 = \frac{-1+5i}{2+3i}$.

الحل: نجد حاصل القسمة من خلال الخطوات التالية:

$$\frac{-1+5i}{2+3i}=\frac{-1+5i}{2+3i}\frac{2-3i}{2-3i}=\frac{13+13i}{4+9}=1+i$$

بما ان $b>0$ نستخدم العلاقة التالية:

$$X_{1,2}=\sqrt{a+ib}=x+iy=\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}+i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right)$$

$$X_{1,2}=\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+1}\right)}+i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1+1}\right)}\right)$$

$$X_{1,2}=\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)}+i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{2}\right)}\right)$$

$$X_1=\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)}+i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{2}\right)}\right)$$

$$X_2=-\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)}+i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{2}\right)}\right)$$

معادلات متعدد الحدود Polynomial Equations

في الرياضيات، المعادلات الحدودية أو معادلات متعددات الحدود Polynomial equations هي معادلات تأخذ الشكل التالي:

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + \cdots + a_1 X + a_0 = 0$$

حيث $a_i,$ معاملات المعادلة، والهدف هو إيجاد جميع قيم المجهول x. ونقول أن كثير الحدود من الدرجة الأولى إذا كانت أعلى قوة لـ X تظهر في المعادلة هي واحد. وهي من الدرجة الثانية إذا كانت أعلى قوة لـ X هي اثنين وهكذا. إذن نقول أن كثيرة الحدود من الدرجة n إذا كانت أعلى قوة لـ X هي n. وتقول المبرهنة الأساسية في الجبر أن لكل معادلة حدودية من الدرجة n يوجد عدد n من الحلول (ذلك إذا احتسبنا الحلول المكررة أي التي يجب أن نعدها مرتين). كما تجدر الإشارة إلى أن كل معادلة حدودية ذات معاملات تنتمي إلى الأعداد الحقيقية إن كان لها حلول تنتمي إلى الأعداد المعقدة فإن هذه الحلول تكون دائما مترافقة أي أنه يكون دائما هناك حل في شكل $a + ib$ وآخر في شكل $a - ib$.

أولاً لنفرض ان لدينا معادلة من الدرجة الثانية: $aX^2 + bX + c = 0$ ، لكي نجد جذور العدد X نتبع الآتي:

بنقل c الى الطرف الاخر والقسمة على a الذي لا يساوي الى الصفر نحصل على

$$X^2 + \frac{b}{a}X = -\frac{c}{a}$$

نستخدم طريقة اكمال المربع، بإضافة $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ الى طرفي المعادلة اعلاه

$$X^2 + \frac{b}{a}X + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$X + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

وبالتالي نحصل على

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال: حل المعادلة $X^2 + (2i - 3)X + (5 - i) = 0$.

الحل: باستخدام طريقة الدستور:

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(2i - 3) \pm \sqrt{(2i - 3)^2 - 4(5 - i)}}{2}$$

$$X_{1,2} = \frac{-2i + 3 \pm \sqrt{-4 - 12i + 9 - 20 + 4i}}{2} = \frac{3 - 2i \pm \sqrt{-15 - 8i}}{2}$$

الان نحاول ان نجد الجذرين $\sqrt{-15 - 8i}$ من خلال المعادلة التالية:

$$X_{1,2} = \sqrt{a - ib} = x - iy = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)} - i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)}\right) \quad for \quad b < 0$$

$$X_{1,2} = \sqrt{-15 - i8} = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(-15 + \sqrt{225 + 64}\right)} - i\sqrt{\frac{1}{2}\left(15 + \sqrt{225 + 64}\right)}\right)$$

$$X_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(-15 + \sqrt{289}\right)} - i\sqrt{\frac{1}{2}\left(15 + \sqrt{289}\right)}\right)$$

$$X_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}(-15 + 17)} - i\sqrt{\frac{1}{2}(15 + 17)}\right) = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}(2)} - i\sqrt{\frac{1}{2}(32)}\right) = \pm(1 - 4i)$$

وبالتالي فأن جذري $\pm\sqrt{-15 - 8i}$ هما $\pm(1 - 4i)$ وبالتالي:

$$X_{1,2} = \frac{3 - 2i \pm \sqrt{-15 - 8i}}{2} = \frac{3 - 2i \pm (1 - 4i)}{2}$$

وبالتالي فأن الجذرين الخياليين هما: $X_1 = 2 - 3i$ و $X_2 = 1 + i$.

اما بالنسبة الى معادلات متعددة الحدود من الرتب العالية فنتبع الطرق الموضحة في الأمثلة التالية:

مثال: جد الجذور الحقيقية والمعقدة المترافقة لمعادلة متعددة الحدود التالية:

$$6X^4-25X^3+32X^2+3X-10=0$$

الحل: نأخذ العوامل الاولية لكل من المعاملات $a_4=6$ و $a_0=-10$ وتكون:

عوامل $a_4=6$ هي $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$ وعوامل $a_0=-10$ هي $\pm1,\pm2,\pm5,\pm10$. نقسم عوامل a_0 على a_4 على شرط ان لا يكون هنالك قاسم مشترك بين العوامل ما عدا ±1 فنحصل على الحلول الجذرية الحقيقية الممكنة:

$$\pm1,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{3},\pm\frac{1}{5},\pm\frac{1}{6},\pm2,\pm\frac{2}{3},\pm5,\pm\frac{5}{2},\pm\frac{5}{3},\pm\frac{5}{6},\pm10,\pm\frac{10}{3}$$

نجرب الحلول الجذرية الحقيقية في المعادلة متعددة الحدود، نختار فقط الحلول الجذرية التي تجعل المعادلة تساوي الصفر. من خلال ذلك نجد ان $X_1=-\frac{1}{2}$ و $X_2=\frac{2}{3}$ **هما الجذران الحقيقيان لمعادلة متعدد الحدود.** نعمل على ايجاد الجذور الخيالية من خلال القسمة الطويلة:

	$6X^4$	$-25X^3$	$+32X^2$	$+3X$	-10
$-\frac{1}{2})\times$	6	-25	32	3	-10
		-3	14	-23	10
$\frac{2}{3})\times$	6	-28	46	-20	0
		4	-16	20	
	6	-24	30	0	

نرى ان ناتج القسمة يقبل القسمة على 6 وبالتالي نحصل على

$$1 \qquad -4 \qquad 5$$

وبالتالي:

$$6X^4-25X^3+32X^2+3X-10=(2X+1)(3X-2)(X^2-4X+5)$$

الان نستخدم طريقة الدستور لإيجاد جذور (X^2-4X+5)

$$X_{3,4} = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = 2 \pm i$$

اذن الحلول هي $X_1 = -\frac{1}{2}$ و $X_2 = \frac{2}{3}$ و $X_3 = 2+i$ و $X_4 = 2-i$

مثال: أوجد الجذور الخيالية للمعادلة $X^4 - 5X^2 - 10X - 6 = 0$ اذا علمت بأن الجذور الحقيقية هي -1 و3.

الحل: نعمل على ايجاد الجذور الخيالية من خلال القسمة الطويلة:

$-1) \times$	1	0	-5	-10	-6
		-1	1	4	6
$3) \times$	1	-1	-4	-6	0
		3	6	6	
	1	2	2	0	

وبالتالي فأن

$$X^4 - 5X^2 - 10X - 6 = 0 = (X+1)(X-3)(X^2+2X+2)$$

المعادلة (X^2+2X+2) من الدرجة الثانية ، لذلك نستخدم طريقة الدستور لغرض استخراج الجذور الخيالية:

$$X_{3,4} == \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$$

اذن الحلول هي $X_1 = -1$ و $X_2 = 3$ و $X_3 = -1+i$ و $X_4 = -1-i$

مثال: أوجد الجذر التربيعي للمعادلة $2X^4 - 3X^3 - 7X^2 - 8X + 6 = 0$ اذا علمت بأن الجذور الحقيقية هي $\frac{1}{2}$ و 3.

الحل: نعمل على ايجاد الجذور الخيالية من خلال القسمة الطويلة:

$\frac{1}{2}) \times$	2	-3	-7	-8	6
		1	-1	-4	-6
$3) \times$	2	-2	-8	-12	0
		6	12	12	
	2	4	4	0	

وبالتالي فأن

$$2X^4 - 3X^3 - 7X^2 - 8X + 6 = 0 = (2X - 1)(X - 3)(2X^2 + 4X + 4)$$

المعادلة $(2X^2 + 4X + 4)$ من الدرجة الثانية ، لذلك نستخدم طريقة الدستور لغرض استخراج الجذور الخيالية ، حيث نقسم طرفي المعادلة على 2 لنحصل على $(X^2 + 2X + 2)$:

$$X_{3,4} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$$

اذن الحلول هي $X_1 = \frac{1}{2}$ و $X_2 = 3$ و $X_3 = -1 + i$ و $X_4 = -1 - i$

مثال: أوجد الجذر التربيعي للمعادلة $X^3 - 7X^2 + 19X - 13 = 0$ اذا علمت بأن الجذر الحقيقي هو 1

الحل: نعمل على ايجاد الجذور الخيالية من خلال القسمة الطويلة:

$1) \times$	1	-7	19	-13
		1	-6	13
	1	-6	13	0

وبالتالي فأن

$$X^3 - 7X^2 + 19X - 13 = 0 = (X - 1)(X^2 - 6X + 13)$$

المعادلة $(X^2 - 6X + 13)$ من الدرجة الثانية ، لذلك نستخدم طريقة الدستور لغرض استخراج الجذور الخيالية :

$$X_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{36-52}}{2} = 3 \pm 2i$$

اذن الحلول هي $X_1 = 1$ و $X_2 = 3 + 2i$ و $X_3 = 3 - 2i$