المتسلسلات ذات الحدود الموجبة Series with positive terms

في المواضيع السابقة، درسنا المتسلسلات الهندسية وبعض المتسلسلات التي يمكن معالجتها باستخدام الكسور الجزئية، الا ان هذه المتسلسلات تمثل نسبة قليلة جداً من المتسلسلات التي سنتناولها والتي يستحيل ايجاد مجموعها الجزئي. في هذا الموضوع نقدم بعض الطرق غير المباشرة لمعرفة تقارب او تباعد المتسلسلات ذات الحدود الموجبة ومنها:

١- اختبار التكامل Integral test

النظرية: لتكن لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ متسلسلة ذات حدود موجبة، ولتكن f دالة مستمرة، موجبة ومتناقصة لكل قيم x بحيث ان $x \geq N$ (N عدد طبيعي موجب). فان المتسلسلة $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ والتكامل $\int_N^{\infty} f(x)dx$ كلاهما متقاربان او متباعدان.

مثال: المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots \dots \dots \dots + \frac{1}{n^p}$$

حيث ان p ثابت حقيقي، بحيث عندما $p > 1$ فان المتسلسلة تتقارب وعندما $p \leq 1$ تتباعد، في حال $p = 1$ تدعى المتسلسلة بالهارمونية.

مثال: استخدم اختبار التكامل لتحديد فيما اذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^4}\right)$ متقاربة ام متباعدة.

الحل: لنفرض $f(x) = \frac{1}{x^4}$. هذه الدالة مستمرة، موجبة ومتناقصة عند $x \geq 1$، بتطبيق اختبار التكامل

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4} = \lim_{R\to\infty} \int_1^{R} x^{-4} dx = -\frac{1}{3} \lim_{R\to\infty} \left(\frac{1}{R^3} - 1\right) = \frac{1}{3}$$

التكامل متقارب، وبالتالي المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^4}\right)$ متقاربة.

مثال: استخدم اختبار التكامل لتحديد فيما اذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+3}\right)$ متقاربة ام متباعدة.

الحل: لنفرض $f(x) = \frac{1}{x+3}$. هذه الدالة مستمرة، موجبة ومتناقصة عند $x \geq 1$، بتطبيق اختبار التكامل

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x+3} = \lim_{R\to\infty} \int_1^{R} \frac{dx}{x+3} = \lim_{R\to\infty} (\ln(R+3) - \ln(4)) = \infty$$

التكامل متباعد، وبالتالي المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+3}\right)$ متباعدة.

اعداد: د. موسى كاظم شامر و د. ماجد عبد الله ناطق قسم الفيزياء- كلية التربية للعلوم الصرفة –جامعة البصرة

مثال: استخدم اختبار التكامل لتحديد فيما اذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{-\frac{1}{3}}\right)$ متقاربة ام متباعدة.

الحل: لنفرض $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$. هذه الدالة مستمرة، موجبة ومتناقصة عند $x \geq 1$، بتطبيق اختبار التكامل

$$\int_{1}^{\infty} x^{-\frac{1}{3}}dx = \lim_{R\to\infty}\int_{1}^{R} x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{3}{2}\lim_{R\to\infty}\left(R^{\frac{2}{3}} - 1\right) = \infty$$

التكامل متباعد، وبالتالي المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{-\frac{1}{3}}\right)$ متباعدة.

مثال: استخدم اختبار التكامل لتحديد فيما اذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=5}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n-4}}\right)$ متقاربة ام متباعدة.

الحل: لنفرض $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$. هذه الدالة مستمرة، موجبة ومتناقصة عند $x \geq 5$، بتطبيق اختبار التكامل

$$\int_{5}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x-4}} = \lim_{R\to\infty}\int_{5}^{R}\frac{dx}{\sqrt{x-4}} = 2\lim_{R\to\infty}\left(\sqrt{R-4} - 1\right) = \infty$$

التكامل متباعد، وبالتالي المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n-4}}\right)$ متباعدة.

مثال: استخدم اختبار التكامل لتحديد فيما اذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}\right)$ متقاربة ام متباعدة.

الحل: لنفرض $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. هذه الدالة مستمرة، موجبة ومتناقصة عند $x \geq 1$، بتطبيق اختبار التكامل

$$\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1} = \lim_{R\to\infty}\int_{1}^{R}\frac{dx}{x^2+1} = \lim_{R\to\infty}\left(\tan^{-1}R - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

التكامل متقارب، وبالتالي المتسلسلة $\sum_{n=5}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}\right)$ متقاربة.

مثال: استخدم اختبار التكامل لتحديد فيما اذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2-1}\right)$ متقاربة ام متباعدة.

الحل: لنفرض $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$. هذه الدالة مستمرة، موجبة ومتناقصة عند $x \geq 4$، بتطبيق اختبار التكامل

$$\int_{4}^{\infty}\frac{dx}{x^2-1} = \lim_{R\to\infty}\int_{4}^{R}\left(\frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1}\right)dx = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\left(ln\frac{R-1}{R+1} - ln\frac{3}{5}\right)$$

$$\int_4^\infty \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\left(ln\frac{R\left(1-\frac{1}{R}\right)}{R\left(1+\frac{1}{R}\right)} - ln\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1-\frac{1}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}}\right) - ln\frac{3}{5}\right) = -\frac{1}{2}ln\frac{3}{5}$$

التكامل متقارب، وبالتالي المتسلسلة $\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2-1}\right)$ متقاربة.

تمرين: استخدم اختبار التكامل لتحديد فيما اذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n-1)}\right)$ متقاربة ام متباعدة.

مثال: استخدم اختبار التكامل لتحديد فيما اذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n^2-1}\right)$ متقاربة ام متباعدة.

الحل: لنفرض $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$. هذه الدالة مستمرة، موجبة ومتناقصة عند $x>1$، بتطبيق اختبار التكامل

$$\int_1^\infty \frac{xdx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{2xdx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\left(ln(R^2+1) - ln(2)\right) = \infty$$

التكامل متباعد، وبالتالي المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n^2-1}\right)$ متباعدة.

مثال: استخدم اختبار التكامل لتحديد فيما اذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{n}{(n^2+1)^{\frac{3}{5}}}\right)$ متقاربة ام متباعدة.

الحل: لنفرض $f(x)=\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{5}}}$. هذه الدالة مستمرة، موجبة ومتناقصة عند $x\geq 3$، بتطبيق اختبار التكامل

$$\int_3^\infty \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{5}}}dx = \lim_{R\to\infty}\int_3^R\left(\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{5}}}\right)dx$$

لحل التكامل نستخدم طريقة التعويض $u=x^2+1$ وبالتالي $du=2xdx$، بالنسبة لحدود التكامل

عندما $x=3$ فأن $u=3^2+1=10$

عندما $x=\mathrm{R}$ فأن $u=R^2+1$

$$=\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{10}^{R^2+1}\left(\frac{du}{u^{\frac{3}{5}}}\right) = \frac{5}{4}\lim_{R\to\infty}\left((R^2+1)^{\frac{2}{5}} - 10^{\frac{2}{5}}\right) = \infty$$

التكامل متباعد، وبالتالي المتسلسلة $\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{n}{(n^2+1)^{\frac{3}{5}}}\right)$ متباعدة.

تمرين: استخدم اختبار التكامل لتحديد فيما اذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=25}^{\infty}\left(\frac{n^2}{(n^3+9)^{\frac{3}{5}}}\right)$ متقاربة ام متباعدة.

مثال: استخدم اختبار التكامل لتحديد فيما اذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(ne^{-n^2}\right)$ متقاربة ام متباعدة.

الحل: لنفرض $f(x) = xe^{-x^2}$. هذه الدالة مستمرة، موجبة ومتناقصة عند $x \geq 1$، بتطبيق اختبار التكامل

$$\int_1^{\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R xe^{-x^2}\,dx$$

لحل التكامل نستخدم التعويض $u = x^2$ وبالتالي $du = 2xdx$، بالنسبة لحدود التكامل

عندما $x = 1$ فأن $u = 1$

عندما $x = \mathrm{R}$ فأن $u = R^2$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_1^{R^2} e^{-u}du = -\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\left(e^{-R^2} - e^{-1}\right) = -\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{e^{R^2}} - \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2e}$$

التكامل متقارب، وبالتالي المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(ne^{-n^2}\right)$ متقاربة.

مثال: استخدم اختبار التكامل لتحديد فيما اذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n(\ln n)^2}\right)$ متقاربة ام متباعدة.

الحل: لنفرض $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$. هذه الدالة مستمرة، موجبة ومتناقصة عند $x \geq 2$، بتطبيق اختبار التكامل

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx = \lim_{R\to\infty}\int_2^R\frac{1}{x(\ln x)^2}dx$$

لحل التكامل نستخدم التعويض $u = \ln x$ وبالتالي $du = \frac{1}{x}$، بالنسبة لحدود التكامل.

عندما $x = 2$ فأن $u = \ln 2$

عندما $x = \mathrm{R}$ فأن $u = \ln R$

$$= \lim_{R\to\infty}\int_{\ln 2}^{\ln R}\frac{1}{u^2}du = -\lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{\ln R} - \frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}$$

التكامل متقارب، وبالتالي المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n(\ln n)^2}\right)$ متقاربة.

مثال: استخدم اختبار التكامل لتحديد فيما اذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$ متقاربة ام متباعدة.

الحل: لنفرض $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$. هذه الدالة مستمرة، موجبة ومتناقصة عند $x\geq 1$، بتطبيق اختبار التكامل

$$\int_2^{\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx=\lim_{R\to\infty}\int_2^{R}\frac{\ln x}{x^2}dx$$

لحل التكامل نستخدم تكامل بالتجزئة بفرض ان $u=\ln x$ و $dv=\frac{1}{x^2}$

$$\int\frac{\ln x}{x^2}dx=-\frac{\ln x}{x}+\int x^{-2}dx=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_2^{R}\frac{\ln x}{x^2}dx=\lim_{R\to\infty}\left(\left(-\frac{\ln R}{R}-\frac{1}{R}\right)-\left(-\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$=\lim_{R\to\infty}\left(\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{2}\right)-\lim_{R\to\infty}\left(\frac{\ln R}{R}+\frac{1}{R}\right)=\left(\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{2}\right)-\lim_{R\to\infty}\left(\frac{\ln R}{R}\right)$$

$$=\left(\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{2}\right)-\lim_{R\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{R}}{1}\right)=\frac{1+\ln 2}{2}$$

التكامل متقارب، وبالتالي المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$ متقاربة.

٢- اختبار النسبة The ratio test

نظرية : لتكن $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ متسلسلة ذات حدود موجبة وان $a_n\neq 0$ لكل قيم n، فانها تتقارب اذا كان $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=L<1$ ، تتباعد $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=L>1$ ويفشل الاختبار في تحديد تقارب او تباعد المتسلسلة اذا كان $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=L=1$ وفي هذه الحالة يتم استخدام اختبار اخر.

مثال:باستخدام اختبار النسبة، اختبر المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$ فيما اذا كانت متقاربة ام متباعدة.

الحل:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n+1}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{5^n}{n!}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}\times\frac{n!}{5^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n+1}\right)$$

$L = 0 < 1$

المتسلسلة متقاربة.

مثال:باستخدام اختبار النسبة، اختبر المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n^2}$ فيما اذا كانت متقاربة ام متباعدة.

الحل:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n+1}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{5^n}{n^2}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5^{n+1}}{(n+1)^2}\times\frac{n^2}{5^n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2}{n^2+2n+1}\right) = 5 > 1$$

المتسلسلة متباعدة.

مثال:باستخدام اختبار النسبة، اختبر المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ فيما اذا كانت متقاربة ام متباعدة.

الحل:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n+1}{a_n}\right) == \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\times\frac{n^n}{n!}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty}(1)}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e^1} < 1$$

المتسلسلة متقاربة.

مثال:باستخدام اختبار النسبة، اختبر المتسلسلة $\sum_{1=0}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!\,n!\,3^n}$ فيما اذا كانت متقاربة ام متباعدة.

الحل:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n+1}{a_n}\right) == \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+4)!}{3!\,(n+1)!\,3^{n+1}}\times\frac{3!\,n!\,3^n}{(n+3)!}\right) = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{4}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{3}\frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{3}$$

$L < 1$ المتسلسلة متقاربة.

مثال:باستخدام اختبار النسبة، اختبر المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+5}{3^n}$ فيما اذا كانت متقاربة ام متباعدة.

الحل:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n+1}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{2^{n+1}+5}{3^{n+1}}}{\frac{2^n+5}{3^n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}+5}{3^{n+1}}\times\frac{3^n}{2^n+5}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n.2+5}{2^n+5}\right)=\frac{1}{3}\frac{\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{5}{2^n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{2^n}\right)}=\frac{2}{3}<1$$

المتسلسلة متقاربة.

مثال:باستخدام اختبار النسبة، اختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n!}{e^{n^2}}\right)$ فيما اذا كانت متقاربة ام متباعدة.

الحل:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n+1}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{(n+1)!}{e^{(n+1)^2}}}{\frac{n!}{e^{n^2}}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!}{e^{(n+1)^2}}.\frac{e^{n^2}}{n!}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{e^{(n^2+2n+1-n^2)}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{e^{(2n+1)}}\right)$$

باستخدام طريقة الاوبيتال

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2e^{(2n+1)}}\right)=0<1$$

حيث ان $\lim_{n\to\infty}\left(2e^{(2n+1)}\right)=\infty$ ، وبالتالي المتسلسلة متقاربة.

مثال:باستخدام اختبار النسبة، اختبر المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{(n+1)!}$ فيما اذا كانت متقاربة ام متباعدة.

الحل:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n+1}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+2)(n+3)}{(n+2)!}\times\frac{(n+1)!}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+2)(n+3)}{(n+2)(n+1)!}\times\frac{(n+1)!}{(n+1)(n+2)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+3)}{(n+2)}\times\frac{1}{(n+1)}\right)$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+3)}{n^2+3n+2}\right)$$

باستخدام طريقة اوبيتال

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{1}{\infty}=0<1$$

المتسلسلة متقاربة.

مثال:باستخدام اختبار النسبة، اختبر المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)!}$ فيما اذا كانت متقاربة ام متباعدة.

الحل:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n+1}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)(n+2)}{(n+2)!}\times\frac{(n+1)!}{n(n+1)}\right)$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)(n+2)}{(n+2)(n+1)!}\times\frac{(n+1)!}{n(n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0<1$$

المتسلسلة متقاربة.

٣- اختبار الجذر النوني The n[th] – root test

نظرية : لتكن $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ متسلسلة ذات حدود موجبة ، فانها تتقارب اذا كان $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{a_n}\right)=L<1$ ، تتباعد $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{a_n}\right)=L>1$، ويفشل الاختبار في تحديد تقارب او تباعد المتسلسلة اذا كان $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{a_n}\right)=L=1$.

مثال: بأستخدام اختبار الحد النوني، حدد فيما ان المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$ تتقارب ام تتباعد.

الحل:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n}\right)=\lim\left(\sqrt[n]{n^2}\right).\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n}\right)$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(n^{\left(\frac{2}{n}\right)}\right).\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)=1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}<1$$

المتسلسلة متقاربة

مثال: بأستخدام اختبار الحد النوني، حدد فيما ان المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{3n}{2n+1}\right)^{n}\right)$ تتقارب ام تتباعد.

الحل:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\left(\frac{3n}{2n+1}\right)^{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{2n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}>1$$

المتسلسلة متباعدة

٤- اختبار المقارنة Comparison test

اذا كان لدنيا $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ متسلسلتان ذات حدود موجبة :

١- عندما $a_n \le b_n$ ، لكل عدد صحيح موجب n وكانت $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ متقاربة فأن $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متقاربة ايضاً.

٢- عندما $a_n \ge b_n$ ، لكل عدد صحيح موجب n وكانت $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ متباعدة فأن $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متباعدة ايضاً.

مثال: باستخدام اختبار المقارنة، بين فيما اذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4^n+1}\right)$ متقاربة ام متباعدة.

الحل: لنفرض ان $a_n=\frac{3}{4^n+1}$، لكي نستخدم اختبار المقارنة يجب البحث عن سلسلة اخرى يمكن لنا معرفة انها متقاربة ام متباعدة.

نختار المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4^n+1}\right)>\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n$، حيث ان $3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n}\right)=\frac{3}{4^n}$ يمثل ثابت مضروب بمتسلسلة هندسية.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n}\right)=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

من خلال المقارنة المعادلة اعلاه مع معادلة تعريف المتسلسلة الهندسية (1) نحصل على:

$$a=1\ ,\quad r=\frac{1}{4}$$

نلاحظ ان $|r|<1$ وبالتالي فأن المتسلسلة الهندسية متقاربة، اذن $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4^n+1}\right)$ متقاربة.

المتسلسلات المتناوبة Alternating series

ان المتسلسلة التي تتناوب اشارة حدودها من سالبة الى موجبة او بالعكس تسمى المتسلسلة المتناوبة، والتي يعبر عنها بالشكل:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + \cdots + \cdots \qquad (2)$$

نظرية: بالنسبة للمعادلة 1 تتقارب المتسلسلة اذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:

١- كل قيم a_n موجبة.
٢- ان تكون $a_n \geq a_{n+1}$ لكل قيم n.
٣- ان تكون $\lim_{n\to\infty}(a_n) = 0$.

مثال: حدد تقارب المتسلسلة

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

الحل: المتسلسلة اعلاه تحقق الشروط الثلاثة الاولى، وهي متقاربة.

مثال: حدد تقارب المتسلسلة

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 + \cdots + (-1)^{n+1}n$$

الحل: المتسلسلة اعلاه لاتحقق الشرط ٢ و ٣، وهي متباعدة.

التقارب المطلق Absolute convergence

نظرية: اذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ متقاربة، فأن $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متقاربة ايضاً. كذلك هو الحال مع اذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متقاربة، فأن $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ متقاربة ايضاً.

مثال: اختبر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right)$ ، باستخدام التقارب المطلق.

الحل:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right)=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right|\right)=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ متقاربة، فأن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة ايضاً.

مثال: اختبر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right)$

الحل:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right)=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right|\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ متقاربة، فأن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة ايضاً.

أختبار النسبة للتقارب المطلق The ratio test for absolute convergence

نظرية : لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ متسلسلة لانهائية ذات حدود غير صفرية، فان:

١- تتقارب المتسلسلة مطلقاً اذا $\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)=L<1$.

٢- تتباعد المتسلسلة اذا $\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)=L>1$ او $\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)=\infty$.

٣- يفشل الاختبار في تحديد تقارب او تباعد المتسلسلة اذا كان $\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)=L=1$.

مثال: اختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}n^2}{e^n}\right)$ فيما اذا كانت متقاربة ام متباعدة باستخدام اختبار النسبة للتقارب المطلق.

الحل:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{(-1)^{n+2}(n+1)^2}{e^{(n+1)}}\frac{e^n}{(-1)^{n+1}n^2}\right|\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{en^2}\right)$$

$$=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\right)=\frac{1}{e}\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)^2=\frac{1}{e}<1$$

وبالتالي المتسلسلة متقاربة تقارب مطلق.

مثال: اختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ فيما اذا كانت متقاربة ام متباعدة باستخدام اختبار النسبة للتقارب المطلق.

الحل:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}\frac{n^2}{(-1)^n}\right|\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{(-1)^1 n^2}{(n+1)^2}\right|\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\right)=\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)^2=1$$

لا يمكن ان تكون المتسلسلة متقاربة او متباعدة.

مثال: اختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ فيما اذا كانت متقاربة ام متباعدة باستخدام اختبار النسبة للتقارب المطلق.

الحل:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{1}{(n+1)^2}\frac{n^2}{1}\right|\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\right|\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\right)=\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)^2=1$$

مثال: اختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ فيما اذا كانت متقاربة ام متباعدة باستخدام اختبار النسبة للتقارب المطلق.

الحل:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{1}{(n+1)}\frac{n}{1}\right|\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{n}{(n+1)}\right|\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n+1)}\right)=1$$

مثال: اختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^n}{n!}\right)$ فيما اذا كانت متقاربة ام متباعدة باستخدام اختبار النسبة للتقارب المطلق.

الحل:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n}\right|\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n!}\frac{n!}{n^n}\right|\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{(n+1)^n}{n^n}\right|\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^n}{n^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(e^{n\,ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)$$

$$=e^{\lim_{n\to\infty}\left(n\,ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}=e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right)}=e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)}=e^1>1$$

المتسلسلة متباعدة

مثال: اختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-2)^n n!}{n^n}\right)$ فيما اذا كانت متقاربة ام متباعدة باستخدام اختبار النسبة للتقارب.

الحل

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{(-2)^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{(-2)^n n!}\right|\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{(-2)^1(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}\right|\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{(-2)^1 n^n}{(n+1)^n}\right|\right)=2\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right)=2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right)=\frac{2}{e^1}<1$$

المتسلسلة متقاربة تقارب مطلق حيث ان $e=2.71$.

مثال: اختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-3)^n n!}{n^n}\right)$ فيما اذا كانت متقاربة ام متباعدة باستخدام اختبار النسبة للتقارب.

الحل

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{(-3)^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{(-3)^n n!}\right|\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{(-3)^1(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}\right|\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{(-3)^1 n^n}{(n+1)^n}\right|\right)=3\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right)=3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right)=\frac{3}{e^1}>1$$

المتسلسلة متباعدة حيث ان $e=2.71$.

مثال: اختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-3)^n}{n!}\right)$ فيما اذا كانت متقاربة ام متباعدة باستخدام اختبار النسبة للتقارب.

الحل

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{(-3)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{(-3)^n}\right|\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{(-3)^1}{n+1}\right|\right)=3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)=0<1$$

المتسلسلة متقاربة تقارب مطلق.