المتسلسلات اللانهائية Infinite Series

تعرفنا في المحاضرة السابقة على المتتابعة، وعرفنا ان المتتابعة توجد لها غاية (نهاية) وليس لها مجموع جبري. في هذه المحاضرة سوف نتعرف على المتسلسة اللانهائية كحاصل جمع جبري لجميع حدود المتتابعة اللانهائية. فاذا كانت $\{a_n\} \equiv \{a_1, a_2, a_3, \dots\dots a_n, \dots\dots\}$ تمثل متتابعة لانهائية Infinite sequence، فأن:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

تسمى متسلسلة لانهائية Infinite series. المجاميع الجزئية Partial sums للمتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = S_1 + a_2$$

$$S_3 = S_2 + a_3$$

:

:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

S_n يمثل المجموع الجزئي Partial sum من الرتبة n للمتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

يعرف مجموع S المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ كمايلي:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

ان المتسلسلة تتقارب اذا كان مجموع المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ عدداً حقيقياً، اما اذا اقترب المجموع من المالانهاية كانت المتسلسلة متباعدة.

Dr Musa Kadhim Shamer & Dr. Majed Abd Allah Natiq

اعداد: د. موسى كاظم شامر و د. ماجد عبد الله ناطق قسم الفيزياء- كلية التربية للعلوم الصرفة –جامعة البصرة

وتسمى المتتابعة $\{S_n\} = \{S_1, S_2, \dots, S_n, \dots\}$ متتابعة المجموع الجزئي المصاحبة للمتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

مثال: لديك المتتابعة اللانهاية $\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\}$.

١- اكتب حدود المتتابعة اللانهائية.

٢- أكتب المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$.

٣- المجموع الجزئي من الرتبة n للمتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$.

٤- المجاميع الجزئية للمتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ لقيم n الخمسة الاولى.

الحل:

١-

$$\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}} + \dots\right\}$$

٢-

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$$

٣-

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

٤-

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$S_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = 1.75$$

$$S_4 = \frac{7}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8} = 1.875$$

$$S_5 = \frac{15}{8} + \frac{1}{16} = \frac{31}{16} = 1.9375$$

Dr. Musa Kadhim Shamer & Dr. Majed Abd Allah Natiq

مثال: لديك المتتابعة اللانهاية $\{4^n\}$.

١ـ اكتب الحدود الخمسة الاولى لمتتابعة اللانهائية $\{4^n\}$.

٢ـ أكتب المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}(4^n)$.

٣ـ المجموع الجزئي من الرتبة n للمتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}(4^n)$.

٤ـ اكتب متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}(4^n)$ لقيم n الخمسة الاولى.

الحل:

١ـ

$$4^n = \{4^1, 4^2, 4^3, 4^4, 4^5 + \cdots 4^n + \cdots\}$$

٢ـ

$$\sum_{n=1}^{\infty}(4^n) = 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 + \cdots$$

٣ـ

$$S_1 = 4$$

$$S_2 = 4 + 16 = 20$$

$$S_3 = 20 + 64 = 84$$

$$S_4 = 84 + 256 = 340$$

$$S_5 = 340 + 1024 = 1364$$

٤ـ

$$\{S_n\} = \{4, 20, 84, 340, 1364, S_n, \dots\}$$

Dr. Musa Kadhim Shamer & Dr. Majed Abd Alha Natiq

مثال: لديك المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{2^n}\right)$ حدد فيما اذا كانت المتسلسلة متقاربة ام متباعدة من خلال المجاميع الجزئية للمتسلسلة.

الحل: المتسلسلة بدلالة مجموع حدود المتتابعة $\frac{5}{2^n}$ تكتب بالشكل التالي:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{2^n}\right)=\frac{5}{2^1}+\frac{5}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\frac{5}{2^5}+\cdots$$

بالنسبة للمجاميع الجزئي للمتسلسلة فيكتب على الشكل التالي:

$$S_1=\frac{5}{2^1}=2.5$$

$$S_2=\frac{5}{2^1}+\frac{5}{2^2}=3.75$$

$$S_3=\left(\frac{5}{2^1}+\frac{5}{2^2}\right)+\frac{5}{2^3}=4.375$$

$$S_4=\left(\frac{5}{2^1}+\frac{5}{2^2}+\frac{5}{2^3}\right)+\frac{5}{2^4}=4.6875$$

$$S_5=\left(\frac{5}{2^1}+\frac{5}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{5}{2^4}\right)+\frac{5}{2^5}=4.84375$$

المجاميع الجزئية تقارب 5 ، المتسلسلة متقاربة

مثال: اذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$، اوجد الاتي:

١ـ الحدود الاربعة الاولى للمجاميع الجزئية S_1، S_2، S_3 و S_4.
٢ـ جد الصيغة الجبرية للحد النوني لـ S_n بدلالة n.
٣ـ بين تقارب او تباعد المتسلسلة

الحل:

١ـ الحدود الاربعة للمجاميع الجزئية هي:

$$S_1=\frac{1}{1(1+1)}=\frac{1}{2}$$

$$S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2(2+1)}=\frac{2}{3}$$

Dr. Musa Kadhim Shamer & Dr. Majed Abd Alla Natiq

$$S_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3(3+1)} = \frac{3}{4}$$

$$S_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4(4+1)} = \frac{4}{5}$$

٢- لايجاد الصيغة الجبرية للحد النوني لـ S_n بدلالة n يمكن استخدام الكسور الجزئية(تجزئة الكسور) للحد النوني $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ بالشكل التالي:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)}$$

بمساواة البسط لكلا طرفي المعادلة

$$1 = A(n+1) + Bn$$

عندما $n = 0$

$$1 = A(0+1) + B0 \rightarrow\rightarrow A = 1$$

عندما $n = -1$

$$1 = A(-1+1) - B \rightarrow\rightarrow B = -1$$

وهكذا يمكن كتابة المتسلسلة بالشكل التالي:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

بالنسبة للمجموع الجزئي للمتسلسلة فيكتب على الشكل التالي:

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + a_{n-1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

حيث ان $a_{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$

٣-

Dr. Musa Kadhim Shamer & Dr. Majed Abd Alha Natiq

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{\infty}=1$$

اذن المتسلسلة متقاربة.

مثال: اذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$، اوجد الاتي:

١- ايجد الصيغة الجبرية للحد النوني لـ S_n بدلالة n.

٢- بين تقارب او تباعد المتسلسلة

الحل:

١- لايجاد الصيغة الجبرية للحد النوني للمتسلسلة S_n بدلالة n يمكن استخدام الكسور الجزئية(تجزئة الكسور) للحد النوني $a_n=\frac{4}{n(n+1)(n+2)}$ بالشكل التالي:

$$\frac{4}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{(n+2)}$$
$$=\frac{A(n+1)(n+2)+Bn(n+2)+Cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)}$$

بمساواة البسط لكلا طرفي المعادلة

$$4=A(n+1)(n+2)+Bn(n+2)+Cn(n+1)$$

عندما $n=0$

$$4=A(0+1)(0+2)+0+0\rightarrow\rightarrow A=2$$

عندما $n=-1$

$$4=A(-1+1)(-1+2)-B(-1+2)-C(-1+1)\rightarrow\rightarrow B=-4$$

عندما $n=-2$

$$4=A(-2+1)(-2+2)-2B(-2+2)-2C(-2+1)\rightarrow\rightarrow C=2$$

وهكذا يمكن كتابة المتسلسلة بالشكل التالي:

$$a_n=\frac{4}{n(n+1)(n+2)}=\frac{2}{n}-\frac{4}{n+1}+\frac{2}{n+2}=\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}\right)-\left(\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n+2}\right)$$

حيث ان

Dr. Musa Kadhim Shamer & Dr. Majed Abd Alha Natiq

$$a_{n-1} = \left(\frac{2}{n-1} - \frac{2}{n}\right) - \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}\right)$$

بالنسبة للمجموع الجزئي للمتسلسلة فيكتب على الشكل التالي:

$$S_n = \left((2-1) - \left(1 - \frac{2}{3}\right)\right) + \left(\left(1 - \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{4}\right)\right) + \left(\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{4}\right) - \left(\frac{2}{4} - \frac{2}{5}\right)\right) + \cdots$$
$$+ a_{n-1} + \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}\right) - \left(\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2}\right) = 1 - \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n+2}$$

٢-

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n(n+1)(n+2)}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n+2}\right) = 1$$

اذن المتسلسلة متقاربة.

المتسلسلات الهندسية Geometric Series

تكتب المتسلسلة الهندسية على الصورة التالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots \qquad where\ a(\neq 0), r\ \ are\ constants$$

$a(\neq 0)$ و r ثابتان. والمجموع الجزئي النوني S_n هو المتتابعة الهندسية

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots \qquad (1)$$

بضرب طرفي المعادلة (1) بـ r:

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n + \cdots \qquad (2)$$

بطرح (2) من (1) نحصل على:

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \qquad (3)$$

بالنسبة للمعادلة 3 سيتم مناقشة الحالات التالية:

الحالة الاولى: اذا كانت $r \neq 1$ وان $|r| < 1$ في هذه الحالة يكون

Dr. Musa Kadhim Shamer & Dr. Majed Abd Alha Natiq

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a(1-r^n)}{1-r}\right) = \frac{a}{1-r}$$

في هذه الحالة تكون المتسلسلة الهندسية متقاربة وحاصل جمعها $\frac{a}{1-r}$.

مثال: حدد هل ان المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n}\right)$ متقاربة ام متباعدة، واذا كانت متقاربة جد حاصل جمعها.

الحل:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n}\right) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots +$$

من خلال المقارنة المعادلة اعلاه مع معادلة تعريف المتسلسلة الهندسية (1) نحصل على:

$$a = 1 \ , \quad r = \frac{1}{4}$$

نلاحظ ان $|r| < 1$ وبالتالي فأن المتسلسلة الهندسية متقاربة. اما حاصل مجموع المتسلسلة

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

مثال: حدد هل ان المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\frac{5}{4^n}\right)$ متقاربة ام متباعدة، واذا كانت متقاربة جد حاصل جمعها.

الحل:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\frac{5}{4^n}\right) = -\frac{5}{4} + \frac{5}{4^2} - \frac{5}{4^3} + \frac{5}{4^4} \ldots$$

من خلال المقارنة المعادلة اعلاه مع معادلة تعريف المتسلسلة الهندسية (1) نحصل على:

$$a = -\frac{5}{4} \ , \quad r = -\frac{1}{4}$$

نلاحظ ان $|r| < 1$ وبالتالي فأن المتسلسلة الهندسية متقاربة. اما حاصل مجموع المتسلسلة

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{-\frac{5}{4}}{1+\frac{1}{4}} = -1$$

Dr. Musa Kadhim Shamer & Dr. Majed Abd Alha Natiq

مثال: حدد هل ان المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-2n})$ متقاربة ام متباعدة، واذا كانت متقاربة جد حاصل جمعها.

الحل:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-2n}) = 1 + e^{-2} + e^{-4} + e^{-6} \dots$$

من خلال المقارنة المعادلة اعلاه مع معادلة تعريف المتسلسلة الهندسية (1) نحصل على:

$$a = 1 \ , \quad r = e^{-2} \rightarrow\rightarrow \left|\frac{1}{e^2}\right| = 0.135335 < 1$$

نلاحظ ان $|r| < 1$ وبالتالي فأن المتسلسلة الهندسية متقاربة. اما حاصل مجموع المتسلسلة

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-\frac{1}{e^2}} = \frac{e^2}{e^2-1}$$

الحالة الثانية: اذا كانت $r \neq 1$ وان $|r| \geq 1$ في هذه الحالة يكون

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a(1-r^n)}{1-r}\right) = \infty$$

تكون المتسلسلة الهندسية متباعدة لكون $|r^n| \to \infty$.

مثال: حدد هل ان المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3^{2n+1}}{8^n}\right)$ متقاربة ام متباعدة.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3^{2n+1}}{8^n}\right) = 3 + \frac{3^3}{8} + \frac{3^5}{8^2} + \frac{3^7}{8^3} + \cdots$$

من خلال المقارنة المعادلة اعلاه مع معادلة تعريف المتسلسلة الهندسية (1) نحصل على:

$$a = 3 \ , \quad r = \frac{9}{8}$$

نلاحظ ان $|r| > 1$ وبالتالي فأن المتسلسلة الهندسية متباعدة.

Dr. Musa Kadhim Shamer & Dr. Majed Abd Alha Nafiq

نظرية

١- اذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة بينما $\sum_{n}^{\infty} b_n$ متباعدة فأن المتسلسلة $\sum_{n}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ تكون متباعدة ايضاً.

٢- اذا كانت المتسلسلتان $\sum_{n}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n}^{\infty} b_n$ متقاربتان فأن المتسلسلات:

$$\sum_{n}^{\infty}(a_n + b_n) \quad \text{و} \quad \sum_{n}^{\infty}(a_n - b_n) \quad \text{و} \quad \sum_{n}^{\infty} ca_n \quad \text{و} \quad \sum_{n}^{\infty} cb_n$$

تكون كلها متقاربة، حيث ان c عدد حقيقي.

مثال: حدد هل ان المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3^n-2^n}{6^n}\right)$ متقاربة ام متباعدة، واذا كانت متقاربة جد حاصل جمعها.

الحل: يمكن لنا كتابة المتسلسلة بالشكل التالي:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3^n-2^n}{6^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3^n}{6^n}\right) - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^n}{6^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{6}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{6}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

حيث ان $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ يمثل حاصل طرح متسلستلتين هندسيتان وبذلك:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$$

من خلال المقارنة المعادلة اعلاه مع معادلة تعريف المتسلسلة الهندسية (1) نحصل على:

$$a = 1 \ , \quad r = \frac{1}{2}$$

نلاحظ ان $|r| < 1$ وبالتالي فأن المتسلسلة الهندسية متقاربة. اما حاصل مجموع المتسلسلة.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots$$

من خلال المقارنة المعادلة اعلاه مع معادلة تعريف المتسلسلة الهندسية (1) نحصل على:

اعداد: د. موسى كاظم شامر و د. ماجد عبد الله ناطق قسم الفيزياء- كلية التربية للعلوم الصرفة –جامعة البصرة

Dr. Musa Kadhim Shamer & Dr. Majed Abd Allha Natiq

$$a = 1 \ , \quad r = \frac{1}{3}$$

نلاحظ ان $|r| < 1$ وبالتالي فأن المتسلسلة الهندسية متقاربة. اما حاصل مجموع المتسلسلة

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3^n - 2^n}{6^n}\right) \quad converges\ to \quad 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

وحسب القاعدة رقم ٢: اذا كانت المتسلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربتان فأن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ متقاربة

تمرين: بنفس الطريقة في المثال اعلاه، اختبر المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3^n-1}{6^n}\right)$ و $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4^n} - \frac{2}{5^{n-1}}\right)$

مثال: حدد هل ان المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{2^n}\right)$ متقاربة ام متباعدة، واذا كانت متقاربة جد حاصل جمعها، طبقاً لقاعدة حاصل ضرب ثابت ومتسلسلة(القاعدة ٢).

الحل:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$$

من خلال المقارنة المعادلة اعلاه مع معادلة تعريف المتسلسلة الهندسية (1) نحصل على:

$$a = 1, \quad r = \frac{1}{2}$$

نلاحظ ان $|r| < 1$ وبالتالي فأن المتسلسلة الهندسية متقاربة. اما حاصل مجموع المتسلسلة

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{2^n}\right) = 4.2 = 8$$

Dr. Musa Kadhim Shamer & Dr. Majed Abd Alha Natiq

مثال :اثبت ان المتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{2^{n+1}}-\frac{3}{(n+1)(n+2)}\right)$$

متقاربة ثم احسب مجموعها.

الحل:

بالنسبة للمتسلسلة الهندسية $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{2^{n+1}}\right)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\right)$$

من خلال المقارنة المعادلة اعلاه مع معادلة تعريف المتسلسلة الهندسية (1) نحصل على:

$$a=\frac{1}{2},\quad r=\frac{1}{2}$$

نلاحظ ان $|r|<1$ وبالتالي فأن المتسلسلة الهندسية متقاربة. اما حاصل مجموع المتسلسلة

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)=4.1=4$$

بالنسبة للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{(n+1)(n+2)}\right)$، لايجاد الصيغة الجبرية للحد النوني لـ S_n بدلالة n يمكن استخدام الكسور الجزئية(تجزئة الكسور) للحد النوني $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ بالشكل التالي:

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n+1}+\frac{B}{n+2}=\frac{A(n+2)+B(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$

بمساواة البسط لكلا طرفي المعادلة

$$1=(n+2)+B(n+1)$$

عندما $n=-1$

$$1=A(1)+B0\rightarrow\rightarrow A=1$$

عندما $n=-2$

Dr. Musa Kadhim Shamer & Dr. Majed Abd Alha Natiq

$$1 = A0 - B \rightarrow\rightarrow B = -1$$

وهكذا يمكن كتابة المتسلسلة بالشكل التالي:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

بالنسبة للمجموع الجزئي للمتسلسلة فيكتب على الشكل التالي:

$$S_n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + a_{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$
$$= 1 - \frac{1}{n+2}$$

حيث ان $a_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$S = 3\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} S_n = 3\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 3\left(1 - \frac{1}{\infty}\right)$$
$$= 3$$

اذن المتسلسلة متقاربة.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{2^{n+1}} - \frac{3}{(n+1)(n+2)}\right) = 4 - 3 = 1$$

وبالتالي فأن المتسلسلة متقاربة طبقاً القاعدة ٢.

Dr. Musa Kadhim Shamel & Dr. Majed Abd Alha Natiq