الفصل الاول

المتتابعات و المتسلسلات

Infinite Sequences and Series

في علم الرياضيات يوجد الكثير من المواضيع الرياضية التي تعتبر من ادوات البحث والحساب تحتاجها العلوم الاخرى بدون استثناء. فالدوال **functions**، المتتابعات **sequences**، المتواليات **progressions**، المصفوفات **matrices**، المحددات **determinats** والمتسلسلات **series** وغيرها الكثير التي توجد بشتى نواحي الحياة وظواهرها الطبيعة. لكل موضوع من هذه المواضيع صفات نوعية وخصائص تميزه عن غيره، كما لها مجالات واستخدامات تسهم في الوصول للحلول المثلى للمشاكل التي تواجه الانسان سواء ان كانت علمية ، اقتصادية و اجتماعية او غيرها. في هذا الفصل ندرس المتسلسلات اللانهائية، حيث لا توجد متسلسلات نهائية فهي دائما ما تكون لانهائية من حيث عدد الحدود.

لكي نفهم ذلك، لنفرض ان المسافة بينك وبين باب الغرفة التي تجلس بداخلها هي $2m$ على سبيل المثال وانك تحركت نحو الباب مسافة $1m$، ثم تحركت مسافة $\frac{1}{2}m$، ثم مسافة $\frac{1}{4}m$، وهكذا تستمر بالتحرك في كل مرة نصف المسافة المتبقية. انك في الحقيقة تكتشف انك تتعامل مع متسلسلة لانهائية اي ان حدودها لا تنتهي مع العلم ان مجموعها هو $2m$ بمعنى أن:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots\ldots\ldots.=2$$

اذا استمر الانسان بالتحرك بهذه الطريقة فأنه لن يصل الى باب الغرفة أبداً. في الحقيقة ان المتسلسلات اللانهائية تفيد بدراسة العديد من الظواهر الطبيعية، كما انها تساعد في تمثيل الدوال المعقدة في صيغ رياضية بسيطة كما يمكن التعامل معها بسهولة وخاصة في مسائل العلوم والتكنولوجيا. ولدراسة المتسلسلات نبدأ اولاً بالمتتابعات اللانهائية **infinite sequences**.

المتتابعة اللانهائية Infinite Sequences

ان الباحث في المختبر يعمل على رصد النتائج ويدونها بترتيب، فهو يدون القراءة الاولى ثم الثانية ثم الثالثة وهكذا. هذا الترتيب له اهمية كبرى في تحليل واستنباط القوانين والقواعد الرياضية التي تحكم الظواهر والتفاعلات والتجارب العلمية التي يجريها. ويستطيع الباحث المدقق ان يتوقع الشكل الرياضي للقراءة التالية بعد عدد محدد من القراءات ويتوقع ان يستمر التغير بنفس لتشابه النمطي الى عدد لا نهائي من القراءات او لا

إعداد :
د. موسى كاظم شامر
د. ماجد عبدالله ناطق

يستمر. هذا ما يسمى بالمتتابعات اللانهائية، حيث ليس لها قيمة جبرية (مجموع جبري)، لذلك سوف نجد غاية (نهاية) لها عندما تقترب حدودها من اللانهاية، كما سنبحث عن امكانية تقاربها الى عدد حقيقي.

تعريف 1: تعرف المتتابعة اللانهائية على انها دالة f في متغير n مجالها هو مجموعة الاعداد الحقيقة الصحيحة الموجبة $R^+ = \{1, 2, 3, \dots\dots\dots\dots, n, ..\}$ ومداها مجموعة من الاعداد الحقيقية R.

هذا الكلام يعني، انه اذا كانت $f(n)$ متتابعة لانهائية فانه يوجد لكل عدد صحيح موجب $n \in R^+$ عدد حقيقي وحيد $f(n)$. وعلى هذا فأن الحد الاول في المتتابعة هو $f(1)$ ، الحد الثاني في المتتابعة هو $f(2)$ وهكذا نستمر حتى نصل الى اخر حد او ما يسمى الحد النوني (العام) $f(n)$ وتكتب المتتابعة عندئذ في الصورة:

$$\{f(1), f(2), f(3), \dots\dots\dots f(n), \dots..\}$$

وللتبسيط يمكن كتابتها بالشكل التالي:

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots\dots.. a_n, \dots\dots\}$$

وكثير ما يعبر عن المتتابعة بالرمز $\{a_n\}$ او $\{n, a_n\}$. فالمتتابعة $\{2^n\} = \{2, 4, 8, \dots\dots., 2^n, \dots..\}$، حيث $a_n = 2^n$ يمثل الحد النوني(العام). وحسب اعلاه فأن $f(n) \equiv a_n$. ومن الامثلة على المتواليات اللانهائية:

$$\left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \dots\right\}$$

$$\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, 1 - \frac{1}{n}, \dots\right\}$$

$$\{3, 3, 3, 3, \dots, 3\}$$

نطلق على المتتابعة بأنها محدودة *Bounded sequence* ، اذا وجد عددان مثل P و Q بحيث ان $P \le a_n \le Q$ لجميع n. فالمتتابعة $\left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \dots\dots.. \frac{2n+1}{2n}, \dots\dots.\right\}$ محدودة لان $1 \le a_n \le \frac{3}{2}$، اما المتتابعة $\{2, 4, 6, \dots\dots\dots 2n, \dots..\}$ فهي متتابعة غير محدودة *Unbounded sequence*.

تعريف 2: يقال للمتتابعة $\{a_n\}$ غاية (نهاية) تساوي العدد الحقيقي L (بمعنى $a_n = L$) عندما $n \to \infty$، وتكتب بالصورة التالية

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

لتكن لدينا $\lim_{n\to\infty}(a_n) = L$ و $\lim_{n\to\infty}(b_n) = M$ و k ثابت، عندئذ:

1- $\lim_{n\to\infty}(ka_n) = kL$

2- $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n) = L + M$

3- $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) - \lim_{n\to\infty}(b_n) = L - M$

4- $\lim_{n\to\infty}(a_n . b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) . \lim_{n\to\infty}(b_n) = L . M$

5- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty}(a_n)}{+\lim_{n\to\infty}(b_n)} = \frac{L}{M}$

مثال: تطبيق القاعدة 1.

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = -1\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = -1.\frac{1}{\infty} = -1 \times 0 = 0$$

مثال: تطبيق القاعدة 3.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}(1) - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - 0 = 1$$

مثال: تطبيق القاعدة 4.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n^2}\right) = 5.\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right).\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 5 \times 0 \times 0 = 0$$

مثال: تطبيق القاعدة 2و 3 و5.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{13 - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n}}{n + 5 \times 2^{-n}}\right)$$

الحل: باستخدام قانون توزيع الغاية

$$=\frac{\lim_{n\to\infty}13-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}(n)+5\lim_{n\to\infty}(2^{-n})}=\frac{\lim_{n\to\infty}13-\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}}+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}(n)+5\lim_{n\to\infty}(2^{-n})}$$

$$=\frac{13-\frac{1}{\infty}+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\infty}\right)}{\infty+5\times 0}=\frac{13}{\infty}=0$$

او بالتعويض المباشر

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{13-\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^n}{n}}{n+5\times\ 2^{-n}}\right)=\left(\frac{13-0+0}{\infty+\frac{5}{\infty}}\right)=\frac{13}{\infty}=0$$

مثال: جد $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+5n}{3n^2+1}\right)$.

الحل: بقسمة كل من البسط والمقام على الحد ذو اعلى رتبة، نحصل

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+5n}{3n^2+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{5}{n}}{3+\frac{1}{n^2}}\right)=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{\lim_{n\to\infty}(1)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}(3)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{1+0}{3+0}=\frac{1}{3}$$

مثال: جد $\lim_{n\to\infty}(\log_{10}(10n^2-2n)-\log_{10}(n^2+1))$.

الحل: باستخدام خاصية اللوغارتمية $\log_a(x)-\log_a(y)=\log_a\left(\frac{x}{y}\right)$، يمكن كتابة الغاية بالشكل التالي:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\log_{10}\left(\frac{10n^2-2n}{n^2+1}\right)\right)$$

بقسمة كل من البسط والمقام على الحد ذو اعلى رتبة، نحصل

$$\lim_{n\to\infty}\left(\log_{10}\left(\frac{10-\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)\right)$$

بتعويض عن $n=\infty$ نحصل على

$$\log_{10}\left(\frac{10-0}{1+0}\right)=\log_{10}(10)=1$$

إعداد :
د. موسى كاظم شامر
د. ماجد عبدالله ناطق

مثال: جد $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^3}{n^3+3\sqrt{4+n^6}}\right)$

الحل: بقسمة كل من البسط والمقام على الحد ذو اعلى رتبة، نحصل

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^3}{n^3+3\sqrt{4+n^6}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{1+\frac{3}{n^3}\sqrt{4+n^6}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{1+3\sqrt{\frac{4}{n^6}+1}}\right)$$

$$=\frac{5}{1+3}=\frac{5}{4}$$

امثلة على **تعريف 2:** يقال للمتتابعة $\{a_n\}$ غاية (نهاية) تساوي العدد الحقيقي L (بمعنى $a_n = L$) عندما $n \to \infty$، وتكتب $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

مثال: لديك حد النوني (العام):

$$a_n = 2 + \left(-\frac{1}{n}\right)^n$$

1- اكتب الحدود الخمسة عشر الاولى.

2- جد الغاية.

الحل:

1- الحدود الخمسة عشر الاولى موضحة في الجدول، من الملاحظ ان حدود المتتابعة تقترب من العدد 2 اعلى او اقل قليلاً

n	$\left(-\frac{1}{n}\right)^n + 2$	approximation
1	1	1
2	$\frac{9}{4}$	2.25
3	$\frac{53}{27}$	1.96296
4	$\frac{513}{256}$	2.00391
5	$\frac{6249}{3125}$	1.99968
6	$\frac{93313}{46656}$	2.00002
7	$\frac{1647085}{823543}$	2.
8	$\frac{33554433}{16777216}$	2.
9	$\frac{774840977}{387420489}$	2.
10	$\frac{20000000001}{10000000000}$	2.
11	$\frac{570623341221}{285311670611}$	2.
12	$\frac{17832200896513}{8916100448256}$	2.
13	$\frac{605750213184505}{302875106592253}$	2
14	$\frac{22224013651116033}{11112006825558016}$	2
15	$\frac{875787780761718749}{437893890380859375}$	2

-2

$$\lim_{n\to\infty}\left[2 + \left(-\frac{1}{n}\right)^n\right] = 2$$

اذن فغاية المتتابعة هي 2.

مثال: لديك حد النوني (العام):

$$a_n = 1 + (0.1)^n$$

1- اكتب الحدود العشرة الاولى.
2- جد الغاية.

الحل:

1- الحدود العشرة الاولى موضحة في الجدول، من الملاحظ ان حدود المتتابعة تقترب من العدد 1 اعلى او اقل قليلاً

n	$0.1^n + 1$
1	1.1
2	1.01
3	1.001
4	1.0001
5	1.00001
6	1.
7	1.
8	1.
9	1.
10	1.

-2

$$\lim_{n\to\infty}(1 + 0.1^n) = 1$$

تعريف 3: المتتابعة التي لها غاية (نهاية) تسمى متتابعة متقاربة **Convergent sequence**. فاذا لم توجد غاية او اذا كان $\lim_{n\to\infty} a_n \to \infty$، فالمتتابعة متباعدة **Divergent sequence**.

نظرية 1:

أ) اذا كانت $\{a_n\}$ متقاربة، فان المتتابعة $\{a_n\}$ تكون محدودة.
ب) اذا كانت $\{a_n\}$ غير محدودة ، فأن المتتابعة $\{a_n\}$ تكون متباعدة.

المتتابعة $\{a_n\}$ متزايدة **increasing** اذا كانت $a_n \le a_{n+1}$ ومتناقصة **decreasing** اذا كانت $a_n \ge a_{n+1}$.

نظرية 2:

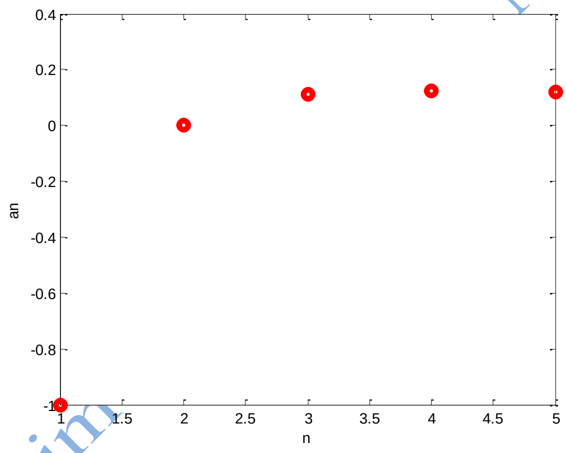
اذا كانت المتتابعة المحدودة متزايدة او متناقصة، فأنها متقاربة.

مثال: لديك $a_n = \frac{n-2}{n^2}$، اكتب الحدود الخمسة الاولى وارسم العلاقة البيانية بين a_n و n ثم جد الغاية وهل ان المتتابعة متقاربة ام متباعدة.

الحل: الحدود الخمسة هي:

n	1	2	3	4	5
$\frac{n-2}{n^2}$	-1	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{25}$
approximation	-1	0	0.111111	0.125	0.12

رسم العلاقة البيانية بين a_n و n



غاية المتتابعة

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-2}{n^2} = \frac{\infty}{\infty} \to\to\to \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

او بطريقة اخرى

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2} - \frac{2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}}{1} = \frac{0-0}{1} = 0$$

المتتابعة تقترب من 0، فهي متتابعة متقاربة. وهي تقترب من 0 عندما n=19998.

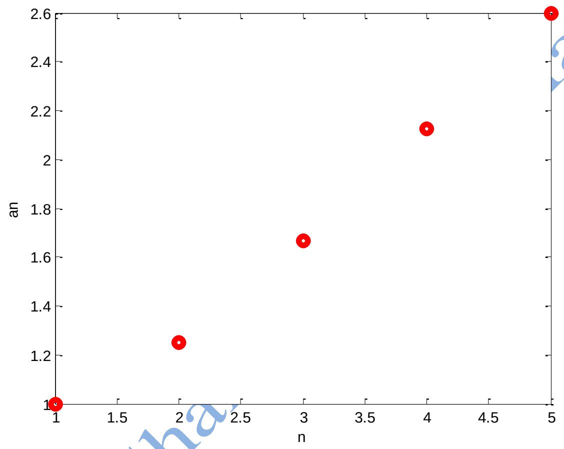
إعداد :
د. موسى كاظم شامر
د. ماجد عبدالله ناطق

مثال: لديك $a_n = \frac{n^2+1}{2n}$، اكتب الحدود الخمسة الاولى وارسم العلاقة البيانية بين a_n و n ثم جد الغاية وهل ان المتتابعة متقاربة ام متباعدة.

الحل: الحدود الخمسة هي:

n	1	2	3	4	5
$\frac{n^2+1}{2n}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{17}{8}$	$\frac{13}{5}$
approximation	1	1.25	1.66667	2.125	2.6

رسم العلاقة البيانية بين a_n و n



غاية المتتابعة

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n} = \frac{\infty}{\infty} \to\to\to \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

او بطريقة اخرى

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n}+\frac{1}{n}}{\frac{2n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+\frac{1}{n}}{2} = \frac{\infty+0}{2} = \infty$$

المتتابعة تقترب من ∞، فهي متتابعة متباعدة.

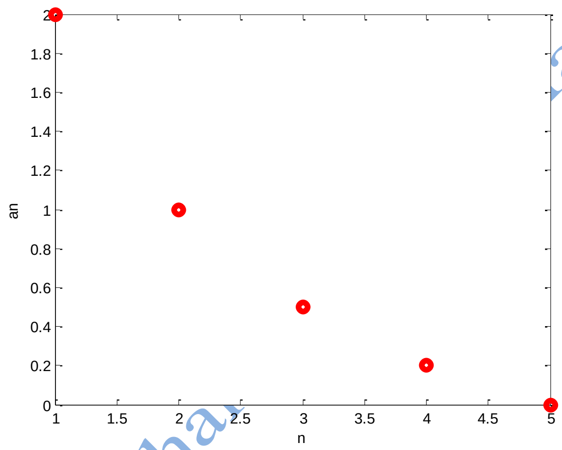
إعداد :
د. موسى كاظم شامر
د. ماجد عبدالله ناطق

مثال: لديك المتتابعة $a_n = \frac{5-n}{n+1}$، اكتب الحدود الخمسة الاولى وارسم العلاقة البيانية بين a_n و n ثم جد الغاية وهل ان المتتابعة متقاربة ام متباعدة.

الحل: الحدود الخمسة الاولى هي:

n	1	2	3	4	5
$\frac{5-n}{n+1}$	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	0
approximation	2	1	0.5	0.2	0

رسم العلاقة البيانية بين a_n و n



غاية المتتابعة

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5-n}{n+1} = \frac{\infty}{\infty} \to\to\to \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{1} = -1$$

او بطريقة اخرى

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5}{n} - 1}{1 + \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{0-1}{1} = -1$$

المتتابعة تقترب من -1، فهي متتابعة متقاربة.

إعداد :
د. موسى كاظم شامر
د. ماجد عبدالله ناطق

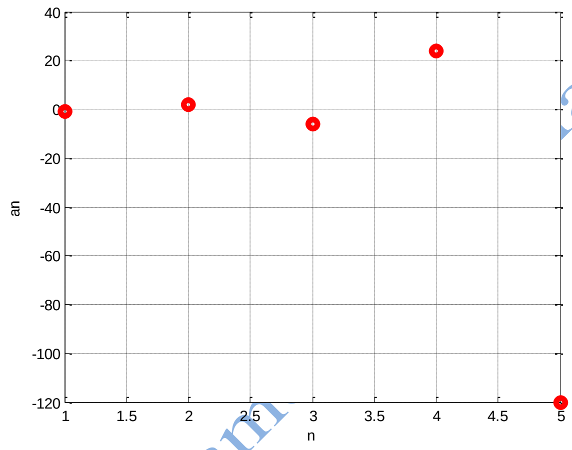
مثال: لديك المتتابعة $a_n = (-1)^n n!$، اكتب الحدود الخمسة الاولى وارسم العلاقة البيانية بين a_n و n ثم جد الغاية وهل ان المتتابعة متقاربة ام متباعدة.

الحل: الحدود الخمسة الاولى هي:

n	1	2	3	4	5
$(-1)^n n!$	-1	2	-6	24	-120

حدود المتتابعة تتزايد حيث ان $a_n = -1307674368000$ عند $n = 15$

رسم العلاقة البيانية بين a_n و n



غايةالمتتابعة

$$\lim_{n\to\infty} = (-1)^n n! = \pm \lim_{n\to\infty} n(n-1)(n-2)(n-3)\ \dots\dots..3.2.1) = \pm\infty$$

المتتابعة متباعدة

غايات شائعة

1- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$

2- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

3- $\lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n}} = 1$

4- $\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \qquad (|x| < 1)$

5- $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x \qquad for\ any\ x$

6- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0 \qquad for\ any\ x$

مثال:اثبت ان $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n)}{n}=0$

الحل: عند التعويض المباشر يكون الناتج بصيغة غير محددة indeterminate form $(0.\infty)$، لذلك نستخدم طريقة لوبيتال (اشتقاق البسط والمقام)

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{d}{dn}ln(n)}{\frac{d}{dn}(n)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0$$

تمرين: باستخدام خواص الدالة اللوغارتمية، اثبت ان $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n^2)}{n}=0$

مثال: اثبت ان $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n})=1$

الحل: نفرض ان $a_n=(n)^{\frac{1}{n}}$، بأخذ لوغاريتم للطرفين

$$ln(a_n)=\frac{1}{n}ln(n)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(ln(a_n)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}ln(n)\right)=0$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)=e^0=1$$

مثال: اثبت ان $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$

الحل: نفرض ان $a_n=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ ، بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين.

$$ln(a_n)=nln\left(1+\frac{x}{n}\right)=\frac{ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

وبذلك

$$\lim_{n\to\infty}\left(ln(a_n)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right)$$

بتطبيق قاعدة لوبيتال

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{\frac{-x}{n^2}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)}}{\frac{-1}{n^2}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-x}{n^2}\frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)}\frac{n^2}{-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{\left(1+\frac{x}{n}\right)}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(ln(a_n)\right) = \frac{x}{\left(1+\frac{x}{\infty}\right)} = \frac{x}{(1+0)} = x$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = e^x$$

وهو المطلوب.

مثال: اثبت ان $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = e^2$ باستخدام طريقة لوبيتال.

الحل:

الحل: نفرض ان $a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$ ، بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين.

$$ln(a_n) = nln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \frac{ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)}{\frac{1}{n}}$$

وبذلك

$$\lim_{n\to\infty}\left(ln(a_n)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)}{\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{ln(n+1)-ln(n-1)}{\frac{1}{n}}\right)$$

بتطبيق قاعدة لوبيتال

$$\lim_{n\to\infty}\left(ln(a_n)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{(n+1)}-\frac{1}{(n-1)}}{-\frac{1}{n^2}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n-1-n-1}{(n+1)(n-1)}}{-\frac{1}{n^2}}\right)$$

إعداد :
د. موسى كاظم شامر
د. ماجد عبدالله ناطق

$$\lim_{n\to\infty}\left(ln(a_n)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{-2}{(n^2-1)}}{-\frac{1}{n^2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{n^2-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(ln(a_n)\right)=\frac{2}{\left(1-\frac{1}{\infty}\right)}=2$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)=e^2$$

مثال: اثبت ان $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n+5}\right)^n=e^{-8}$ باستخدام طريقة لوبيتال.

الحل:

الحل: نفرض ان $a_n=\left(\frac{n-3}{n+5}\right)^n$ ، بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين.

$$ln(a_n)=n\,ln\left(\frac{n-3}{n+5}\right)=\frac{ln\left(\frac{n-3}{n+5}\right)}{\frac{1}{n}}$$

وبذلك

$$\lim_{n\to\infty}\left(ln(a_n)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{ln\left(\frac{n-3}{n+5}\right)}{\frac{1}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{ln(n-3)-ln(n+5)}{\frac{1}{n}}\right)$$

بتطبيق قاعدة لوبيتال

$$\lim_{n\to\infty}\left(ln(a_n)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{(n-3)}-\frac{1}{(n+5)}}{-\frac{1}{n^2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n+5-n+3}{(n-3)(n+5)}}{-\frac{1}{n^2}}\right)$$

إعداد :
د. موسى كاظم شامر
د. ماجد عبدالله ناطق

$$\lim_{n\to\infty}\left(ln(a_n)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{8}{n^2+2n-15}}{-\frac{1}{n^2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-8n^2}{n^2+2n-15}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-8n^2}{n^2\left(1+\frac{2}{n}-\frac{15}{n^2}\right)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-8}{1+\frac{2}{n}-\frac{15}{n^2}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(ln(a_n)\right)=\frac{-8}{1+\frac{2}{\infty}-\frac{15}{\infty^2}}=-8$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)=e^{-8}$$

مثال: اثبت ان $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n+5}\right)^n=e^{-8}$ باستخدام $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$.

الحل:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n+5}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\frac{n-3}{n}\right)^n}{\left(\frac{n+5}{n}\right)^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1-\frac{3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{5}{n}\right)^n}\right)$$

باستخدام $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1-\frac{3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{5}{n}\right)^n}\right)=\frac{e^{-3}}{e^5}=e^{-8}$$

المتتابعة متقاربة.

تمرين: اثبت ان $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n=e^{-2}$ باستخدام $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$.

إعداد :
د. موسى كاظم شامر
د. ماجد عبدالله ناطق

امثلة اضافية

مثال: أثبت ان

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right)=\frac{1}{2}$$

الحل: نوزع الضرب

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}\sqrt{n+1}-n\right)$$

نضرب بالعدد المرافق لـ $\sqrt{n}\sqrt{n+1}-n$

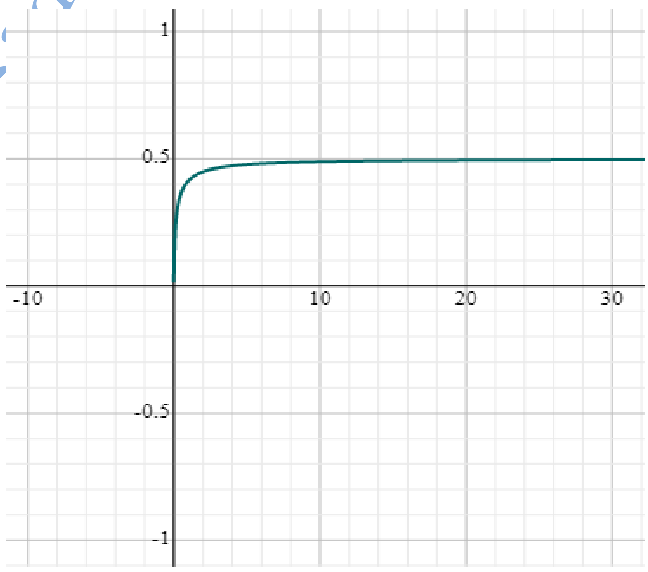
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{n}\sqrt{n+1}-n\right).\left(\sqrt{n}\sqrt{n+1}+n\right)}{\left(\sqrt{n}\sqrt{n+1}+n\right)}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\left(\sqrt{n}\sqrt{n+1}+n\right)}\right)$$

بقسمة كل من البسط والمقام على الحد ذو اعلى رتبة، نحصل

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{n}+1\right)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}+1\right)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}$$



مثال: أثبت ان

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right)=0$$

الحل: نضرب بالعدد المرافق لـ $\sqrt{n+1}-n$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{n+1}-n\right).\left(\sqrt{n+1}+n\right)}{\left(\sqrt{n+1}+n\right)}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+n\right)}\right)=\frac{\lim_{n\to\infty}(1)}{\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}\right)\ +\ \lim_{n\to\infty}(n)}=\frac{1}{\infty}=0$$