الفصل الخامس

المتسعات والعوازل

الفصل الخامس Chapter Five
المتسعات والعوازل

(1)سعة موصل معزول:

مما سبق لاحظنا ان جهد كرة موصلة مشحونه ومعزولة يعطى بالعلاقة التالية

$$V = k\frac{q}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

or $$q = 4\pi\varepsilon_o R V \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2$$

حيث q : هي الشحنة على الموصل الكروي و R نصف قطره

ولموصل كروي معين فان المقدار $(4\pi\varepsilon_o R)$ يكون ثابت (لان كل من R و ε_o و π ثابت)

اي ان الشحنة على جسم موصل كروي معين تتناسب طرديا مع الجهد

$$q \propto V \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3$$

يمكن تعميم العلاقة 3 لتصبح شاملة ونقول

((ان الشحنة على جسم موصل مشحون ومعزول وبأي شكل كان تتناسب طرديا مع جهده))

or $$q = CV \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4$$

حيث C : هو ثابت التناسب الذي يعتمد على حجم وشكل الموصل ويطلق عليه **سعة الموصل Capacitance**

تعريف **(سعة الموصل):-**

هي نسبة كمية الشحنة على الموصل الى جهده الكهربائي

$$C = \frac{q}{V} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 5$$

وحدة السعة الكهربائية الفاراد Farad (F) $\quad 1F = 10^{-6}\ \mu F$

سعة الموصل الكروى المعزول

من المعادلة 2 نجد ان

$$\frac{q}{V} = 4\pi\varepsilon_o R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6$$

$$\rightarrow \quad C = 4\pi\varepsilon_o R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 7$$

اي ان سعة الموصل الكروي تتناسب طرديا مع نصف قطره

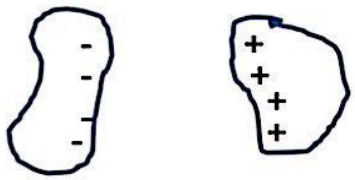
المتسعات الكهربائية Capacitors

عند تواجد مجموعة من الموصلات احدها بجوار الاخر فان جهد كل واحد منها في هذه الحالة لا يحدد بشحنته الخاصة فقط بل بقيمة واشارة الشحنات على الموصلات الاخرى وعلى شكل الموصلات وحجمها وموقعها ايضا.

مثال

عند وضع كرة مشحونة بشحنة موجبة الى جانب كرة ثانية مشحونة بشحنة سالبة فان جهدها ينخفض وفي الوقت نفسه يرتفع جهد الكرة السالبة، وان فرق الجهد بين الكرتين يتناقص نتيجة لتقريب احدى الكرتين من الاخرى. ان ذلك يؤدي الى ((ان سعة المجموعة المكونة من كرتين موصلتين مشحونتين بشحنتين مختلفتين قد ازدادت)) حيث ان :

$$C = \frac{q}{V}$$



يمكن تعميم هذه النتيجة لأي موصلين متجاورين ومعزولين عن بعضهما ويحملان شحنتين متساويتين في المقدار ومختلفتين في الاشارة.

سعة المتسعة الكهربائية

(هي النسبة بين شحنة المتسعة q الى فرق الجهد بين الموصلين المكونين لها).

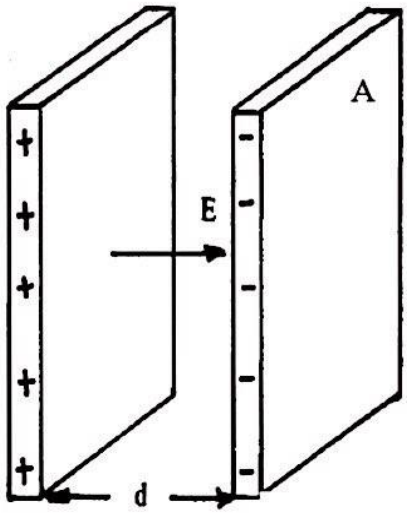
- **شحنة المتسعة q** :- هي مقدار الشحنة التي يحملها اي من الموصلين وبغض النظر عن الاشارة.
- محصلة الشحنة على المتسعة تساوي صفر.
- رمز المتسعة في الدوائر الالكترونية هو ⊣⊢
- وحدة السعة الكهربائية هي الفاراد F او $\frac{\text{كولوم}}{\text{فولت}}$
- $1F = 10^6\mu F = 10^9 nF = 10^{12} pF$

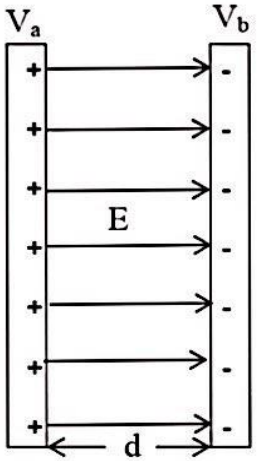
والمتسعات لها اهمية كبيرة في الفيزياء والهندسة الالكترونية. فهي تستخدم كأداة لخزن الطاقة الكهربائية، وهي من المكونات الاساسية للعديد من الدوائر الكهربائية كالمرشحات ودوائر التوليف والرنين وتوليد الموجات الكهرومغناطيسية في مختلف الاجهزة الكهربائية

متسعة اللوحين المتوازيين parallel plate capacitor

تتركب هذه المتسعة من لوحين او (صفيحتين) موصلين ومتوازيين مفصولين عن بعضهما بمسافة صغيرة مقارنة بابعادهما .

مساحة كل سطح تساوي A وأحدهما يحمل شحنة موجبة q^+ والاخر يحمل شحنة سالبة q^-.كما موضح بالشكل





الشكل على اليسار يمثل متسعة اللوحين المتوازيين بالأبعاد الثلاثية وعلى اليمين مقطع يمثل المتسعة

لقد وجدنا سابقا (تطبيقات على قانون كاوس التطبيق 6)ان المجال الكهربائي بين صفيحتين موصلتين ومتوازيتين مختلفتي الشحنة يعطى بالعلاقة

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

حيث E مجال كهربائي منتظم ((اي ان خطوط القوة متوازية ومتساوية البعد عن بعضها البعض))

و σ هي كثافة الشحنة السطحية على كل لوح من اللوحين.

$$\sigma = \frac{q}{A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2$$

حيث q مقدار الشحنة على احد اللوحين

من1 و 2 نحصل على

$$E = \frac{1}{\varepsilon_o}\frac{q}{A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3$$

$$\because \quad V_{ab} = Ed \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4$$

حيث d المسافة بين اللوحين

و من 3 و4

$$V_{ab} = \frac{1}{\varepsilon_o}\frac{qd}{A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 5$$

و بإعادة ترتيب 5 نحصل على

$$\frac{q}{V_{ab}} = \varepsilon_o \frac{A}{d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6$$

$$\text{or} \qquad C = \varepsilon_o \frac{A}{d}$$

((اي ان سعة المتسعة تتناسب طرديا مع مساحة لوح المتسعة وعكسيا مع المسافة بين اللوحين)).

المتسعة الكروية

احسب السعة الكهربائية لمتسعة كروية تتكون من سطحين كرويين موصلين متحدي المركز. نصف قطر السطح الداخلي a ونصف قطر السطح الخارجي b .

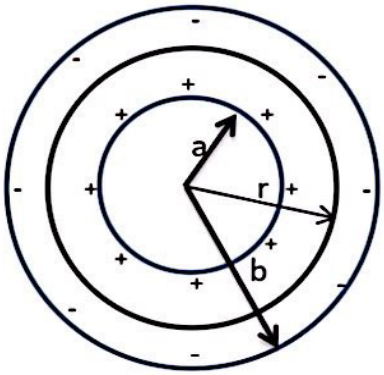
الحل:-

- الخطوة الاولى من الحل حساب شدة المجال الكهربائي في نقطة r التي تقع بين السطحين a<r<b وذلك باستخدام قانون كاوس حيث:

$$\oint_{G.S} E.ds = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

$$\rightarrow E\,(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

$$E = \frac{q}{(4\pi r^2)\varepsilon_o}$$



$$E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{-----(1)}$$

حيث E_r تمثل المجال في إنصف r بيه الطبيه
اتجاه المجال شعاعي باتجاه نصف القطر من $a \to b$
ولحساب فرق الجهد بين طرفي الموصلية الكروية فانا نطبق معادلة الجهد
وذلك لان اتجاه المجال نفس اتجاه المسار والزاوية بينهما تساوي صفر وان $(\cos\theta = 1)$

معادلة الجهد $dV = -E\,dr \quad \text{-----(2)}$

نعوض (2) في (1) فنحصل على

$$dV = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,dr \quad \text{---(3)}$$

نكامل طرفي (3) من $a \to b$ نحصل على

$$\int_a^b dV = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r^2} \quad \text{---(4)}$$

$$[V]_a^b = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b r^{-2}\,dr = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b$$

$$\Rightarrow V_b - V_a = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]$$

ولان $V_a > V_b$ نكتب

$$\text{or}\quad V_a - V_b = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]$$

$$\Rightarrow V_{ab} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right]$$

$$\text{or}\quad V_{ab} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{b-a}{ab}\right] \quad \text{----(5)}$$

وباعادة ترتيب (5) نحصل

$$\frac{q}{V_{ab}} = 4\pi\epsilon_0\left[\frac{ab}{b-a}\right] \quad \text{---(6)}$$

وتكون المعادلة اعلاه تمثل السعة بين كرتين متحدتي المركز لذا نرمز لها بالرمز C

$$\Rightarrow \quad C = 4\pi\epsilon_0\left[\frac{ab}{b-a}\right] \quad \text{---(7)}$$

صيغة السعة الكروية

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$

الخطوة الثانية حساب فرق الجهد في النقطة r باستخدام معادلة انحدار الجهد

لكون المجال شعاعي وباتجاه نصف القطر، لذا فأن الزاوية بين اتجاه المجال والمسار تساوي صفر

(θ =0 and cosθ = 1→ E cosθ dr = Edr)

$$dV = -E.dr$$

$$\int_a^b dV = -\int_a^b E.dr = -\int_a^b Edr$$

$$V_b - V_a = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\int_a^b \frac{dr}{r^2}$$

$$V_b - V_a = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{r}\right]_a^b$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{a-b}{ab}\right]$$

∵ الجهد V_a (موجب) اعلى من V_b (سالب) لذا فان

$$-(V_b - V_a) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{a-b}{ab}\right]$$

$$\rightarrow V_a - V_b = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{a-b}{ab}\right]$$

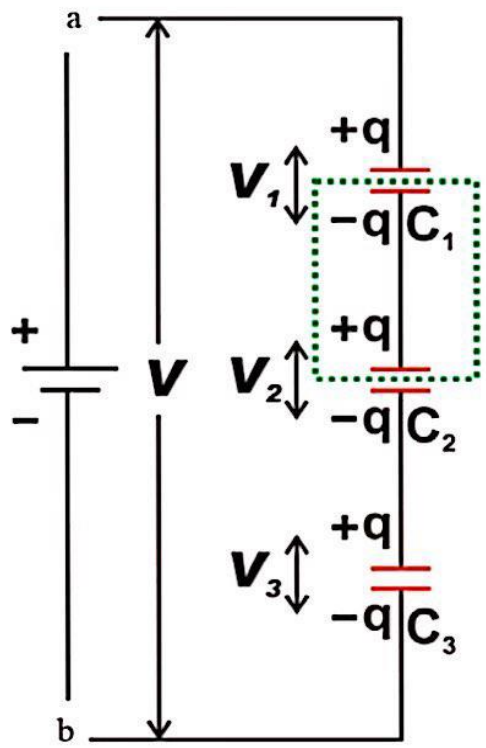
$$\rightarrow \quad V_{ab} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{b-a}{ab}\right]$$

$$\frac{q}{V_{ab}} = 4\pi\varepsilon_o\left[\frac{ab}{b-a}\right]$$

Or $\quad C = 4\pi\varepsilon_o\left[\frac{ab}{b-a}\right]$

توصيل المتسعات

توصيل المتسعات على التوالي



في هذا النوع من التوصيل الشحنة على كل لوح يجب ان تكون متماثلة وذلك لان صافي الشحنة على الواح المتسعات يساوي صفر قبل توصيل البطارية

وعند توصيل الطرفين a و b بالبطارية فأنها تعمل على ابعاد الشحنات عن بعضها البعض و يبقى صافي الشحنة عليها مساوي للصفر ايضا.

$\because \quad q = CV \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 1$

And $V_1 = \frac{q}{c_1}$, $V_2 = \frac{q}{c_2}$, $V_3 = \frac{q}{c_3}$ 2

$\because \quad V = V_1 + V_2 + V_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 3$

$$\rightarrow V = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right) \quad \ldots\ldots\ldots 4$$

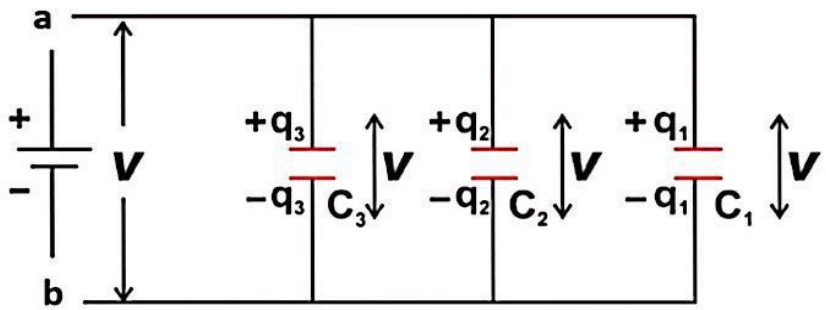
$$\text{or } \frac{V}{q} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 5$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 6$$

((من العلاقة 6 نجد ان السعة المكافئة في حالة التوصيل على التوالي تكون اصغر من اصغر المتسعات دائما)) لذا فهي تستخدم لتقليل السعة.

توصيل المتسعات التوازي

ترتيب المتسعات كما في الشكل التالي يوضح توصيل المتسعات على التوازي ولكون الالواح العليا تتصل بطرف السلك الموجب لذا فان هذه الالواح تمثل سطح تساوي جهد، كذلك فان اتصال الالواح السفلى مع طرف السلك السالب يجعلها سطح تساوي جهد ايضا. يتساوى فرق الجهد بين سطوح تساوي الجهد



و بما ان فرق الجهد يتساوى بين سطوح تساوى الجهد.

لذا فان فرق الجهد على طرفي كل متسعة منفرده هو نفسه ويساوي فرق الجهد على طرفي البطارية V_{ab}

اي ان

$$V_{ab} = V = V_1 = V_2 = V_3$$

∵ الشحنة على كل متسعة $q = C\ V$ لذا فان:

$$q_1 = C_1\ V\ ,\ q_2 = C_2\ V\ ,\quad q_3 = C_3\ V$$

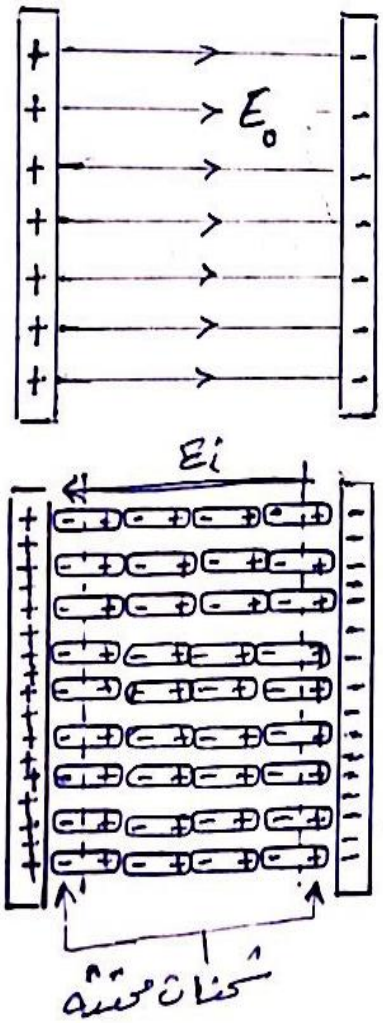
وان الشحنة الكلية للمجموعة في هذه الحالة

$$Q = q_1 + q_2 + q_3$$
$$Q = V(C_1 + C_2 + C_3)$$
$$C/V = (C_1 + C_2 + C_3)$$
$$C_{eq} = (C_1 + C_2 + C_3)$$

اي في توصيل المتسعات على التوازي تكون السعة المكافئة هي حاصل جمع المتسعات مهما كان عددها

العازل بين لوحي متسعة مشحونة

- المجال الكهربائي E_0 بين لوحي المتسعة منتظم
- عند ادخال مادة العازل بين لوحي المتسعة فانه جزيئات العازل تتأثر بالمجال وتتراصف بحيث يصبح العازل مستقطباً
- تظهر شحنة محثثة موجبة q_i على العازل المقابل للوح السالب وشحنة سالبة محثثة على السطح الآخر
- تولد الشحنات المحثثة مجال كهربائي E_i داخل العازل معاكس للمجال الاصلي E_0
- محصلة المجال الكهربائي داخل العازل تساوي E وهي اقل من المجال الاصلي E_0



$$E = \frac{\sigma - \sigma_i}{\epsilon_0}$$

σ: كثافة الشحنات الحرة او المقيدة.

σ_i: كثافة الشحنات الكرة السطحية.

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_i}{\epsilon_0}$$

$$= E_0 - E_i$$

الاستنتاج

- وضع عازل بين لوحي متسعة يعمل على اضعاف المجال الاصلي.

electric susceptibility (η) التأثرية الكهربائية
(قابلية التكهرب)

ان الشحنات الحثية تولدت بسبب المجال الكهربائي E المؤثر لعازل لذا فانه فيتوقع سوف تعتمد على قيمة ذلك المجال وكذلك على مادة العازل.

تعرف التأثرية الكهربائية بأنها نسبة كثافة الشحنة الحثية (σ_i) وحصلة شدة المجال الكهربائي

$$\eta = \frac{\sigma_i}{E}$$

متأثرية الفراغ تساوي صفر وذلك لعدم وجود ذرات في الفراغ عليه للمجال ان يزيح شحنات.

$$\eta_{vacuum} = 0$$

وحدات التأثرية $\frac{Coul/m^2}{N/Coul} \leftarrow \frac{Coul^2}{N.m^2}$

$$\sigma_i = \eta E$$

لعينة معينة من شدة المجال الكهربائي E، فان التأثرية الاكبر للمادة تقابل شحنة حثية اكبر.

وبدلالة التأثرية فان المعادلة $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_i}{\epsilon_0}$ عليه تكتب بالشكل

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\eta}{\epsilon_0} E$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{(1+\eta/\epsilon_0)\epsilon_0}$$

$$= \frac{\sigma}{K\epsilon_0}$$

حيث $K = 1 + \frac{\eta}{\epsilon_0}$

حيث K تدعى ثابت العزل للمادة او (معامل العزل) K كمية ظالية من الوحدات ((وحدات η لغن وحدات ϵ_0))

$$K_{vacuum} = 1$$

(7)

السماحية الكهربائية (ϵ) electric permitivity

يطلق على حاصل ضرب $K\epsilon_0$ بالسماحية الكهربائية للمادة العازلة ويرمز له بالرمز ϵ

i.e $\epsilon = K\epsilon_0$

السماحية للفراغ $\epsilon_{vacuum} = \epsilon_0$

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \ \frac{Coul}{N.m^2}$$

المواد العازلة تمتلك ثلاث خواص كهربائية (ϵ, K, η) العازل بشكل تام

$$K = 1 + \frac{\eta}{\epsilon_0} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

$$\epsilon = \epsilon_0 K = \epsilon_0 + \eta$$

$$\eta = \epsilon_0 (K-1) = \epsilon - \epsilon_0$$

وبدلالة السماحية فان

محصلة المجال E تكتب

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

تأثير العازل على السعة

مكثف ذات لوحين متوازيين بينهما مادة عازلة ثابت عزلها K لقد وجدنا بان محصلة المجال بوجود العازل تعطى بالعلاقة

$$E = \frac{\sigma}{K\epsilon_0} = \frac{1}{K\epsilon_0}\frac{q}{A}$$

$$\because V = Ed$$

$$\rightarrow V = \frac{1}{K\epsilon_0}\frac{qd}{A}$$

$$\text{or } \frac{q}{V} = K\epsilon_0 \frac{A}{d} \rightarrow C = K\epsilon_0 \frac{A}{d}$$

$$\text{But } C_0 = \epsilon_0 \frac{A}{d} \rightarrow \boxed{\frac{C}{C_0} = K}$$

مثال: لوحان موصلان متوازيان مساحة كل منهما $1m^2$، شحنا بشحنتين متساويتين ومختلفتين، مقدار كل منهما $30\mu C$ ملئ الحيز بينهما للوحين مادة عازلة ثابت عازليتها $15\times10^{-12}\frac{Coul^2}{N.m^2}$ احسب:

أ- محصلة شدة المجال في العازل E

ب- الكثافة السطحية للشحنة الحثية على وجهي العازل σ_i

ج- مركبة شدة المجال الكهربائي المتولدة بسبب الشحنات الحرة E_0

د- مركبة شدة المجال الكهربائي بسبب الشحنات الحثية E_i

الحل

أ) لايجاد محصلة المجال E

$$\sigma = \frac{q}{A} = \frac{30\times10^{-6}\ coul}{1\ m^2}$$
$$= 30\times10^{-6}\ coul/m^2$$

$$E = \frac{1}{K\epsilon_0}\sigma$$
$$= \frac{1}{\epsilon}\sigma$$
$$= \frac{1}{15\times10^{-12}} \times 30\times10^{-6}$$
$$= 2\times10^{6}\ \frac{V}{m} \text{ او } \frac{N}{Coul}$$

ب- الكثافة السطحية للشحنات الحثية σ_i

$$\sigma_i = \eta E = (\epsilon - \epsilon_0)E$$
$$= (15-8.85)\times10^{-12}\times2\times10^{6}$$
$$= 12.3\times10^{-6}\ \frac{Coul}{m^2}$$

الحل

أ) مركبة المجال الكهربائي المتولدة بسبب الشحنات الحرة E_0

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$
$$= \frac{30\times10^{-6}\ Coul/m^2}{8.85\times10^{-12}\ coul^2/N.m^2}$$
$$= 3.39\times10^{6}\ \frac{N}{Coul} \text{ او } \frac{V}{m}$$

ج) مركبة المجال الكهربائي المتولدة بسبب الشحنات الحثية E_i

$$E_i = \frac{\sigma_i}{\epsilon_0}$$
$$= \frac{12.3\times10^{-6}\ Coul/m^2}{8.85\times10^{-12}\ coul^2/N.m^2}$$
$$= 1.39\times10^{6}\ \frac{V}{m}$$

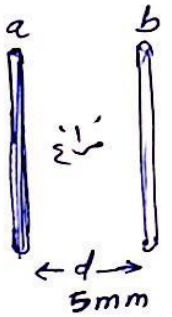
وعليه صار ايضاً من العلاقة

$$E = E_0 - E_i$$
$$E_i = E_0 - E$$
$$= (3.39-2)\times10^{6}$$
$$= 1.39\times10^{6}\ \frac{N}{C}$$

مثال: مكثف ذات صفيحتين متوازيتين موضوعة في الهواء ومساحة كل منها لوحيها $2\ m^2$ والمسافة بينهما $5\ mm$. وضع فرق الجهد مقداره $10^4\ Volt$ احسب:

أ) سعة المكثف ب) الشحنة على كل صفيحة ج) الكثافة السطحية للشحنة
د) شدة المجال الكهربائي.

الحل



أ) $C_0 = \epsilon_0 \frac{A}{d}$

$= 8.85 \times 10^{-12} \times \frac{2\ m^2}{5 \times 10^{-3}\ m}$

$= 3.54 \times 10^{-9}\ Farad$

$= 3.54\ nF$

ب) $q = C V_{ab}$

$= 3.54 \times 10^{-9} \times 10^4$

$= 3.54 \times 10^{-5}\ Coul$

ج) $\sigma = \frac{q}{A} = \frac{3.54 \times 10^{-5}\ Coul}{2\ m^2}$

$= 1.77 \times 10^{-5}\ Coul/m^2$

د) $E_0 = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma$

$= \frac{1.77 \times 10^{-5}}{8.85 \times 10^{-12}} = 2 \times 10^6\ \frac{Volt}{m}$

or $E = \frac{V_{ab}}{d} = \frac{10^4}{5 \times 10^{-3}}$

$= 2 \times 10^6$

مثال ٢ اذا عزلت الشحنة في المثال الاول عن المصدر الشاحن ووضع نوع عازل سمكه 5mm بين الموصلين احسب
أ) الشحنة ب) فرق الجهد ج) شدة المجال داخل العازل د) شدة المجال المتبقي عن الشحنات المحتثة علماً بان ثابت العازل ($K=5$).

الحل

أ) بعد ادخال العازل

$$C = K\epsilon_0 \frac{A}{d}$$
$$= K C_0$$
$$= 5 \times 3.54 \times 10^{-9}$$
$$= 17.7 \times 10^{-9} \ F$$

ب) $V_{ab} = \frac{q}{C}$

$$= \frac{3.54 \times 10^{-5}}{17.7 \times 10^{-9}}$$
$$= 2 \times 10^{3} \ Volt$$

ج) $E = \frac{V_{ab}}{d}$

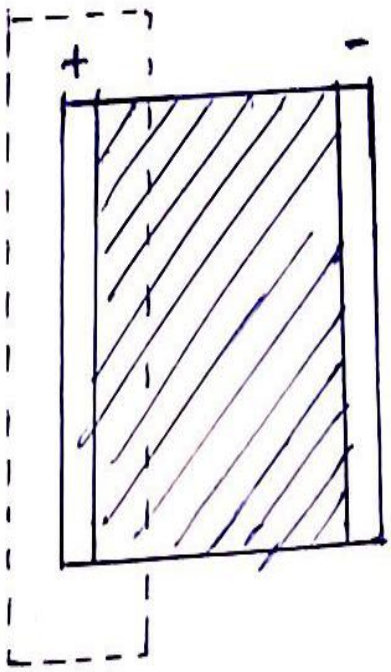
$$= \frac{2 \times 10^{3}}{5 \times 10^{-3}} = 4 \times 10^{5} \ \frac{N}{C}$$

$$E_i = E_0 - E$$
$$= 2 \times 10^{6} - 4 \times 10^{5}$$
$$= 16 \times 10^{5}$$
$$= 1.6 \times 10^{6} \ \frac{N}{C}$$

مثال

لوحان متوازيان مساحة كل واحد منهما $1m^2$ تفصل بينهما مسافة $1mm$ وضعت على اللوحين شحنة مقدارها $30\ \mu C$ على التوالي. إذا كان سماحية المادة العازلة $15\times10^{-12}\ \frac{C^2}{N.m^2}$ احسب شدة المجال في العازل

الحل



نتصور سطح كاوس على شكل متوازي مستطيلات يحيط باحد اللوحين فاصلاً العازل مساحة كل من قاعدتيه تساوي مساحة لوحة المتسعة

$$\oint_{G.S} \vec{D}.d\vec{s} = q$$

$$\Rightarrow DA = q$$

$$D = \frac{q}{A}$$

$$= 30\times10^{-6}\ (Coul/N.m)/1m^2$$

$$= 30\times10^{-6}\ \frac{Coul}{m^2}$$

$$E = \frac{D}{\epsilon}$$

$$= \frac{30\times10^{-6}}{15\times10^{-12}}$$

$$= 2\times10^{6}\ \frac{V}{m}$$

الطاقة المخزونة في المتسعات

تخزن في المتسعة طاقة كامنة كهربائية لا تساوي الشغل اللازم لشحنه. وعليه استعادة هذه الطاقة بتفريغ المتسعة.

- انه عليه شحن المتسعة تتطلب انتقال الشحنات من الصفيحة ذات الجهد الواطئ الى الصفيحة ذات الجهد العالي. وهذا يحتاج الى صرف طاقة.
- نفترض ان عملية الشحن تبدأ وصفيحتا المتسعة مفرغتان من الشحنة وان الشحن يتم بأخذ شحنة مقدارها dq من احدى الصفيحتين ونقلها الى الصفيحة الاخرى.
- عندما يبلغ مجموع الشحنة المنقولة مقداراً قدره q' فان الجهد على طرفي المتسعة يحدد بالعلاقة

$$V = \frac{q'}{C} \quad \text{——} \quad (1)$$

لنقل شحنة dq' اخرى فان الشغل اللازم لنقلها يساوي

$$dW = V\,dq' \quad \text{——} \quad (2)$$

من (1) و (2)

$$\text{or} \quad dW = \frac{q'}{C}\,dq' \quad \text{——} \quad (3)$$

ولايجاد الشغل الكلي اللازم لشحن المتسعة نكامل (3)

$$W = \int dW = \int_0^q \frac{q'}{C}\,dq'$$

$$= \frac{1}{2}\frac{q'^2}{C}\Big]_0^q$$

$$\Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2}\,q^2/C}$$

$\because q = CV$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}qV = U$$

وهذا هو الشغل المختزن يساوي الطاقة المخزونة لذا فان

U ١

$$\therefore U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}qV$$

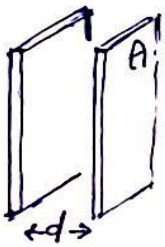
حيث U ترمز للطاقة المخزونة في المكثف

- ان حجم مكثف ما يضاعف توليد مجال كهربائي بين لوحي المكثف.
- ان المجال الكهربائي المتولد يزداد بزيادة الشحنة على المكثف وينادي صفر عندما تكون المكثف غير مشحون.

العلاقة بين الطاقة المخزونة U وشدة المجال الكهربائي E

كثافة الطاقة

يطلق على الطاقة المخزونة لوحدة الحجم بـ كثافة الطاقة



$$u = \frac{U}{\mathcal{V}} \quad \text{——} ①$$

u: كثافة الطاقة
$\mathcal{V}$: الحجم
الحجم المقيد بين الحجم الذي يشغله المجال الكهربائي $\mathcal{V} = Ad$ (الحجم المحصور بين اللوحين)
A: مساحة اللوح، d: المسافة الفاصلة بين اللوحين

$$\Rightarrow u = \frac{\frac{1}{2}CV^2}{Ad} \quad \text{——} ②$$

$$\because C = K\epsilon_0 \frac{A}{d} \quad , \quad V = Ed \quad \text{——} ③$$

من ③، ③

$$u = \frac{1}{2}K\epsilon_0 E^2 \quad \text{——} ④ \quad Joul/m^3$$

من المعادلة ④ نلاحظ

ان كثافة الطاقة المخزونة في اي حجم تتناسب طرديا مع مربع شدة المجال الكهربائي في ذلك الحجم.

$$u = \frac{1}{2}\epsilon E^2$$

$$= \frac{1}{2}ED$$

$$= \frac{1}{2}\frac{D^2}{\epsilon}$$

(17)

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_i}{\epsilon_0}$$

محصلة المجال داخل العازل

$$\sigma_i = \eta E$$

η : التأثرية الكهربائية

$$E = \frac{\sigma}{(1 + \frac{\eta}{\epsilon_0})\epsilon_0}$$

$$K = 1 + \frac{\eta}{\epsilon_0}$$

K : ثابت العزل

$$E = \frac{1}{K\epsilon_0}\sigma$$

$$\epsilon = K\epsilon_0$$

$$\epsilon = \epsilon_0 + \eta$$

ϵ السماحية الكهربائية

$$D = \epsilon E$$

D يدعى

$$P = \sigma_i$$

P عزم ثنائي القطب لوحدة الحجم

$$P = \eta E$$

$$D = \epsilon_0 E + P$$

$$E = E_0 - E_i$$

حل تمارين الفصل الخامس كتاب جيمس براوي ص١٢٤

٥-١ ما مقدار الشحنة الإضافية التي يجب وضعها على منشه سعته 30pF لرفع جهدها بمقدار 12 V.

الحل

نفرض أن شحنة المنشه الابتدائية تساوي q_1 وفرق جهدها V_1

" " " " بعد رفع جهدها أصبح q_2

$$C = \frac{q_1}{V_1} \quad \text{——} ①$$

$$q_1 = C V_1 \quad \text{——} ②$$

$$C = \frac{q_2}{V_2} = \frac{q_2}{V_1 + 12}$$

$$q_2 = C (V_1 + 12)$$

$$q_2 = C V_1 + C \times 12 \quad \text{——} ③$$

بطرح ② من ③

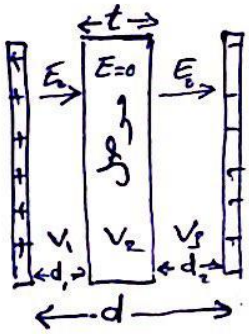
$$q_2 - q_1 = C \times 12$$

$$= 30 \times 10^{-12} \times 12$$

$$= 36 \times 10^{-11} \text{ Coul}$$ الشحنة الإضافية

٥-٤ منشه ذات لوحين متوازيين المسافة بينهما لوحيا d وسعتها C أدخل لوح موصل مفزول بينهما لوحيا مقدار سمكه t أحسب مقدارها تؤول إليه سعة هذه المنشه.

الحل



بعد إدخال اللوح الموصل يصبح فرق الجهد بين لوحي المنشه V

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \quad \text{——} ①$$

$$= E_0 d_1 + E t + E_0 d_2$$

$V = Ed$

∵ $E = 0$ معدوم المجال داخل الموصل

$$\Rightarrow V = E_0 (d_1 + d_2) \quad \text{——}$$
$$= E_0 (d - t) \quad \text{——} (3)$$
$$\because E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q/A}{\epsilon_0} \quad \text{—— } 4$$

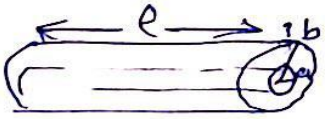
بتعويض (4) في (3)

$$\therefore V = \frac{q/A}{\epsilon_0} (d-t) = \frac{q}{\epsilon_0 A} (d-t) \quad \text{—— } (5)$$

بعد اعادة ترتيب المعادلة 5

$$\frac{q}{V} = \frac{\epsilon_0 A}{(d-t)}$$
$$= \frac{\epsilon_0 A \times \frac{d}{d}}{(d-t)}$$
$$= \frac{C_0 d}{(d-t)}$$

o - o اسطوانة مصمتة نصف قطرها a محاطة باسطوانة مجوفة متحدة المحور نصف قطرها الداخلي b كما في الشكل. كل من الاسطوانتين طولها l حيث $l \gg b$.



الحل: علينا اولاً حساب فرق الجهد V_{ab}

ثم حساب السعة C كما في الحالة السابقة

$$V_{ab} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \lambda \ln \frac{b}{a}$$
$$= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{l} \ln \frac{b}{a}$$

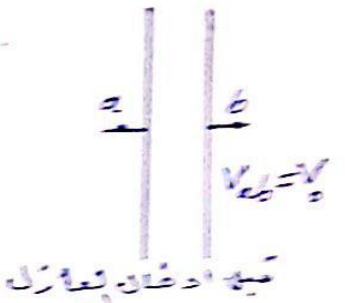
وبعد اعادة ترتيب المعادلة اعلاه نحصل على

$$\frac{q}{V_{ab}} = C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{b}{a}}$$

20

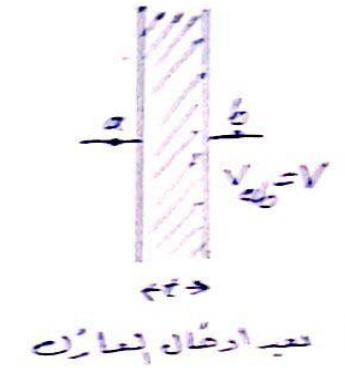
٥-٤ مكثف ذات لوحين متوازيين سعته C_0 حُمّلت ببطارية حتى اكتسبت شحنة مقدارها Q_0، ثم عُزلت عن البطارية وأدخل لوح عازل سمكه $\frac{d}{2}$ بين لوحيه (شكل ٢) اعتبر الشحنة في بطاقة المخزونة في المكثف قبل وبعد ادخال العازل (ب) كيف تفسر هذا التغير على ضوء ما تعلمه عن بطاقة

أ) الشحنة قبل ادخال العازل Q_0



$$\Rightarrow Q_0 = C_0 V_0 \quad \text{——} (1)$$

ان عزل البطارية وادخال العازل معناه ان الشحنة على المكثف تبقى ثابتة وتساوي Q_0 بعد ادخال العازل يصبح السعة C



$$\Rightarrow Q_0 = C V \quad \text{——} (2)$$

حيث V : فرق الجهد بعد ادخال العازل

من (1) و (2) نحصل على

$$C_0 V_0 = C V \quad \text{——} (3) \qquad C = K C_0$$

$$C_0 V_0 = K C_0 V$$

$$\Rightarrow V_0 = K V \quad \text{——} 4 \rightarrow V = \frac{V_0}{K}$$

U_0 : بطاقة المخزونة قبل ادخال العازل $= \frac{1}{2} C_0 V_0^2$

U = المخزونة بعد ادخال العازل $= \frac{1}{2} C V$

الفقد في الطاقة المخزونة $U_0 - U$

$$\Rightarrow U_0 - U = \frac{1}{2} C_0 V_0^2 - \frac{1}{2} C V^2$$

$$= \frac{1}{2} C_0 V_0^2 - \frac{1}{2} K C_0 \left(\frac{V_0}{K}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} C_0 V_0^2 \left(1 - \frac{1}{K}\right)$$

$$= C_0 V_0^2 \left(\frac{K-1}{2K}\right)$$

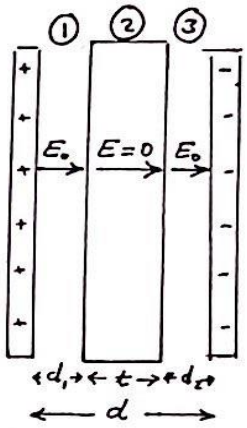
(ب) ان الفقد في بطاقة المخزونة عند ثبوت الشحنة Q_0 استهلاك على شكل شغل عند ادخال العازل في المكثف.

٥ - ١٦ متسعة مكونة ذات لوحين متوازيين مساحة $100\ cm^2$ والمسافة بين لوحيها $2\ mm$ وفرق جهد بين طرفيها $200\ V$. أدخل لوح موصل مفرول بين لوحي المتسعة سمكه $1mm$ أحسب p) سعة المتسعة قبل وبعد إدخال اللوح الموصل ب) الطاقة المخزونة قبل وبعد إدخال اللوح الموصل. ج) الشغل الذي يبذله عامل خارجي لإدخال اللوح الموصل.

p) $C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d}$

①
$$= \frac{8.85\times10^{-12}\times100\times10^{-4}}{2\times10^{-3}}$$
$$= 4.425\times10^{-11}\ F$$

قبل إدخال العازل



②

نعرف أن سمك الموصل المفرول t

فرق الجهد بين لوحي المتسعة بعد إدخال الموصل المفرول

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$
$$= E_0 d_1 + E t + E_0 d_2$$
$$= E_0(d_1 + d_2) + Et$$
$$\because d_1 + d_2 = d - t$$
$$\Rightarrow V = E_0(d-t) + Et$$

المجال داخل الموصل يساوي صفر

$$i.e\ E = 0$$
$$\Rightarrow V = E_0(d-t)$$

فرق الجهد بين لوحي المتسعة بعد إدخال الموصل المفرول

$$\because E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 A}$$
$$\Rightarrow V = \frac{q}{\epsilon_0 A}(d-t)$$

وبإعادة ترتيب المعادلة الأخيرة

$$\frac{q}{V} = \frac{\epsilon_0 A}{d-t}$$

$$\text{or } C = \frac{\epsilon_0 A}{d-t} = \frac{\frac{\epsilon_0 A}{d} d}{d-t} = \frac{C_0 d}{d-t}$$

$$= \frac{8.85\times10^{-12}\times100\times10^{-4}}{(2mm-1mm)\times10^{-3}}$$
$$= 8.85\times10^{-11}\ F$$

السعة بعد إدخال العازل

الطاقة المخزونة قبل إدخال الموصل

$$U_0 = \frac{1}{2} C_0 V_0^2$$
$$= \frac{1}{2}\times4.425\times10^{-11}\times(200)^2$$
$$= 8.85\times10^{-7}\ Joul$$

$$\because E_0 = \frac{V_0}{d} = \frac{200\ volt}{2\times10^{-3}} = 10^5\ \frac{V}{m}$$

$$\Rightarrow V = E_0(d-t)$$
$$\Rightarrow V = 10^5\ \frac{V}{m}\times(2-1)\times10^{-3}\ m$$
$$= 100\ volt$$

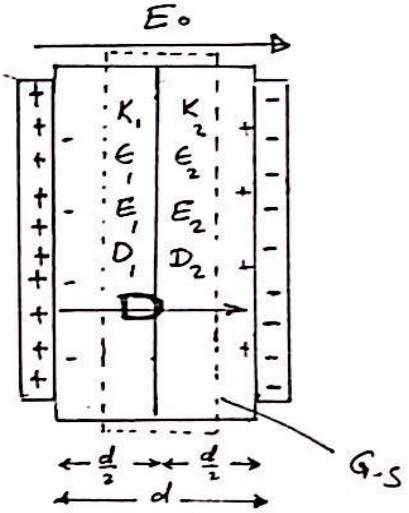
$$U = \frac{1}{2} C V^2$$
$$= \frac{1}{2}\times8.85\times10^{-11}\times(100)^2$$
$$= 4.425\times10^{-7}\ Joul$$

$$\Delta U = U - U_0$$
$$= -4.425\times10^{-7}\ Joul$$

الشغل الذي ينجزه عامل خارجي عند إدخال الموصل المفرول

السؤال ٥ - ١٦ مسألة مهمة وأنصح بشدة بدراستها

٧-٥ سُمك ذات لوحين متوازيين تحمل شحنة ذات كثافة سطحية مقدارها σ ومساحة A. وضع داخل لوحاه عازلان مختلفان في السمك بحيث امتلأ الفراغ بين لوحي المتسعة، احسب (أ) مقدار الإزاحة D داخل كل من العازلين مستخدماً قانون كاوس في العوازل (ب) شدة المجال الكهربائي E داخل العازلين (ج) فرق الجهد V بين لوحي المتسعة (د) سعة المتسعة. افرض ان المسافة بين لوحي المتسعة d.



أ) نرسم على كاوس على شكل متوازي مستطيلات يحيط بالمنطقة العاصلة بين العازلين مساحة جانبية المقابلة للوحي المتسعة تساوي مساحة اللوحين A.

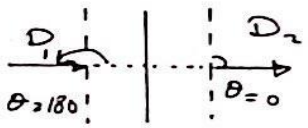
∵ المجال خارج العازلين يساوي صفر

$$\Rightarrow \oint_{G.S} \vec{D}\cdot d\vec{s} = q = 0$$

لأن الشحنة داخل سطح كاوس تساوي صفر.

$$\Rightarrow \oint_{G.S} \vec{D}\cdot d\vec{s} = \oint D\cos\theta\, ds$$

$$= -D_1 A + D_2 A = 0$$



$$\Rightarrow -D_1 + D_2 = 0$$

$$\text{or } D_1 = D_2 = D$$

$$\because D = \epsilon E \;,\; E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

$$\Rightarrow D = \sigma$$

$$\Rightarrow D_1 = D_2 = \sigma$$

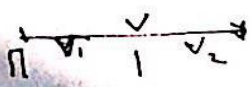
* ملاحظة:- انه وضع العازل بين لوحي المتسعة تؤثر على شدة المجال الكهربائي عند بقاء الشحنة ثابتة.

ب) $\because E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_1}$, $\because E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_2}$

$$\Rightarrow E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0 K_1} \;,\; E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0 K_2}$$

ج) $V = V_1 + V_2$

$$= E_1\left(\frac{d}{2}\right) + E_2\left(\frac{d}{2}\right)$$



$$V = \frac{\sigma d}{2\epsilon_0 K_1} + \frac{\sigma d}{2\epsilon_0 K_2}$$

$$= \frac{\sigma d}{2\epsilon_0}\left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right)$$

$$= \frac{\sigma d}{2\epsilon_0}\left(\frac{K_2 + K_1}{K_1 K_2}\right)$$

د) $\because V = \frac{\sigma d}{2\epsilon_0}\left(\frac{K_2+K_1}{K_1 K_2}\right)$

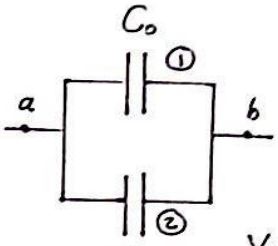
$$= \frac{q d}{2\epsilon_0 A}\left(\frac{K_2+K_1}{K_1 K_2}\right)$$

$$\frac{q}{V} = \frac{2\epsilon_0 A}{d}\left(\frac{K_1 K_2}{K_1+K_2}\right)$$

$$\text{or } C = \frac{2\epsilon_0 A}{d}\left(\frac{K_1 K_2}{K_1+K_2}\right)$$

٥ - ١٨ متسعتان مربوطتان على التوازي سعة كل منهما C_0 شحنتا لفرق جهد مقداره V_0 ، ثم عزلتا عن مصدر الشحن ودخل لوح عازل في احدى المتسعتين بحيث ملأ الفراغ بينه لوح عازل كما مبينه في الشكل (٢) اوجد (أ) فرق الجهد الجديد V (ب) مقدار الشحنة التي تنتقل من متسعة لاخرى نتيجة لوضع العازل.

شكل (١)



أ) C_{eq} السعة المكافئة قبل وضع العازل شكل (١) نجد

$$C_{eq} = C_0 + C_0 = 2C_0 \quad \text{——} ①$$

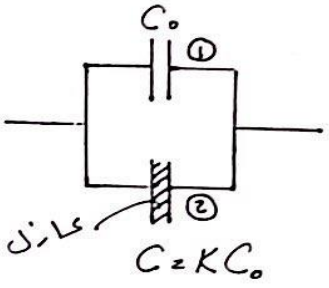
$$\because q = CV$$

$$\Rightarrow q = C_{eq} V_0 \quad \text{——} ②$$

من ①، ② نعوض في ②

$$= 2C_0 V_0 \quad \text{——} ③$$

شكل (٢)



C'_{eq} السعة المكافئة بعد ادخال العازل شكل (٢)

$$C'_{eq} = C_0 + C$$

$$= C_0 + KC_0 \quad \text{——} ④$$

$$\Rightarrow q = C'_{eq} V \quad \text{——} ⑤$$

حيث V الجهد بعد ادخال العازل

من ④، ⑤ نعوض في

$$\text{or} \quad q = C_0 (1+K) V$$

$$\text{or} \quad V = \frac{q}{C_0 (1+K)} \quad \text{——} 6$$

ملاحظة: انه عزل المتسعة عن مصدر الشحن يعني تثبيت الشحنة q

من ③، 6 نعوض على

$$\boxed{V = \frac{2V_0}{1+K}}$$

فرق الجهد بين لوحي المتسعة بعد ادخال العازل

ب) نفرض ان الشحنة على المتسعة ① قبل ادخال العازل هي q_0 ، وبعد ادخال العازل تصبح q'

$$\Rightarrow q_0 = C_0 V_0 \quad \text{——} ⑦ \text{ قبل ادخال العازل}$$

$$q' = C_0 V$$

$$= C_0 \left(\frac{2V_0}{1+K}\right) \quad \text{——} 8$$

$$\Delta q = q_0 - q'$$

$$= C_0 V_0 - \frac{2C_0 V_0}{1+K}$$

$$= C_0 V_0 \left(1 - \frac{2}{1+K}\right)$$

$$= C_0 V_0 \left(\frac{K-1}{K+1}\right)$$

الذي هو شحنة المتسعة قبل وبعد ادخال العازل وتساوي مقدار الشحنة المنتقلة.

٥-٢٠ اذا علم ان منطقة شدة المجال الكهربائي بين لوحين متسعة ذات لوحين متوازيين هي $2\times10^5 \frac{V}{m}$ عندما تكون المنطقة بين اللوحين خارجة، وان قيمة شدة المجال تصبح $1.2\times10^5 \frac{V}{m}$ عندما تملأ المادة العازلة، فما مقدار (أ) ثابت العازل K، (ب) سماحية العازل ϵ و) مقدار متجه الإزاحة D في مقدار ربه إلى استقطاب P د) الكثافة السطحية للشحنات المتشكلة على سطح العازل بـ و)، الكثافة السطحية للشحنات المطلقة على لوحي المتسعة.

أ) $$K = \frac{E_0}{E} = \frac{2\times10^5 \text{ V/m}}{1.2\times10^5 \text{ V/m}}$$
$$= 1.66$$

ب) $$\epsilon = K\epsilon_0$$
$$= 1.66 \times 8.85\times10^{-12} \frac{C^2}{N.m^2}$$
$$= 1.475\times10^{-11} \frac{C^2}{N.m^2}$$

ج) $$D = \epsilon E$$
$$= 1.475\times10^{-11} \frac{C^2}{N.m^2} \times 1.2\times10^5 \frac{N}{C}$$
$$= 1.77\times10^{-6} \, C/m^2$$

د) $\because D = \epsilon E$, $D = \epsilon_0 E + P$
$$\Rightarrow \epsilon E - \epsilon_0 E = P$$
OR $$P = (\epsilon - \epsilon_0) E$$
$$= (14.75\times10^{-12} \frac{C^2}{N.m^2} - 8.85\times10^{-12} \frac{C^2}{N.m^2}) \times 1.2\times10^5 \frac{N}{C}$$
$$= 7.08\times10^{-7} \, C/m^2$$

هـ) $$\sigma_i = P$$
$$= 7.08\times10^{-7} \frac{C}{m^2}$$
او نحل بالطريقة التالية
$\because \sigma_i = \epsilon_0 E_i$
and $E_i = E_0 - E$
$$= (2\times10^5 - 1.2\times10^5)$$
$$= 0.8\times10^5 \frac{N}{C}$$
$$\Rightarrow \sigma_i = 8.8\times10^{-12} \frac{C^2}{N.m^2} \times 0.8\times10^5 \frac{N}{C}$$
$$= 7.08\times10^{-7} \frac{C}{m^2}$$

و) $\because D = \epsilon E$
$$= \epsilon \frac{\sigma}{\epsilon} = \sigma$$
$$\Rightarrow \sigma = 1.77\times10^{-6} \frac{C}{m^2}$$
OR $$\sigma = \epsilon_0 E_0$$
$$= 8.85\times10^{-12} \frac{C}{N.m^2} \times 2\times10^5 \frac{N}{C}$$
$$= 1.77\times10^{-6} \frac{C}{m^2}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$
$$\sigma = \epsilon_0 E_0$$
$$\Rightarrow E = \frac{\epsilon_0 E_0}{\epsilon} = \frac{\epsilon_0 E_0}{K\epsilon_0}$$
$\because E = \frac{E_0}{K}$
OR
$$K = \frac{E_0}{E}$$

٥-١) مكثف ذات لوحين متوازيين مساحة كل 25 cm² والمسافة بينهما لوحين 2mm وبينهما عازل ذو ثابت عزل قدره (K=5) وسط عازل موصل بجهد قدره 300V احسب (أ) سعة المكثف (ب) شحنة المكثف (ج) مقدار إزاحة الكهربائية (د) مقدار شدة المجال الكهربائي.

الحل:

(أ)
$$C = K\epsilon_0 \frac{A}{d} = 5 \times 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N.m^2} \times \frac{25 \times 10^{-4} m^2}{2 \times 10^{-3} m}$$
$$= 5.53 \times 10^{-11} F$$

(ب)
$$q = C V$$
$$= 5.53 \times 10^{-11} F \times 300 V$$
$$= 1.66 \times 10^{-8} Coul$$

شحنة المكثف

(ج)
$$\because D = \epsilon E \quad , \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$
$$\Rightarrow \boxed{D = \sigma = \frac{q}{A}}$$
$$\therefore D = \frac{1.66 \times 10^{-8} Coul}{25 \times 10^{-4} m^2}$$
$$= 6.637 \times 10^{-6} \frac{Coul}{m^2}$$

(د) نحل بالطريقتين ① ②

① $\because E = \frac{V}{d}$
$$\therefore E = \frac{300 V}{2 \times 10^{-3} m} = 1.5 \times 10^5 \frac{V}{m} \left(\frac{N}{C}\right)$$
$$\because D = \epsilon_0 E + P$$
$$\Rightarrow P = D - \epsilon_0 E$$
$$= 6.637 \times 10^{-6} \frac{C}{m^2} - 8.85 \times 10^{-12} \times 1.5 \times 10^5$$
$$= 6.637 \times 10^{-6} \frac{C}{m^2} - 1.327 \times 10^{-6} \frac{C}{m^2}$$
$$= 5.3 \times 10^{-6} \frac{C}{m^2}$$

② or
$$\because D = \epsilon E \quad — ①$$
$$= K\epsilon_0 E$$
$$\Rightarrow \epsilon_0 E = \frac{D}{K} \quad — ②$$
$$\because D = \epsilon_0 E + P \quad — ③$$

نعوض ② في ③

or
$$D = \frac{D}{K} + P$$
$$P = D - \frac{D}{K}$$
$$= D\left(1 - \frac{1}{K}\right)$$
$$= D\left(\frac{K-1}{K}\right)$$
$$= 6.637 \times 10^{-6} \times \frac{4}{5}$$
$$= 5.3 \times 10^{-6} \frac{C}{m^2}$$