الفصل الرابع
chapter (4)

الجهد الكهربائي
(Electric Potential)

chapter (4) الفصل الرابع
الجهد الكهربائى (Electric Potential)

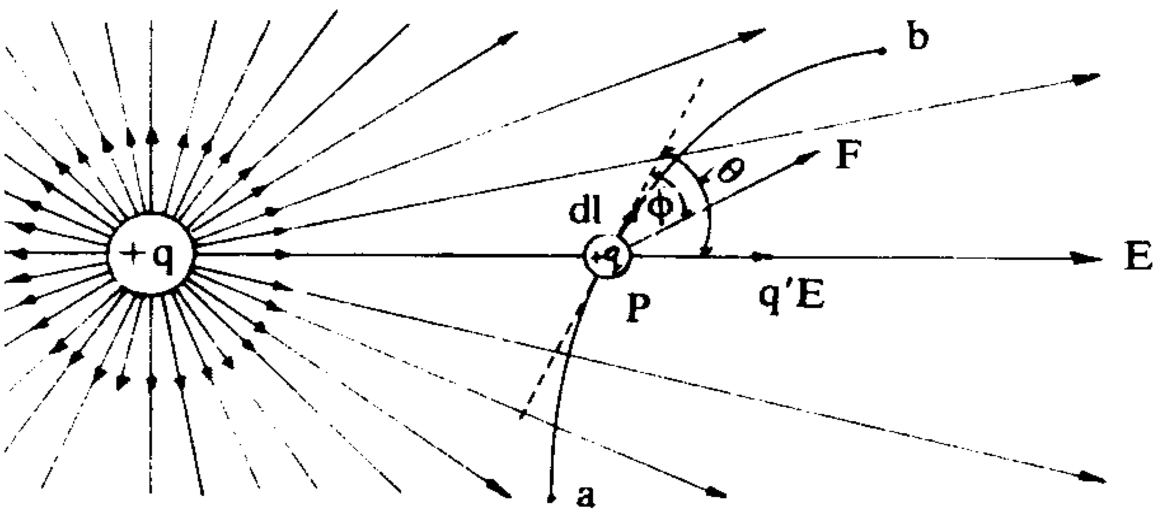
عندما **يتحرك** جسيم مشحون في **مجال كهربائي** ، يسلط المجال **قوة** يمكنها القيام بـ**شغل** على الجسيم (أي تحرك الجسيم ازاحة ما). ويمكن دائما التعبير عن هذا الشغل بدلالة **طاقة الجهد الكهربائي** او(**الطاقة الكهربائية الكامنة**).

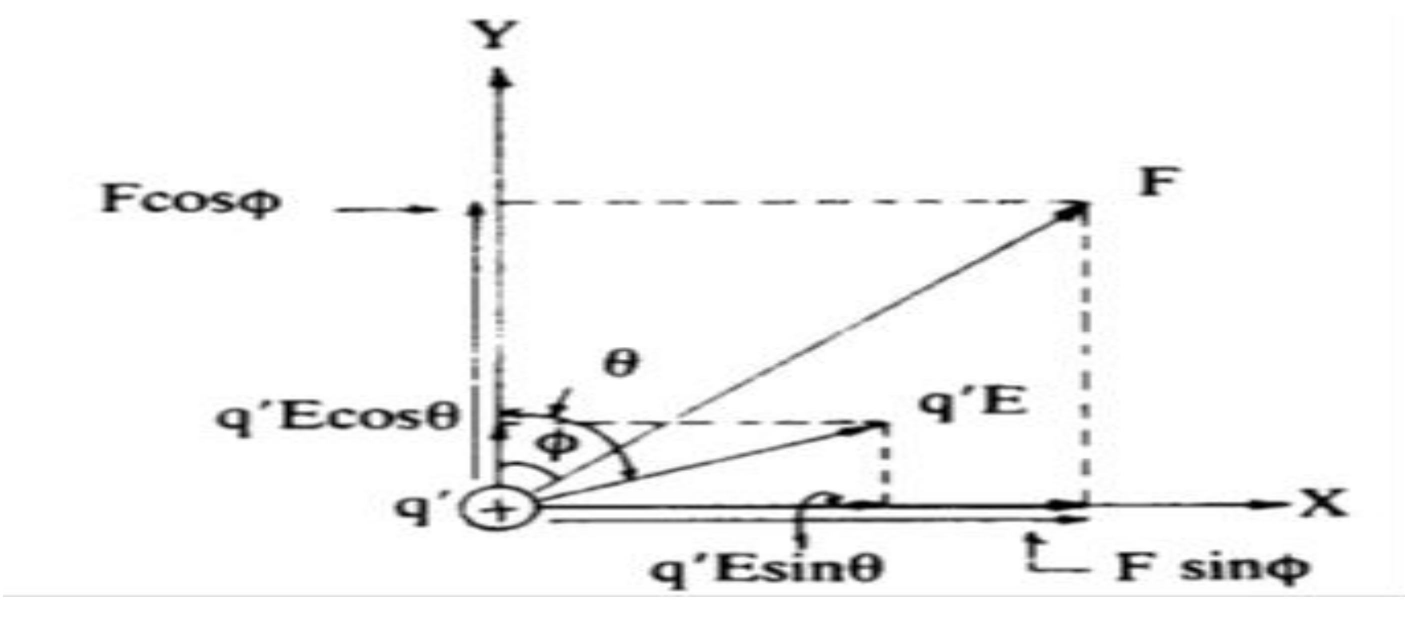
وكما ان الطاقة الكامنة للجاذبية تعتمد على ارتفاع كتلة الجسم فوق سطح الأرض، تعتمد الطاقة الكهربائية الكامنة على موضع الجسيمات المشحونة في المجال الكهربائي.

سنقوم بشرح الطاقة الكهربائية الكامنة باستخدام مفهوم جديد يسمى **الجهد الكهربائي**، أو ببساطة **الجهد**.

طاقة الجهد الكهربائى (Electric Potential Energy)

لكل جسم مشحون اذا ما وضع في مجال كهربائي طاقة كامنة ناشئة عن الشغل المنجز في تحريك الجسم المشحون ضد القوى الكهربائية، اشبه بالجهد الجذبي الناشئ عن الشغل المنجز من رفع جسم ضد قوة الجاذبية.





لتكن 'q شحنة اختبارية موجبة يراد لها ان تتحرك متخذة المسار من a الى b في مجال كهربائي متغير القيمة والاتجاه من نقطة الى اخرى كما في الشكل اعلاه. حيث نلاحظ فيه (**q'E**) هي القوة التي يسلطها المجال E على الشحنة 'q وهي كما يلاحظ تحاول ابعاد الشحنة الاختبارية باتجاه المجال.

F هي قوة خارجية من اصل غير كهربائي تحاول تحريك الشحنة الاختبارية في المجال

ان حركة الشحنة الاختبارية على المسار المحدد من a الى b كما في الشكل ناتجة عن محصلة تاثير القوتين (**q'E**) و**F**

لذا نحلل كل من القوتين (**q'E**) و**F** الى مركبتيهما العمودي على المماس للمسار ومركبتيهما الموازية للمماس، ثم نجد محصلة القوى العمودية $\mathbf{F_n}$ ومحصلة القوى المماسية $\mathbf{F_t}$

$$\sum \mathbf{Fn} = \mathbf{F \sin \phi + (q'E)\sin\theta} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

$$\sum \mathbf{Ft} = \mathbf{F \cos \phi + (q'E)\cos\theta} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2$$

ان محصلة القوى العمودية $\sum Fn$ تغير الاتجاه فقط بينما تتسبب محصلة القوى المماسية $\sum Ft$ معادلة (2) في تعجيل الشحنة على المسار. (قانون نيوتن F=ma) ذلك يعني ان

$$\mathbf{F\cos \phi + (q'E) \cos\theta = m}\ a \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3$$

ومن تعرف التعجيل a (التغير في السرعة / التغير في الزمن)

$$a = \frac{dv}{dt}$$
$$= \frac{dv}{dt} * \frac{dl}{dl} = \frac{dv}{dl} * \frac{dl}{dt} = \frac{dv}{dl} * v$$

Or $\quad a = v * \dfrac{dv}{dl} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4$

حيث ان dl عنصر متناهي في الطول(الازاحة) من طول المسار من a الى b

نعوض 4 في 3 فنحصل على

$$\mathbf{F\cos \phi + (q'E) \cos\theta = m}\ v * \frac{dv}{dl}$$

Or $\quad \mathbf{F\cos \phi}\ dl + \mathbf{(q'E) \cos\theta}\ dl = \mathbf{m}\ v\ dv$

And $\quad \mathbf{F\cos \phi}\ dl = \mathbf{m}\ v\ dv - \mathbf{(q'E) \cos\theta}\ dl \qquad \ldots\ldots\ldots 5$

من المعادلة 5 نجد ان

$\mathbf{F\cos\phi}\ \boldsymbol{dl}$ يمثل الشغل الذي تنجزه القوة الخارجية على الشحنة ويساوي dW

$\mathbf{m}\ v\ dv$ يمثل الزيادة في الطاقة الحركية (التغير في الطاقة الحركية) ، حيث ان

$$d(K.E) = d(\tfrac{1}{2}mv^2) = \mathbf{m}\ v\ dv$$

$-q'E \cos\theta\ dl$ يمثل الشغل المنجز ضد القوة الكهربائية المسلطة على الشحنة بواسطة المجال الكهربائي. وهو يمثل الزيادة في الطاقة الكامنة للشحنة. اي ان

$$d\,(P.E) = -\ \mathbf{(q'E) \cos\theta}\ dl$$

مما تقدم يمكن التعبير عن المعادلة 5 بالشكل التالي

$$dW = d(K.E) + d\,(P.E) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6$$

المعادلة 6 تمثل معادلة الشغل والطاقة لجسم مشحون يتحرك في مجال كهربائي.
وعندما نكامل المعادلة 5 على امتداد المسار من a الى b

$$\int_a^b \mathbf{F}\cos\phi\, dl = \int_a^b \mathbf{m}\, v\, dv + \int_a^b -(\mathbf{q'E})\,\cos\theta\, dl \qquad \ldots\ldots\ldots 7$$

حيث ان

$\int_a^b \mathbf{F}\cos\phi\, dl$ يمثل الشغل الكلي الذي تنجزه القوة الخارجية على الشحنة

$\int_a^b \mathbf{m}\, v\, dv$ يمثل الزيادة الكلية في الطاقة الحركية $(K.E_b - K.E_a)$.

$-\int_a^b (\mathbf{q'E})\,\cos\theta\, dl$ يمثل الزيادة الكلية في الطاقة الكامنة للشحنة q'

او الشغل الكلي المنجز ضد القوة التي يسلطها المجال

$$-\int_a^b (\mathbf{q'E})\cos\theta\, dl = P.E_b - P.E_a \qquad \ldots\ldots\ldots 8$$

وعليه يمكن اعادة كتابة المعادلة 7 بالشكل التالي

$$\int_a^b \mathbf{F}\cos\phi\, dl = (K.E_b - K.E_a) + (P.E_b - P.E_a) \ldots\ldots\ldots 9$$

وعندما تكون القوة الخارجية مساوية للصفر والشحنة تتحرك ببطئ تحت تاثير القوة التي يسلطها المجال فان:

$$K.E_b + P.E_b = K.E_a + K.E_a \qquad \ldots\ldots\ldots 10$$

ان المعادلة 10 هي معادلة حفظ الطاقة

ملاحظة:-

ان الطاقة الكامنة لشحنة اختبارية تساوي صفر عندما تصبح بعيدة جدا عن الشحنة المنشئة للمجال

$$\Rightarrow -\int_a^b (\mathbf{q'E})\cos\theta\, dl = P.E_b - P.E_a$$

فاذا كانت a في الما لانهاية فان

$$-\int_{\infty}^b (\mathbf{q'E})\cos\theta\, dl = P.E_b - P.E_{\infty}$$

$$\Rightarrow P.E_{\infty} = 0$$

$$\Rightarrow P.E_b = -\int_{\infty}^b (\mathbf{q'E})\cos\theta\, dl \qquad \ldots\ldots\ldots 11$$

اي ان (اذا جلبت شحنة اختبارية من المالانهاية الى اية نقطة في مجال كهربائي فان الشغل المنجز ضد القوة التي يؤثر بها المجال على الشحنة، تساوي الطاقة الكامنة للشحنة عند تلك النقطة.

وبصورة عامة فان:-

$$P.E = -\int (\mathbf{q'E})\cos\theta\, dl$$

(ان الطاقة الكهربائية الكامنة لشحنة اختبارية عند نقطة ما في مجال كهربائي هي الشغل المنجز ضد القوة التي يؤثر بها المجال على الشحنة الاختبارية عند جلبها من المالانهاية الى تلك النقطة).

الجهد (Potential)

ان الجهد عند نقطة ما في مجال كهربائي هو النسبة بين الطاقة الكامنة لشحنة اختبارية موضوعة عند تلك النقطة وقيمة الشحنة. او هو الطاقة الكامنة لوحدة الشحنة عند اية نقطة في المجال الكهربائي

$$V_a = \frac{\text{الطاقة الكامنة P.E لشحنة q' عند النقطة a}}{q'}$$

$$V_a = \frac{P.E_a}{q'}$$

$$= \frac{-\int_{\square}^{a} (\mathbf{q'E}) \mathbf{cos\theta}\, dl}{q'}$$

$$\rightarrow \qquad V_a = -\int_{\square}^{a} \boldsymbol{E}\mathbf{cos\theta}\, dl \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..12$$

يلاحظ هنا ان التكامل خطي ويؤخذ على طول المسار من المالانهاية الى النقطة المحدده.

وحدة الجهد جول /كولوم او فولت 1Volt= 1Joul/Coulomb

فرق الجهد

يطلق على الفرق بين جهدي نقطتين a و b في مجال كهربائي مستقر ما بـ فرق الجهد بين تلك النقطتين. وهو الشغل المبذول لنقل وحدة الشحنة الموجبة بين هاتين النقطتين ضد اتجاه المجال الكهربائي

$$\frac{P.E_b}{q'} - \frac{P.E_a}{q'} = \frac{-\int_{a}^{b} (\mathbf{q'E}) \mathbf{cos\theta}\, dl}{q'}$$

$$\rightarrow \qquad V_b - V_a = -\int_{a}^{b} \boldsymbol{E}\mathbf{cos\theta}\, dl \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 13$$

اي ان (فرق الجهد بين نقطتين a و b في مجال كهربائي يساوي سالب التكامل الخطي لشدة المجال الكهربائي من نقطة a الى نقطة b)

.

ملاحظة:-

(1) تكون النقطة b اعلى جهد من النقطة a اذا كانت الطاقة الكامنة لشحنة موجبة عند نقطة b اعلى منها عند نقطة a ، او اذا انجز شغل ضد المجال عند انتقال شحنة موجبة من a الى b .

$$V_a - V_b = V_{ab}$$

اذا كان V_{ab} كمية موجبة فان V_a اكبر من V_b والعكس صحيح

$$V_{ab} = V_a - V_b$$

$$V_{ba} = V_b - V_a$$

$$V_{ab} = - V_{ba}$$

عندما يكون المسار مغلقا على نفسه فان

$$\oint \boldsymbol{E}\mathbf{cos\theta}\, dl = 0$$

$$\oint \mathbf{E}.\, \mathbf{dl} = 0$$

$$V = \int \mathbf{E}.\, \mathbf{dl}$$

$$V_b - V_a = -\int_{a}^{b} \mathbf{E}.\, \mathbf{dl}$$

(2) اذا كان المجال ثابت في المقدار والاتجاه في منطقة معينه كما هو الحال بين لوحين متوازيين مشحونين بشحنتين مختلفتين.

$$V_b - V_a = -\int_a^b \mathbf{E.\,dl}$$
$$= -\int_{x1}^{x2} \mathbf{E.\,dx}$$
$$= -[E]^{x2}_{x1}$$
$$= -E[x2-x1]$$
$$= -Ed$$

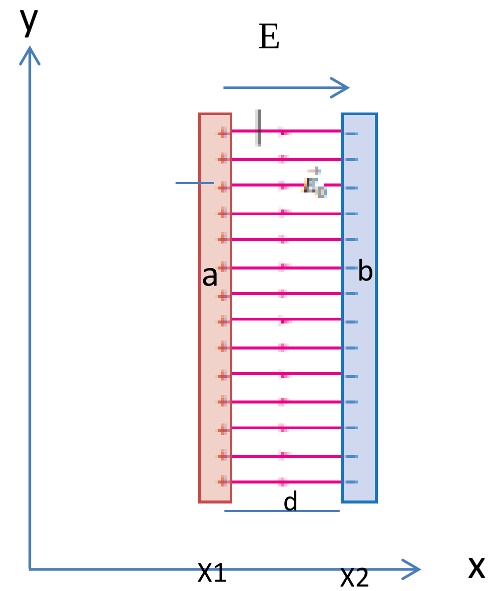
حيث d المسافة بين اللوحين المشحونين d=(x2-x1)

Or

$$V_b - V_a = Ed$$

i.e; $V_{ab} = Ed$

or $E = V_{ab} / d$



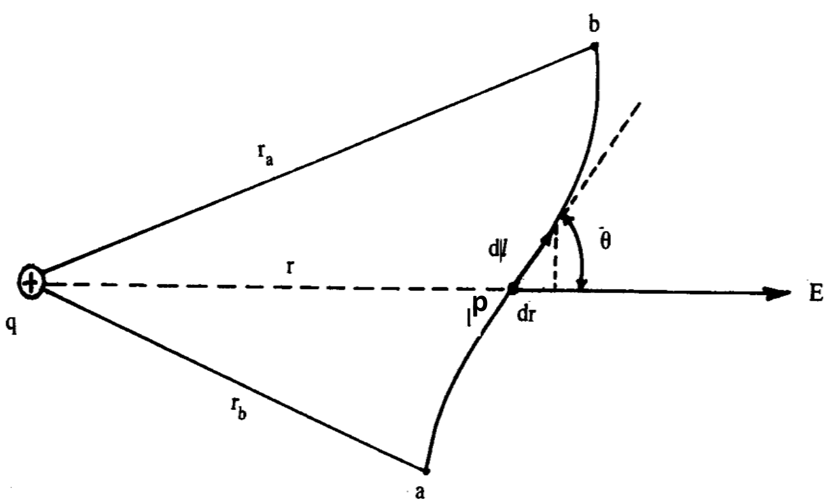
هذا يعني ((ان شدة المجال بين لوحين متوازيين مشحونين بشحنتين مختلفتين (متسعة مشحونه) يساوي فرق الجهد بين اللوحين مقسوما على المسافة بين اللوحين))

الجهد وتوزيع الشحنة

مما تقدم شرحه لاحظنا ان فرق الجهد بين نقطتين a و b في مجال كهربائي يساوي سالب التكامل الخطي للمجال على امتداد الخط من a الى b .

$$V_b - V_a = -\int_a^b \boldsymbol{E}\mathbf{cos\theta}\, dl \qquad \ldots\ldots\ldots 13$$

فيما يلي حالة خاصة يكون فيها المجال ناشئ عن شحنة منفردة



في الشكل اعلاه لتكن (r) تمثل المسافة من الشحنة المنفردة q الى اية نقطة (مثل (p) على المسارمن a الى b

$\square$ $E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}$ ……….. 14 شدة المجال في النقطة p

ولمسافة قصيرة dl على امتداد المسار من a الى b نلاحظ ان البعد r عن الشحنة يزداد بمقدار dr
ومن الشكل نجد ان dr يساوي

$dr = dl\cos\theta$ ………15

$\square$ من المعادلات 13 و14 و15 نحصل على

$$V_b - V_a = -\int_a^b \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}dr$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\int_a^b \frac{1}{r^2}dr$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r_b} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r_a}$$

حيث r_a و r_b هي بعد النقطتين a وb عن الشحنة q على التوالي.
ولايجاد الجهد عند نقطة ما نسبة الى نقطة عند المالانهاية نجعل ($r_a = \square$) وبذلك تصبح ($V_a = 0$) وهذا يقود الى ان

$$V_b = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r_b} \quad ………..16$$

ولكون النقطة p ممكن ان تكون اية نقطة في المجال لذا **يمكن تعميم المعادلة السابقة بحيث تمثل الجهد على بعد r من اية نقطة مشحونة مثل q .**

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r} \quad ….17$$

ملاحظة:-

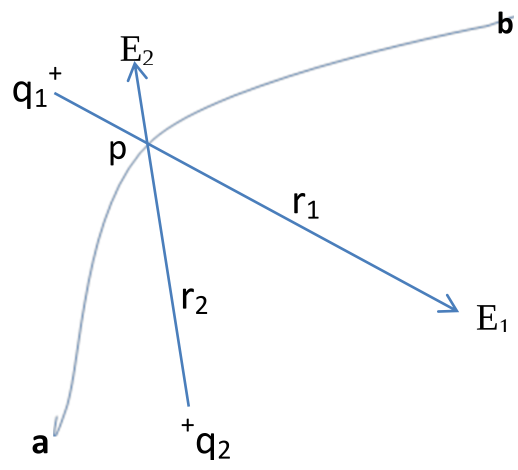
عندما تكون q موجبة الجهد يكون موجب ايضا، و عندما تكون q سالبة الجهد يكون سالب.

الجهد الناشئ عن اكثر من شحنة منفردة

الشكل يوضح الشحنتين q_1 و q_2 والمطلوب ايجاد الجهد في نقطة p الناشئ عن تاثير الشحنتين

ان الجهد كمية غير متجهة وله مقدار وليس له اتجاه وهو يختلف بذلك عن شدة المجال لكون شدة المجال كمية متجهة.

لذا **فان الجهد** في النقطة p **يساوي المجموع الجبري** (وليس الاتجاهي) للجهدين الناشئين عن الشحنتين



اي ان

$$V_p = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_o}}\ \frac{q1}{r_1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_o}}\ \frac{q2}{r_2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_o}}\left\{\frac{q1}{r_1} + \frac{q2}{r_2}\right\}$$

ولاكثر من شحنتين معزولتين فان الجهد V يعطى بالعلاقة

$$V = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_o}} \sum \frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{r}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 18$$

$$V = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_o}}\left\{\frac{q1}{r_1} + \frac{q2}{r_2} + \frac{\boldsymbol{q3}}{\boldsymbol{r_3}} + \cdots\right\}$$

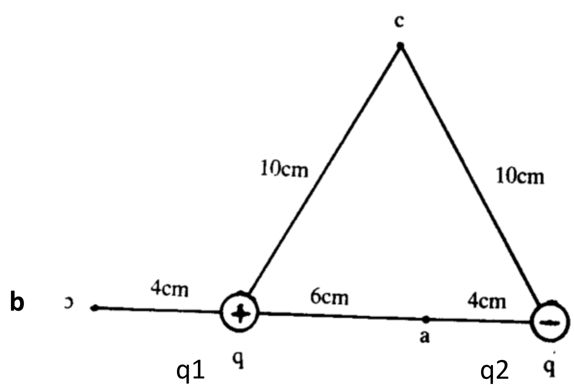
<u>**ملاحظة**</u>: عندما تكون الشحنة موزعة على سطح او حجم معين فان الجهد يحسب من خلال التكامل

$$V = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_o}} \int \frac{\boldsymbol{dq}}{\boldsymbol{r}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 19$$

مثال :

في الشكل المجاور احسب الجهد في النقاط، a و b و c .

<u>الحل :</u>



- $V = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_o}} \sum \frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{r}}$
- $V_a = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_o}}\left\{\frac{q1}{r_1} + \frac{q2}{r_2}\right\}$

$$= 9\times 10^9\left\{\frac{12\text{x}10^{-9}}{0.06\ m} + \frac{-12\text{x}10^{-9}}{0.04\ m}\right\}$$

$$= -\ 900 \text{ Volt}$$

$$V_b = 9\times 10^9\left\{\frac{12\text{x}10^{-9}}{0.04\ m} + \frac{-12\text{x}10^{-9}}{0.14\ m}\right\}$$

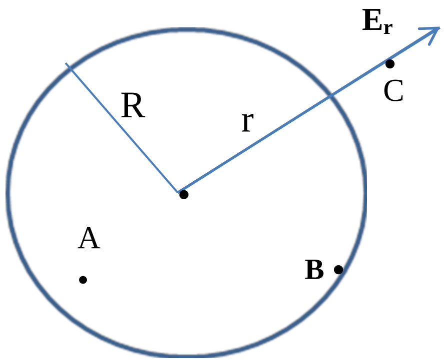
$$= 1928,5 \text{ Volt}$$

$$V_c = 9\times 10^9\left\{\frac{12\text{x}10^{-9}}{0.10\ m} + \frac{-12\text{x}10^{-9}}{0.10\ m}\right\}$$

$$= 0$$

جهد موصل كروي مشحون:

الشكل يمثل كرة موصلة نصف قطرها R مشحونة بشحنة موجبة q ، احسب الجهد في اية نقطة C خارج الكرة على بعد $r > R$ و داخل الكرة $r < R$.



اولا – لقد وجدنا سابقا ان شدة المجال الكهربائي خارج كرة موصلة مشحونة شحنتها q تعطى بالعلاقة

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}$$

و هي تماثل شدة المجال الكهربائي كما لو كانت الشحنة متمركزة في مركز الكرة (اي شحنة نقطية) لذا فان الجهد في اية نقطة خارج الموصل الكروي C وعلى بعد r من مركزه($r > R$) تساوي:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r}$$

ثانيا- الجهد داخل الكرة ($r < R$)

- الكرة موصلة لذا فان الشحنة تتمركز على السطح و هذا بدوره يجعل **المجال داخل الكرة يساوي صفر**

For ($r < R$) $E_r = 0$

لذا فأن فرق الجهد بين اية نقطتين مثل A و B يساوي صفر

$$V_B - V_A = -\int_A^B E\cos\theta \, dl = 0$$

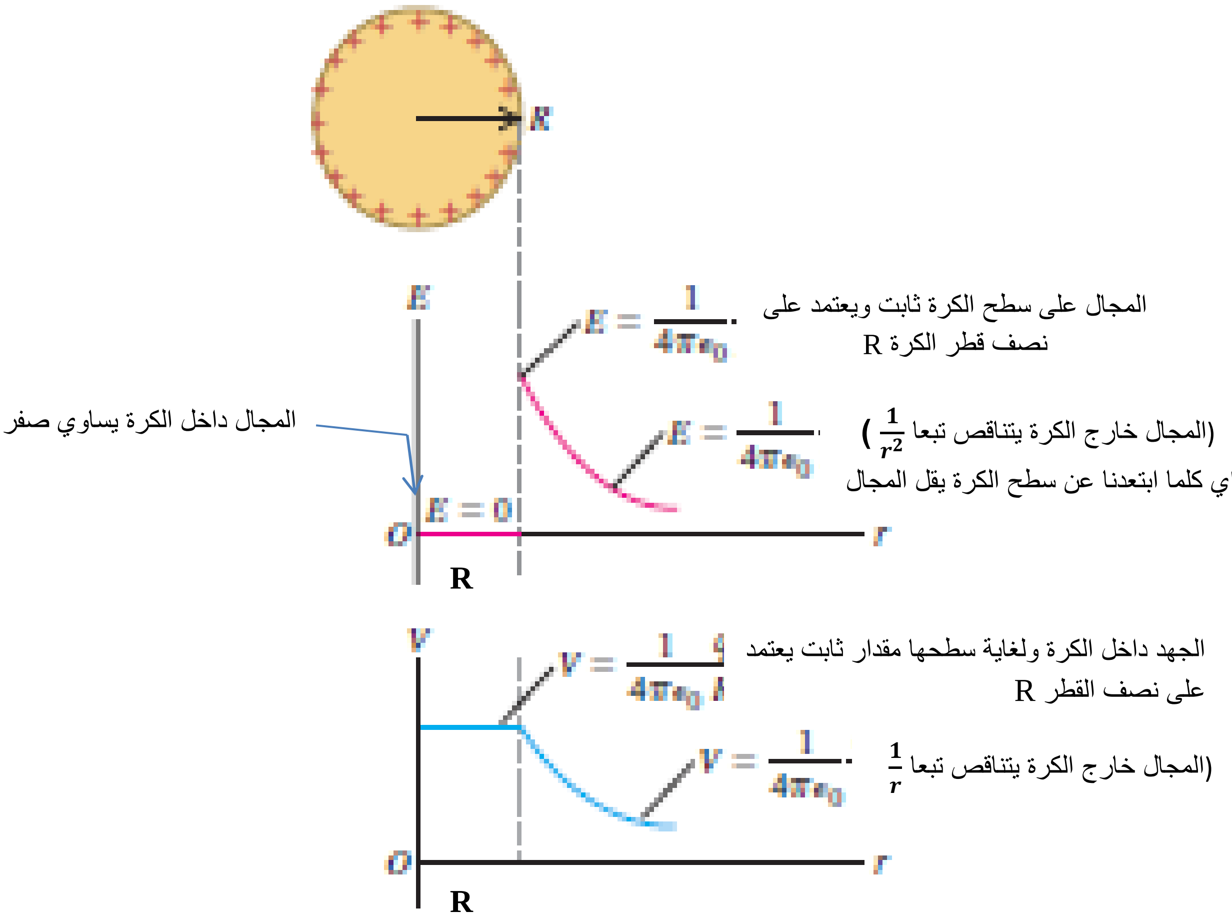
$$\rightarrow V_B = V_A$$

But $V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{R}$

هذا يعني ان الجهد عند كل النقاط الداخلية للكرة يساوي الجهد عند السطح

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{R}$$

الشكل ادناه يوضح رسم بياني لتغير قيم شدة المجال E والجهد V عند نقاط داخل وخارج موصل كروي مشحون بشحنة موجبة (اي قيم شدة المجال E والجهد V كدالة للبعد عن مركز الكرة المشحونة)



انحدار الجهد (Potential Gradient)

$$V_b - V_a = -\int_a^b \boldsymbol{E}\cos\theta\, dl$$

المعادلة 13 اعلاه تمثل فرق الجهد بين النقطتين a و b في المجال E وعندما يكون البعد بين النقطتين متناهي في الصغر فان الفرق في الجهد بينهما يصبح متناهي في الصغر ايضا، اي ان:

$$V_b - V_a = dV$$

and $dV = = -\boldsymbol{E}\cos\theta\, dl$

or $\boldsymbol{E}\cos\theta = -\dfrac{\boldsymbol{dV}}{\boldsymbol{dl}}$ ………… 20

يطلق على النسبة $\dfrac{\boldsymbol{dV}}{\boldsymbol{dl}}$ انحدار الجهد، وهي تمثل معدل تغير الجهد مع المسافة باتجاه $\boldsymbol{dl}$.

بما ان: $\boldsymbol{E}\cos\theta$ تمثل مركبة المجال باتجاه $\boldsymbol{dl}$ لذا فأن:

(مركبة المجال الكهربائي باي اتجاه تساوي سالب انحدار الجهد بذلك الاتجاه).

وعندما يكون اتجاه dl بنفس اتجاه شدة المجال E فأن:

حيث θ هي الزاوية بين المسار واتجاه المجال (θ =**0**) $\cos\theta = 1$

and $$\boldsymbol{E} = -\frac{dV}{dl} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 20$$

ان الاشارة السالبة تشير الى ان اتجاه E **باتجاه تناقص الجهد**

وحد انحدار الجهد هي $\frac{\text{فولت}}{\text{متر}}$ ، $\frac{Volt}{m}$.

ملاحظة :-

ان الفائدة من فكرة انحدار الجهد هي امكانية حساب شدة المجال الكهربائي تكون اسهل نسبيا عن طريق ايجاد الجهد عند النقطة المطلوبة اولا (لكون الجهد كمية غير متجهه) ومن ثم استعمال معادلة انحدار الجهد لحساب شدة المجال.

امثلة تطبيقية

حساب شدة المجال الكهربائي على بعد **r** من شحنة نقطية **q** .

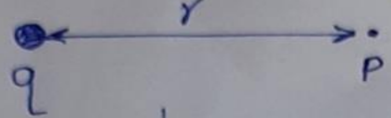
الجهد والمجال لثنائي القطب

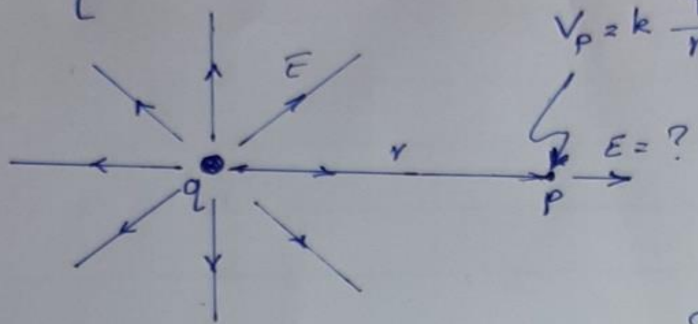
مثال

احسب شدة المجال الكهربائي على بعد r من شحنة نقطية q .

الحل :-

$E_p = ?$





ان الجهد في نقطة p التي تبعد مسافة r عن الشحنة النقطية q يعطى بالعلاقة

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} = k\frac{q}{r} \quad \text{——}(1)$$

كما ان المجال الكهربائي للشحنة يكون شعاعياً نطبق معادلة انحدار الجهد

$$E = -\frac{dV}{dl} \quad \text{——}(2)$$

و:: عنصر المسار dl يكون باتجاه الشعاع لذلك يكون المسار هو r وعنصره dr اي ان $(dl = dr)$

وان

$$E = -\frac{dV}{dr} \quad \text{——}(3)$$

نعوض (1) في (3)

$$= -\frac{d\left(k\frac{q}{r}\right)}{dr}$$

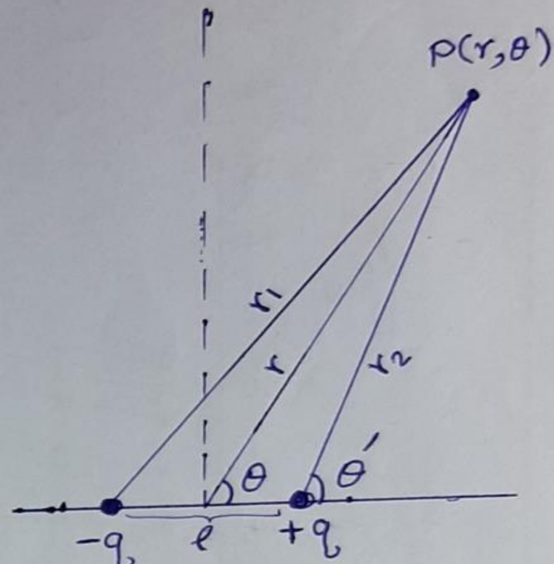
$$= -kq\frac{d}{dr}(r^{-1})$$

$$= -kq\{(-1)r^{-2}\}$$

$$= k\frac{q}{r^2} \quad \text{or} \quad = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

الجهد والمجال لثنائي القطب

المطلوب: ايجاد قيمة الجهد الكهربائي عند اية نقطة في مجال ثنائي القطب مثل النقطة $P(r,\theta)$ النقطة هنا في الاحداثيات القطبية



الحل :-

اولاً حساب الجهد عند النقطة P

$$V_p = k\sum q/r \quad \text{——— (1)}$$

$$= k\frac{q}{r_2} - k\frac{q}{r_1}$$

$$= kq\left(\frac{r_1 - r_2}{r_2 r_1}\right) \quad \text{——— (2)}$$

$$\because \; r_1^2 = r_2^2 + l^2 + 2r_2 l\cos\theta'$$

$$\Rightarrow \; r_1^2 - r_2^2 = l\,(l + 2r_2\cos\theta')$$

$$\text{or} \quad r_1 - r_2 = \frac{l(l + 2r_2\cos\theta')}{r_1 + r_2} \quad \text{——— (3)}$$

نعوض (3) في (2)

$$V_p = \frac{kql(l + 2r_2\cos\theta')}{r_2 r_1 (r_1 + r_2)}$$

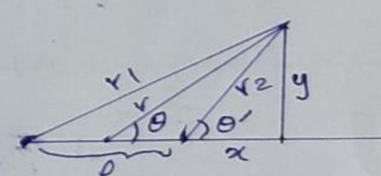
وعندما تكون $r >> l$ فان

$$r_1 = r_2 = r \;,\; \theta = \theta'$$

$$\Rightarrow V_p = k\,\frac{ql\cos\theta}{r^2}$$

$$\text{or} \quad V_p = k\,\frac{P\cos\theta}{r^2} \quad \text{——— (4)}$$

ملاحظة



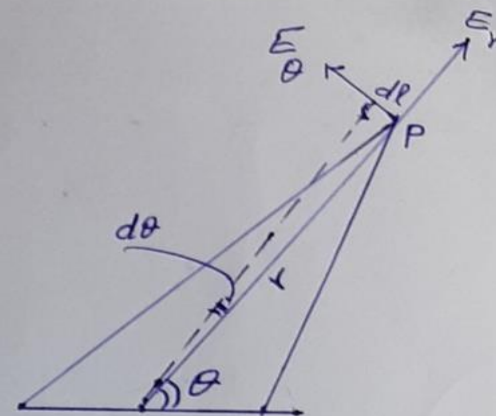
فيثاغورس

$$r_1^2 = (l+x)^2 + y^2$$
$$r_2^2 = x^2 + y^2$$
$$r_1^2 = l^2 + 2lx + x^2 + y^2$$
$$x = r_2\cos\theta'$$
$$\Rightarrow r_1^2 = l^2 + 2r_2 l\cos\theta' + r_2^2$$
$$r_1^2 = r_2^2 + l^2 + 2r_2 l\cos\theta'$$

من المعادلة (4) نجد ان الجهد في اية نقطة على العمود المنصف لمحور ثنائي القطب تساوي صفر لان

$$\cos\theta = \cos 90 = 0$$

ثانياً: حساب المجال الكهربائي في النقطة P



أ) باستخدام معادلة انحدار الجهد

نحسب أولاً E_r

$$E_r = -\frac{dV}{dl}$$

المسار في هذه الحالة باتجاه نصف القطر r

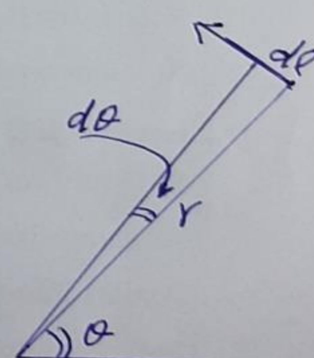
لذا فان $dl = dr$ وان

$$E_r = -\frac{dV}{dr}$$

$$= -\frac{d}{dr}\left(\frac{kP\cos\theta}{r^2}\right)$$

$$= \frac{2kP\cos\theta}{r^3}$$

ثم نحسب E_θ



$$E_\theta = -\frac{dV}{dl}$$

المسار في هذه الحالة عمودي على نصف القطر و $dl = r\,d\theta$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{dV}{d\theta}$$

$$= -\frac{1}{r}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{kP\cos\theta}{r^2}\right)$$

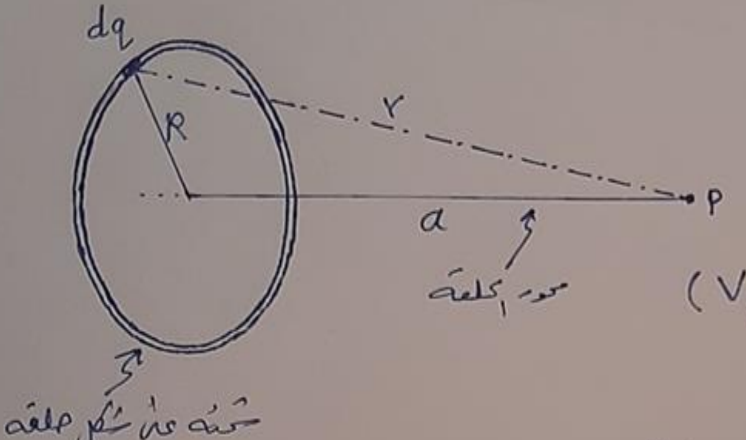
$$= \frac{kP\sin\theta}{r^3}$$

$$E_p = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{kP}{r^3}\left(4\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{kP}{r^3}\left(1 + 3\cos^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

الجهد الناشئ عن حلقة مشحونة

شحنة مقدارها q موزعة بانتظام على شكل حلقة نصف قطرها R ، جد الجهد عند النقطة p الواقعة على محور الحلقة وعلى بعد (a) من مركزها



المعطيات

شحنة موزعة بانتظام على شكل حلقة نصف قطرها R

المطلوب /-

ايجاد الجهد عند النقطة p (V_p)

الحل

لكون الشحنة مستمرة وعلى شكل حلقة نأخذ عنصر متناهي في الصغر من الشحنة مقداره dq ونتعامل معه كما لو كان شحنة نقطية وبذلك فان

$$dV_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r} \quad \ldots\ldots(1) \qquad \left(V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{R^2+a^2}} \quad \ldots\ldots(2) \qquad \left(r^2 = R^2+a^2\right)$$

ولايجاد الجهد V_p بتأثير شحنة الحلقة بالكامل (نكامل طرفي المعادلة (2)) نحصل

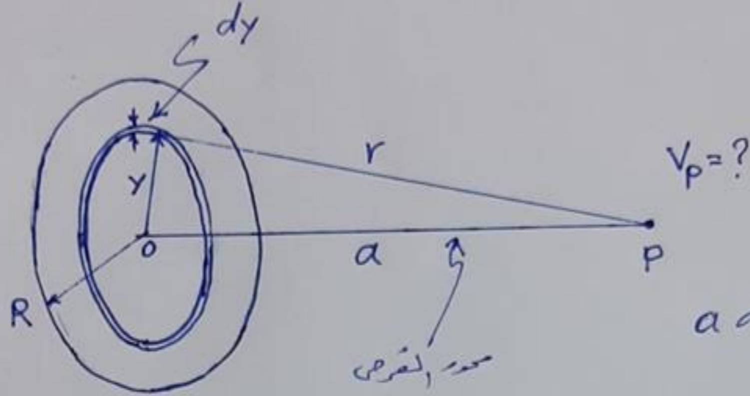
$$V_p = \int dV_p = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{R^2+a^2}}$$

$$\Rightarrow \quad V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2+a^2}}\int dq \qquad \left(\int dq = q\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2+a^2}}$$

الجهد الناشئ عن قرص مشحون

شحنة منتظمة كثافتها السطحية σ موزعة على سطح قرص ، جد الجهد عند النقطة p الواقعة على محور القرص وتبعد مسافة قدرها (a) عنه .



المعطيات

شحنة موزعة على سطح قرص بشكل منتظم

σ كثافة الشحنة السطحية

النقطة p تقع على محور القرص وتبعد عنه a

المطلوب /-

حساب الجهد في نقطة p

الحل :-

تكون الشحنة مستمرة التوزيع

نجزئ مساحة القرص الى حلقات دائرية متحدة المركز مع القرص كل منها يحمل شحنة مقدارها dq

الشكل يرينا احد هذه الحلقات التي نصف قطرها y وعرضها dy

$$\therefore \quad dq = \sigma \, ds \quad —— (1)$$

$ds =$ مساحة الحلقة

$$\Rightarrow \quad dq = \sigma (2\pi y) dy \quad —— (2)$$

$ds = 2\pi y \times dy$

محيط الحلقة   عرضها

لقد وجدنا في المسألة السابقة ان جهد حلقة مشحونة على مسافة a من محورها يعطى بالعلاقة

$$V_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + a^2}}$$

وعندما تكون شحنة الحلقة تساوي dq

$$\Rightarrow \quad dV_p = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{\underbrace{R^2}_{y^2} + a^2}} \quad —— 3$$

من 2 و 3 نحصل

$$dV_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \, \frac{\sigma (2\pi y) dy}{\sqrt{y^2 + a^2}} \quad \rightarrow 4$$

ولإيجاد الجهد الكلي بتأثير كل الحلقات التي تبدأ من المركز وتنتهي عند R
نكامل طرفي المعادلة 4

$$V_p = \int dV_p = \int_0^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(2\pi y)\,dy}{\sqrt{y^2+a^2}}$$

$$V_p = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2+a^2}}$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R (y^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}\, y\,dy$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \Big[(y^2+a^2)^{\frac{1}{2}}\Big]_0^R$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \Big[(R^2+a^2)^{\frac{1}{2}} - (0+a^2)^{\frac{1}{2}}\Big]$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \Big[(R^2+a^2)^{\frac{1}{2}} - a\Big]$$

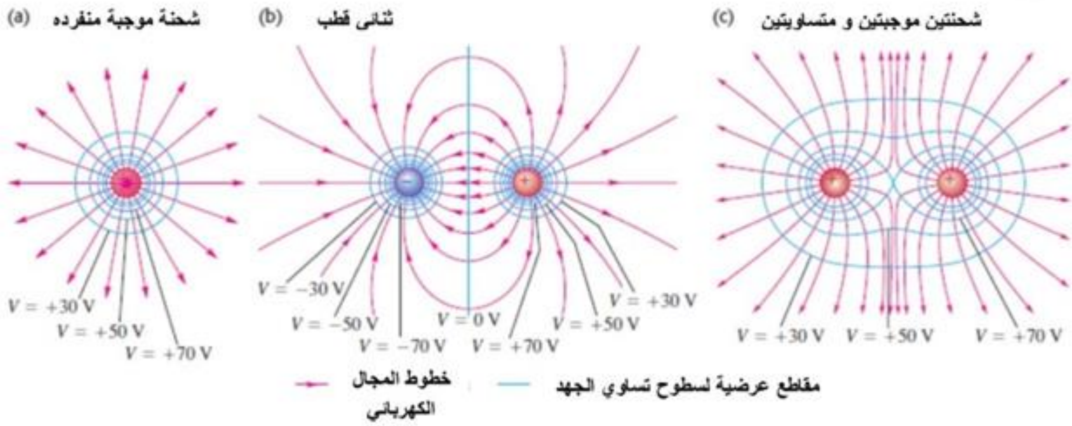
سطوح تساوي الجهد

سطح تساوي الجهد هو سطح ثلاثي الابعاد يكون الجهد الكهربائي على اية نقط من نقاطه متساوي.

خطوط المجال الكهربائي وسطوح تساوي الجهد

يوجد تعامد متبادل بين خطوط المجال الكهربائي وسطوح تساوي الجهد (أي أن سطح تساوي الجهد عمودي على خط المجال، و خط المجال عمودي على سطح تساوي الجهد).

الشكل ادناه يوضح مقاطع عرضية لسطوح تساوي الجهد (الخطوط الزرقاء) و خطوط المجال الكهربائي (الخطوط الحمراء) لمجموعات من الشحنات النقطية.



لقد توصلنا سابقا الى ان:-

$$dV = = -\mathbf{E}\cos\theta\, dl$$

$$\text{or} \qquad \mathbf{E}\cos\theta = -\frac{dV}{dl} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots 20$$

وعندما يكون المجال عمودي على المسار، اي ان **θ=90** و **(cosθ=0)** فأن

$$-\frac{dV}{dl} = 0$$

$$\text{or} \quad dV = 0$$

اي ان

$$V = \text{constant}$$

اي ان جميع نقاط المسار متساوية في الجهد ومن ذلك نستنتج ان:-

1- سطوح تساوي الجهد تكون عمودية على شدة المجال **E**.
2- اذا لم يكن سطح تساوي الجهد عمودي على شدة المجال (هذا يعني انه يصنع زاوية مع السطح) وأن ذلك يعني وجود مركبة للمجال موازية للسطح ومن ثم يتم انجاز شغل على الشحنات الموجودة على السطح وهذا خلاف الواقع (الشحنات مستقرة). اي ان $V_b - V_a = -\int_a^b \mathbf{E}\cos\theta\, dl \neq 0$ وأن $V_b \neq V_a$
3- خطوط تساوي الجهد يجب ان تكون عمودية على خطوط القوة الكهربائية (خطوط القوة تمثل اتجاه المجال)
4- سطوح تساوي الجهد تكون كروية ومتحدة المركز عندما يكون المجال ناشئ عن شحنة نقطية منفرده.

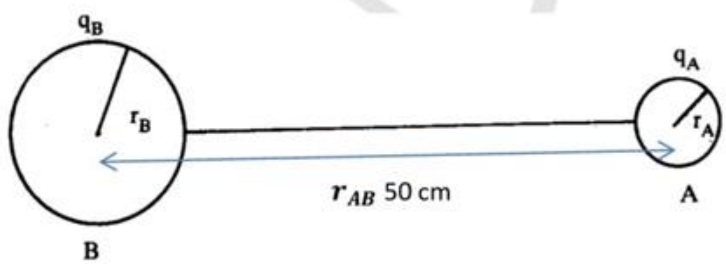
5- سطوح تساوي الجهد تكون مستوية ومتوازية وعمودية على خطوط القوة عندما يكون المجال منتظما (خطوط القوة مستقيمة ومتوازية).
6- سطح الموصل المشحون بشحنة مستقرة يكون متساوي الجهد، وذلك لان خطوط القوة عند سطح الموصل تكون عمودية على سطح الموصل.
7- داخل الموصل كله يعتبر حجم متساوي الجهد ويساوي جهد سطح الموصل لان المجال داخل الموصل يساوي صفر.
8- يتساوى فرق الجهد بين سطوح تساوي الجهد.
9- تكون سطوح تساوي الجهد كثيفة ومتقاربة من بعضها عندما يكون المجال قوي.
10- سطوح تساوي الجهد تكون متباعدة من بعضها عندما يكون المجال ضعيفا.
11- سطوح تساوي الجهد تقترب من الشكل الكروي كلما ابتعدنا عن الجسم الموصل (أذا كان الموصل غير منتظم).

اقتسام الشحنة بين الاجسام الموصلة

عندما يتلامس موصل مشحون مع اخر غير مشحون فأنهما سيتقاسمان الشحنة الاصلية بينهما.

مثال

كرة موصلة معزولة ومشحونة **(A)** نصف قطرها **1cm** وصلت مع كرة موصلة معزولة وغير مشحونة **(B)** نصف قطرها **10 cm** بواسطة سلك موصل رفيع وكان البعد بين مركزيهما **50 cm** . فأذا كانت شحنة الكرة **(A)** الابتدائية **$10*10^{-9}$ C** وضح كيف تتوزع الشحنة على كل من الكرتين بعد تلامسهما..



الحل

نصف قطر الكرة (A) يساوي $r_A = 1cm= 0.01m$

نصف قطر الكرة (B) يساوي $r_B = 10cm= 0.1m$

المسافة بين مركزي الكرتين A و B تساوي $50cm = 0.5$ m

بعد عملية التماس وتوزيع الشحنة واستقرارها على الكرتين يصبح الجهد

(لان سطح الموصل يعتبر سطح تساوي جهد) $V_B = V_A$ 1

$\because \quad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ} \sum \frac{q}{r}$ 2

لذا فأن الجهد في مركز الكرة (B) يساوي الجهد على سطح الكرة (B) + الجهد بتأثير الشحنة على الكرة (A)

بعد التماس لنفترض ان الشحنة المتبقية على الكرة (A) هي q_A وان الشحنة التي انتقلت الى الكرة (B) هي q_B

$\therefore V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ} \frac{q_B}{r_B} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ} \frac{q_A}{r_{AB}}$ 3

في الحالة 3 اعلاه تعاملنا مع الشحنة على الكرة (A) كما لو انها شحنة نقطية تبعد مسافة r_{AB} عن مركز الكرة (B).

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_A}{r_A} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_B}{r_{AB}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 4$$ (كما ان)

على اعتبار ان الشحنة على الكرة (B) شحنة نقطية تبعد مسافة r_{AB} عن مركز الكرة (A).

$$\rightarrow \quad V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left\{\frac{q_B}{0.1} + \frac{q_A}{0.5}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 5$$

$$\rightarrow \quad V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left\{\frac{q_A}{0.01} + \frac{q_B}{0.5}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 6$$

من 1 و 5 و 6 نحصل على

$$\left\{\frac{q_B}{0.1} + \frac{q_A}{0.5}\right\} = \left\{\frac{q_A}{0.01} + \frac{q_B}{0.5}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 7$$

$$\because \; \boldsymbol{q_A + q_B = 10*10^{-9}\ C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 8$$ (الشحنة الكلية بعد التماس)

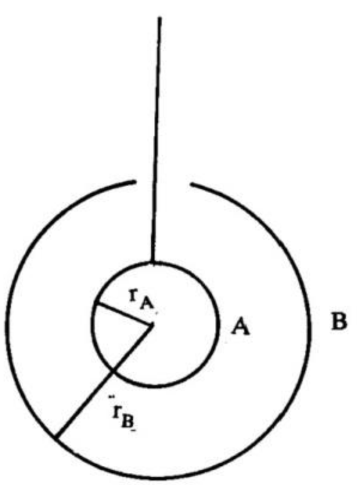
من **7** و **8** نحصل على

$$\boldsymbol{q_B = 9.25 *10^{-9}\ C}$$
$$\boldsymbol{q_A = 0.75 *10^{-9}\ C}$$

and $V = V_B = V_A = 845$ Volt

توسعة للمثال السابق

لنفترض ان الكرة الصغيرة (A) علقت في مركز الكرة الكبيرة (B) كما فى الشكل



وان q_A و q_B هي الشحنة على الكرة (A) و(B) على التوالي

$$\therefore \quad V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left\{\frac{q_B}{r_B} + \frac{q_A}{r_B}\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left\{\frac{q_B}{0.1} + \frac{q_A}{0.1}\right\} \ldots\ldots\ldots 9$$

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left\{\frac{q_B}{r_B} + \frac{q_A}{r_A}\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left\{\frac{q_B}{0.1} + \frac{q_A}{0.01}\right\} \ldots\ldots\ldots 10$$

$$\because V_{AB} = V_A - V_B$$

$$\rightarrow V_{AB} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left\{\frac{q_B}{0.1} + \frac{q_A}{0.01} - \frac{q_B}{0.1} - \frac{q_A}{0.1}\right\}$$

$$= \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_o}\left\{ \frac{1}{0.01} - \frac{1}{0.1}\right\}$$
$$= \frac{90\, q_A}{4\pi\varepsilon_o} \qquad \ldots\ldots\ldots 11$$

من 11 نلاحظ ان V_{AB} مقدار موجب وهذا يعني ان جهد الكرة (A) اعلى من جهد الكرة (B)، وهذا يؤدي الى انه عند توصيل الكرتين مع بعضهما فان الشحنة سوف تنتقل من الكرة (A) الى الكرة (B) حتى يصبح فرق الجهد ($V_{AB} = 0$)
اي ان الشحنة على الكرة (A) تصبح صفر.
نستنتج من ذلك ((ان كل شحنة الكرة (A) تنتقل الى الكرة (B) بغض النظر عن القيمة الابتدائية للشحنة q_B وجهدها وبغض النظر عن موقعها داخل الكرة الخارجية (لان الجهد ثابت داخل الكرة الكبيرة).
وقد استغلت هذه الحقيقة في تصميم **مولد فان دي جراف Van de Graaff generator**. وهذه الحقيقة تنطبق بصفة عامة على اي موصل مهما كان شكله عندما يوضع داخل اي موصل أجوف حيث سيعطي الموصل الداخلي شحنته الى الموصل الخارجي عند التلامس.

قوة العزل او

شدة العزل (dielectric strength) وجهد الموصل الكروي.

تعريف العازل

العازل :- هو المادة التي لا تحتوي على شحنات حرة(شحنات تتحرك في المادة بسهولة تحت تاثير المجال الكهربائي المسلط على تلك المادة)، لذا فهو غير موصل للكهربائية في حدود معينه (؟).

- يتحمل العازل حد اعلى من المجال الكهربائي المؤثر عليه بعدها يفقد العازل صفة العزل ويصبح موصلا.

شدة العزل لمادة

تعرف شدة العزل بأنها الحد الاعلى لشدة المجال الكهربائي (E_m) المؤثرة على مادة عازلة والتي بعدها تصبح المادة موصلة.
او هي اعلى قيمة لشدة المجال الكهربائي (E_m) التي يمكن ان تتعرض لها المادة دون ان تفقد خاصية العزل الكهربائي والتي بعدها تصبح المادة العازلة موصلة.

لقد وجد ان اعلى شدة مجال كهربائي (E_m) يمكن ان يتعرض لها الهواء (تحت الضغط الجوي الاعتيادي) من غير ان تتأين جزيئاته ويصبح موصلا هي

$$E_m = 3\times 10^6\ N/C$$

- يمكن حساب القيمة العظمى للشحنة (q_m) التي يمكن ان يحتفظ بها موصل كروي مشحون في الهواء وذلك بجعل $E_m = 3\times 10^6\ N/C$ في معادلة شدة المجال لموصل كروي التي تم التوصل اليها سابقا (حيث وجدنا سابقا ان شدة المجال لموصل كروي نصف قطره R عند سطح الموصل يعطى بالعلاقة)

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{q}{R^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ 1$$

$$q_m = 4\pi\varepsilon_o R^2 E_m \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots 2$$

و أذا اعدنا كتابة (2) بالشكل التالي:

$$\frac{q_m}{4\pi\varepsilon_o R} = R\,E_m \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ 3$$

الطرف الايمن من المعادلة 3 يمثل جهد (V_m)

$$V_m = R\,E_m \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ 4$$

حيث $\mathbf{V_m}$ أعظم جهد للموصل الكروي في المادة العازلة التي شدة عزلها $\mathbf{E_m}$

ملاحظة :-

من المعادلة 4 نجد ان)) **اعظم جهد لموصل كروي يتناسب طرديا مع نصف قطر الموصل**((

لقد استثمرت المعادلة 4 لزيادة الجهد الاعظم في مولدات فان دي كراف وذلك بجعل الكرة الموصلة كبيرة (R يكون كبير)

مثال

احسب اعظم جهد للموصل الكروي في الهواء اذا كان أ- نصف قطره يساوي 1cm ب- نصف قطره يساوي 1m

الحل

أ)
$$V_m = R\,E_m$$
$$= 0.01m \times 3\times 10^6\ N/C = 3\times 10^4\ \text{Volt}$$

ب)
$$V_m = R\,E_m$$
$$= 1m \times 3\times 10^6\ N/C = 3\times 10^6\ \text{Volt}$$

هل بالامكان شحن موصل كروي معين بحيث تصبح الشحنة عليه اكبر من q_m في الهواء؟

الجواب / كلا

لان زيادة شحنة الموصل فوق q_m تؤدي الى ان تصبح شدة المجال للموصل عند سطحه اكبر من $\mathbf{E_m}$ للهواء وفقا للمعادلة 2 وهذا يجعل الهواء الملامس للسطح الكروي يتأين (يتحول الى ايونات موجبة واخرى سالبة) ويسمح بتفريغ جزء الشحنة الفائض فوق q_m وجعل الشحنة على الموصل لاتزيد على q_m

عمل الرؤوس المدببة في تفريغ الموصلات المشحونة

ان النهايات المدببة هي جزء من سطح موصل نصف قطر تكوره صغير جدا

$E = \frac{V}{R}$

$\because\ V_m = R\,E_m$

$\Rightarrow \quad E = \frac{V}{R}$

اي ان شدة المجال عند الراس المدبب تتناسب عكسيا مع نصف قطر تكوره

ملاحظة

ان المجال الكهربائي خارج النهاية المدببة مباشرةً يكون كبير جدا حتى وان كان الجهد صغير وهو يكفي الى تايين الهواء المحيط بالرأس المدبب.

(إن مقدار شدة المجال الكهربائي بالقرب من سطح موصل يتناسب عكسياً مع نصف قطر التكور. ومن تطبيقاته هو أن هذا المجال يؤثر على الايونات القليلة الموجودة في الهواء ويجعلها تنجذب (أو تتنافر) نحو الرأس المدبب بتعجيل كبير . ونتيجة لاصطدام الايونات بجزيئات الهواء ينتج المزيد من الايونات، وبهذا يصبح الهواء أكثر توصيلاً للكهربائية وتتسرب شحنة الموصل عن طريق الرأس المدبب بمعدلٍ عالٍ).