حل تمارين الفصل الثالث

تمـــرينـــات

٣-١ شحنة موجبة قدرها $20 \times 10^{-6}\ C$ وضعت في مركز سطح كروي نصف قطره $10\ cm$ أحسب عدد خطوط القوة التي تنفذ خلال هذا السطح .

٣-٢ اذا علمت أن ثلاثة آلاف من خطوط القوة تدخل سطحاً مغلقاً ويخرج منه ألف خط . فما مقدار الشحنة الكلية التي يجب أن يحتضنها هذا السطح ؟ وهل هي موجبة أم سالبة ؟

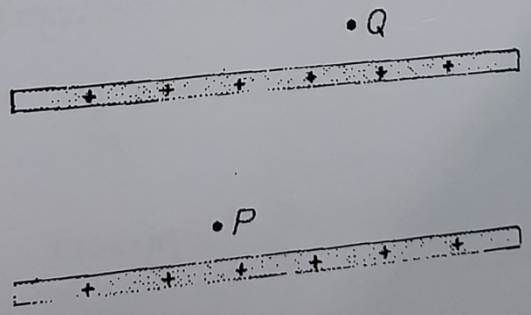
$(1{\cdot}77 \times 10^{-8}\ C)$

٣-٣ سطح اسطواني مغلق نصف قطره R وطوله h موضوع في مجال كهربائي منتظم اتجاهه موازٍ لمحور الاسطوانة . أحسب الفيض الكهربائي خلال هذا السطح المغلق . ما مقدار الفيض اذا وضع السطح الاسطواني بحيث كان محوره عمودياً على المجال ؟

٣-٤ سطح كروي موصل نصف قطره R يحمل شحنة موجبة كثافتها السطحية σ . أوجد بواسطة قانون كاوس شدة المجال الكهربائي عند أي نقطة (أ) خارج السطح الكروي و(ب) داخل السطح .

٣-٥ برهن بالاستعانة بقانون كاوس ، على أن شدة المجال الكهربائي عند أية نقطة خـــارج اسطوانة طويلة موصلة وتحمل شحنة كثافتها السطحية منتظمة . هي نفسها كما لوكانت الشحنة موضوعة على محور الاسطوانة بصورة منتظمة .

٣-٦ يمثل الشكل (٣-١٩) جزء من صفيحتين كبيرتين متوازيتين من الشحنات الموجبة الموزعة بشكل منتظم عليهما بكثافة سطحية قدرها $\sigma\ C/m^2$. استخدم قانون كاوس لايجاد شدة المجال عند النقطتين P و Q .



الشكل ٣-١٩

٣-٧ كرة معدنية موصلة معزولة نصف قطرها 3 cm تحمل شحنة موجبة قدرها 10^{-9} C . تحيط بها كرة مجوفة موصلة معزولة نصف قطرها الداخلي 6 cm والخارجي 9 cm . تحمل شحنة سالبة قدرها 5×10^{-9} C . استخدم قانون كاوس لحساب :

أ- مقدار الشحنة المستقرة على السطح الداخلي للكرة المجوفة وكذلك على سطحها الخارجي .

ب- شدة المجال الكهربائي عند النقاط التي تبعد مسافات قدرها 12 cm، 4.5 cm، 7 cm من المركز.

٣-٨ اسطوانتان طويلتان متحدتا المحور . الاسطوانة الداخلية نصف قطرها a وتحمل شحنة موجبة قدرها λ C/m . اما الاسطوانة الخارجية فنصف قطرها b وتحمل شحنة سالبة بنفس المقدار . استخدم قانون كاوس لايجاد شدة المجال الكهربائي عند النقاط :

$$a < r < b, \quad r > b, \quad r < a$$

$$\left(E = 0, 0, \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_o r} \right)$$

٣-٩ في المسألة السابقة . ما مقدار السرعة التي يجب أن يطلق بها بروتون لكي يستمر في الدوران في الحيز الموجود بين الاسطوانتين في مسار دائري نصف قطره r . اذا علمت أن

$$\lambda = 3 \times 10^{-8} \text{ C/m} \qquad (v = 2 \times 10^5 \text{ m/s})$$

٣-١٠ شحنة موجبة موزعة بشكل كرة نصف قطرها 3 m بحيث أن كثافتها الحجمية عند أية نقطة داخل الكرة تعتمد على البعد r من مركزها حسب العلاقة .

$$\rho = (10^{-7}) r \quad \text{C/m}^3$$

أ- ما مقدار هذه الشحنة ؟

ب- ما مقدار شدة المجال الكهربائي عند نقطة تبعد 4 m عن المركز ؟

جـ- ما مقدار شدة المجال الكهربائي عند نقطة تبعد 2 m عن المركز ؟

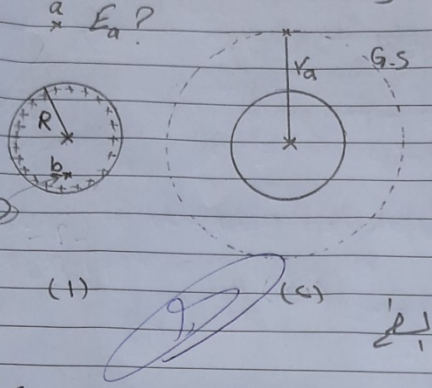
$$(2.54 \times 10^{-5} \text{ C} \cdot 1.43 \times 10^4 \text{ N/C} \cdot 1.13 \times 10^4 \text{ N/C})$$

س ٢ ـ ع ص A عبارة

مثال (١) عبارة عن كرة مصمتة موصلة نصف قطرها R
بداخلها تجويف كروي نصف قطره b
شحنة الكرة الموصلة q
شحنة التجويف q'

المطلوب/ أ/ إيجاد شدة المجال الكهربائي خارج السطح الكروي أي (E_a)

ب/ إيجاد شدة المجال داخل السطح أي E_b



حل الفرع (أ) / نفترض سطح كاوس على شكل سطح كروي متحد المركز مع الكرة الموصلة المشحونة نصف قطره r_a (حيث r_a بعد النقطة a عن مركز الكرة المشحونة) و $r_a \geq R$

× وبسبب التناظر فإن المجال في كل نقطة من نقاط سطح كاوس يكون متساوي وباتجاه عمودي على السطح.

قانون كاوس ①
$$\oint_{G.S} E\cos\theta\, ds = \oint_{G.S} E.ds = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E_a \oint ds = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{---} ②$$

ولكون التكامل على سطح كاوس $\oint_{G.S} ds$ يساوي (مساحة السطح الكروي لكاوس)

$$\therefore \oint_{G.S} ds = 4\pi r_a^2 \quad \text{---} ③$$

حيث المشحونة المطلوبة عن السطح الكروي الداخل = مساحة السطح × كثافة الشحنة السطحية

$$\therefore q = \sigma \times (4\pi R^2) \quad \text{---} ④$$

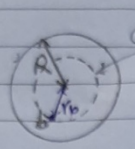
نعوض ④ و ③ في ②

$$E_a = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r_a^2}$$

شدة المجال في أي نقطة خارج السطح الكروي وتبعد عنه r_a عن مركزه

حل الفرع (ب) من س ٣ - ٤

الحل /



نفرض سطح كاوس على شكل سطح كروي متحد المركز مع الكرة الموصلة المشحونة يمر بالنقطة b ونصف قطره r_b (حيث r_b بعد النقطة b عن مركز الكرة المشحونة) و $r_b < R$ كما بالشكل (3)

ولكون جميع الشحنة تستقر على السطح الخارجي للكرة الموصلة المشحونة

∴ الشحنة داخل سطح كاوس تساوي صفر

$$q = 0$$

$$\because \oint_{G.S} E \cos\theta \, ds = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E_b \int_{G.S} ds = 0$$

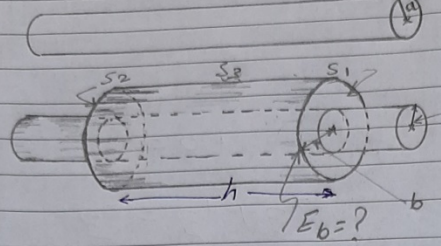
$$\because \int ds \neq 0$$

$$\Rightarrow E_b = 0$$

أي أن شدة المجال في أية نقطة داخل الجسم الكروي المشحون تساوي صفر

س ٣ ـ ٥ ص ٨٠ يحيى براوي

(أ) أسطوانة موصلة طولها لانهائي نصف قطرها a وكثافة شحنتها السطحية منتظمة σ



(ب)

المطلوب / إثبات أن المجال الكهربائي في أي نقطة خارج الأسطوانة مثل (b) يساوي $E_b = \frac{\sigma a}{2\pi\epsilon_0 b}$ (أي كأن الشحنة موزعة على محور الأسطوانة أي خط متهم شحنة) مثبت سابقاً

الحل / —

لإيجاد شدة المجال في النقطة (b) نفترض سطح غاوس على شكل أسطوانة متحدة المركز مع الأسطوانة المشحونة نصف قطرها b وطولها h.

∴ الشحنة بالكرة داخل سطح غاوس = كثافة الشحنة × مساحة الأسطوانة المشحونة

$$q = \sigma(2\pi a h) \quad \text{—— (1)}$$

$$\oint_{G.S} E\cos\theta\, ds = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{—— (2) قانون غاوس}$$

$$\text{or} \quad \int_{S_1} E\cos\theta\, ds + \int_{S_2} E\cos\theta\, ds + \int_{S_3} E\cos\theta\, ds = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$E \parallel S_1, \theta = 90^\circ$ $\quad E \parallel S_2, \theta = 90^\circ$ $\quad E \perp S_3, \theta = 0^\circ$

$\int_{S_1} = 0$ $\quad \int_{S_2} = 0$ $\quad \int_{S_3} \neq 0$

$$\Rightarrow \int_{S_3} E\, ds = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{or} \quad E\int_{S_3} ds = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{—— (3)}$$

$$\because \int_{S_3} ds = 2\pi b h \quad \text{—— (4)}$$ مساحة سطح غاوس G.S

نعوض (1) ، (4) في (3) ونحل عن E

$$E_b = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 b} \quad \text{—— (5)}$$

∴ كثافة الشحنة الطولية (λ) للأسطوانة المشحونة = كمية الشحنة / طولها

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\sigma(2\pi a h)}{h}$$

or

$$\sigma = \frac{\lambda}{2\pi a} \quad \text{—— (6)}$$

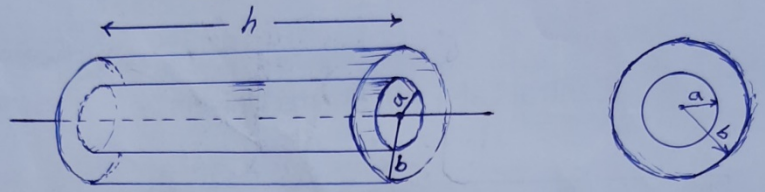
نعوض في (5)

$$E_b = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 b}$$

٢-٨ جيمس إراوي ص٨١

اسطوانتان طويلتان متحدتا المحور. الاسطوانة الداخلية نصف قطرها a وتحمل شحنة موجبة قدرها λ C/m اما الاسطوانة الخارجية فانه نصف قطرها b وتحمل شحنة سالبة بنفس المقدار. استخدم قانون كاوس لايجاد شدة الكهربائي عند النقاط $r>b$ و $r<a$ و $a<r<b$

الحل :-



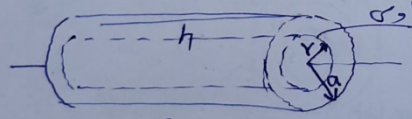
نفرض ان طول كل اسطوانة يساوي h

∴ الشحنة على الاسطوانة الداخلية $q=+\lambda h$ وهي موزعة على السطح

" " " الخارجية $q=-\lambda h$ وهي موزعة على سطح الاسطوانة ايضاً

الحالة الاولى $r<a$ (شدة المجال داخل الاسطوانة الصغيرة)

نتصور سطح كاوس على شكل اسطوانة متحدة المحور مع الاسطوانتين نصف قطرها $r<a$ كما في الشكل



$$\therefore \int_{G.S} E.ds = \frac{q}{\epsilon_0}$$

ولكن سطح كاوس المرسوم داخل الاسطوانة الداخلية لا يحوي شحنة لان الشحنة الداخلية والشحنة داخل سطح كاوس في هذه الحالة تساوي صفر اي ان

∴ الشحنة داخل سطح كاوس

$$\oint_{G.S} E.ds = 0 \quad \text{or} \quad E\int ds = 0$$

$$\int ds \neq 0 \quad \therefore E = 0$$

a

الحالة الثالثة $r > b$
اي نقطة المجال خارج الاسطوانة

نتصور كاوس على شكل اسطوانة نصف قطرها r و $r > b$ محورها مع الاسطوانة المشحونة

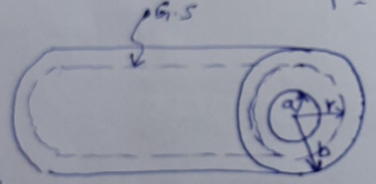
وشحنة q داخل كاوس في هذه الحالة تساوي مجموع شحنتي الاسطوانة

$$q = \lambda h + (-\lambda h) = 0$$

$$\therefore \oint_{G.S} E \cdot ds = \frac{q}{\epsilon_0} = 0$$

$$\Rightarrow E = 0$$

الحالة الثالثة $a < r < b$ اي نقطة المجال بين الاسطوانتين



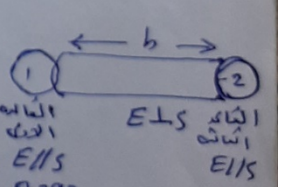
ايضا نتصور كاوس على شكل اسطوانة نصف قطرها r حيث $a < r < b$ محورها مع الاسطوانة

وشحنة q داخل كاوس في هذه الحالة تساوي شحنة الاسطوانة الصغيرة فقط $q = \lambda h$

$$\therefore \oint_{G.S} E \cdot ds = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

$E\cos\theta ds$

$$\oint_{G.S} E \cdot ds = \int_{\text{القاعدة اليسرى}} E \cdot ds + \int_{\text{الاسطوانة}} E \cdot ds + \int_{\text{القاعدة اليمنى}} E \cdot ds$$



$\cos\theta = 0$ $\cos\theta = 1$ $\cos\theta = 0$

$$= \int_{\text{الاسطوانة}} E \cdot ds = E(2\pi r h)$$

$$\Rightarrow E(2\pi r h) = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}}$$

س ٢-١٠ ص ٨١ بيتا أردي

كتلة موجبة موزعة بشكل كرة نصف قطرها 3m بحيث الكثافة الحجمية عند اي نقطة داخل الكرة تعتمد على البعد r من مركزها حسب العلاقة $\rho = 10^{-7} r \ C/m^3$

أ- ما مقدار هذه الشحنة . ب- ما مقدار شدة المجال الكهربائي عند نقطة تبعد 4m عن المركز و. ما مقدار شدة المجال الكهربائي عند نقطة تبعد 2m عن المركز

الحل

أ- نمثل هذه المسألة (حيث كيفية توزيع الشحنة غير منتظم) لذا علينا استخدام العلاقة $(q = \rho \tau)$

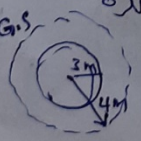
لذا يجب استخدام العلاقة $dq = \rho \, d\tau$

∵ $\tau = \frac{4}{3}\pi r^3$ حجم الكرة

$$d\tau = \frac{4}{3}\pi (3r^2 dr)$$
$$= 4\pi r^2 dr$$
$$dq = \rho \, d\tau$$
$$= (10^{-7} r) \times (4\pi r^2 dr)$$
$$= 10^{-7} (4\pi) r^3 dr$$
$$q = \int dq = \int_0^r 10^{-7} 4\pi r^3 dr$$
$$= 10^{-7} \pi r^4 \Big]_0^r$$
$$= 10^{-7} \pi r^4 \quad \text{——} *$$

∵ $q = 10^{-7} \times 3.14 \times 81$
$= 2.54 \times 10^{-5} C$

ب- نفرض سطح كاوسي على شكل كرة متحدة المركز مع الكرة المشحونة نصف قطرها 4m أي خارج الكرة



$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k = 9 \times 10^9$

نتبع ب-

∵ $\oint_{G.S} E \cdot ds = \frac{q}{\epsilon_0}$

$E \oint_{G.S} ds = \frac{q}{\epsilon_0}$

$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$

$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ← نصف قطر سطح كاوسي $= 4m$

$= \frac{9 \times 10^9 \times 2.54 \times 10^{-5}}{16}$

$= 1.428 \times 10^4 \ \frac{N}{C}$

ج- نفرض سطح كاوسي على شكل كرة متحدة المركز مع الكرة المشحونة نصف قطرها 2m أي داخل الشحنة

$q = 10^{-7} \pi r^4$
$= 10^{-7} \times 3.14 \times 2^4$
$= 0.5 \times 10^{-5} \ C$

$\oint_{G.S} E \cdot ds = \frac{q}{\epsilon_0}$

$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$

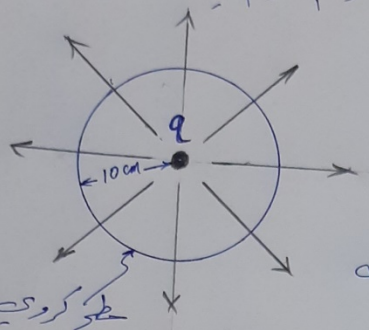
$\Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ~~$\frac{q}{9 \times 10 \times 0.5 \times 10^{-5}}$~~

$= \frac{9 \times 10^9 \times 0.5 \times 10^{-5}}{4^2} = 1.13 \times 10^4$

تمرينات لبعض الأمثلة (كتاب جيانكولي ص ٨٠)

س (٣-١) شحنة موجبة قدرها $20\times10^{-6}\ C$ وضعت في مركز سطح كروي نصف قطره 10 cm احسب عدد خطوط القوة التي تنفذ خلال هذا السطح

الحل



ان عدد خطوط الفيض التي تنفذ من خلال اي سطح مغلق او تتناقص اليه وبغض النظر عن شكل السطح تعطى بالعلاقة

$$\Phi = ES = \frac{q}{\epsilon_0}$$

حيث q هي صافي الشحنة المحصورة داخل ذلك السطح

لذا فان

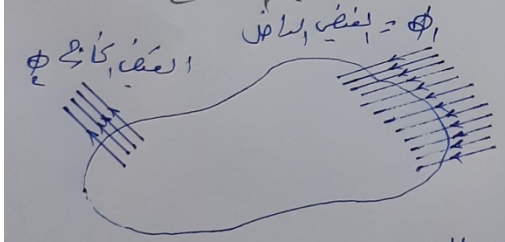
$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$= \frac{20\times10^{-6}\ C}{8.85\times10^{-12}\ \frac{C^2}{N\,m^2}}$$

$$= 2.26\times10^{6}\ \frac{N\cdot m^2}{C}$$

ملاحظة

عدد الخطوط ليس له علاقة بحجم السطح



س (٣-٢) اذا علمت ان ثلاثة آلاف خط قوة تدخل سطحاً مغلقاً وتخرج منه ألف خط.

فما مقدار الشحنة الكلية التي يجب ان يحتضنها هذا السطح، وهل هي موجبة ام سالبة

الحل

Φ_1 الفيض الداخل = 3000 خط لكل ثانية

Φ_2 الفيض الخارج = 1000 خط لكل ثانية

Φ الفيض الكلي خلال السطح =

$$\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$$

$$= 3000 - 1000 = 2000$$

الى الداخل

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$q = \phi \epsilon_0$$
$$= 2000 \frac{N}{C} \times 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$
$$= 17.7 \times 10^{-9}$$
$$= 1.77 \times 10^{-8} C$$

(الشحنة سالبة)

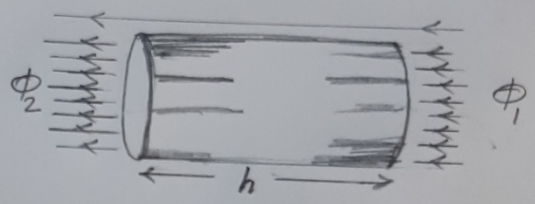
او

ϕ ثابت
$\phi = ES$
$= \frac{N}{C} \cdot m^2$

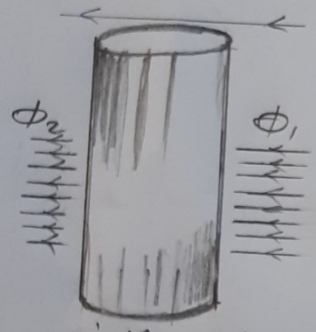
س(٣-٣)

يطفو اسطوانة مغلقة نصف قطره R وطوله h موضوع في مجال كهربائي منتظم اتجاهه موازٍ لمحور الاسطوانة. احسب الفيض الكهربائي خلال هذا السطح المغلق. ما مقدار الفيض اذا وضع السطح الاسطواني بحيث كان محوره عمودياً على المجال.

الحل



الحالة الاولى



الحالة الثانية

في الحالة الثانية

الفيض الداخل Φ_1 = الفيض الخارج Φ_2

لذا فان مقدار الفيض خلال السطح الاسطواني المغلق = صفر

$$\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$$
$$= 0$$