(1-2)

الفصل الثاني Chapter 2

The Electric Field المجال الكهربائي

تعريف المجال الكهربائي:

يحيط بأي جسم مشحون في الفراغ مجال كهربائي electric field وأن هذا المجال يؤثر على أي شحنة توضع عند أي نقطة قريبة منه وهنا الكرة الأرضية أحدها قوة الجاذبية F_g حيث تؤثر قوة الجاذبية الأرضية على أي جسم (كتلة) يدخل مجال الجاذبية الأرضية g.

لغرض الكشف عن المجال الكهربائي نستخدم جسم مشحون بشحنة موجبة صغيرة جداً تسمى بشحنة الاختبار (test charge) بحيث أن دخولها للمجال الكهربائي لا يؤثر على المجال. وأن شحنة الاختبار تستخدم ككاشف للمجال الكهربائي وأن وجودها في المجال ليس ضرورياً لوجود المجال الكهربائي.

Electric Field Intensity شدة المجال الكهربائي

أن العالم فاراداي (Faraday) أول من افترض فكرة المجال الكهربائي حيث افترض أن المجال ينبعث من الشحنة الكهربائية في جميع الاتجاهات ولقياس هذا المجال توضع شحنة اختبارية عند نقطة معينة في المجال وتحسب القوة المؤثرة عليها.

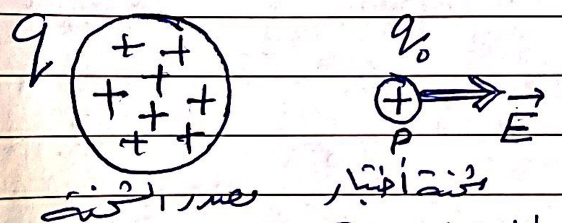
عند وضع شحنة اختبار مقدارها q_0 في مجال كهربائي ناتج عن شحنة مقدارها q (كما مبين بالشكل) فان المجال الكهربائي (E) عند أي نقطة في الفضاء تبعد عن الشحنة q بمسافة r تساوي القوة F مقسومة على الشحنة q_0 أي أن

$$E = \frac{F}{q_0} \quad \text{---(1)}$$

$$\therefore F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q q_0}{r^2} = k\frac{q q_0}{r^2}$$

$$\therefore E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \quad \text{---(2)}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{i}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r} \quad \text{---(3)}$$



حيث أن $\vec{i}_r$ متجه الوحدة (unit vector)

أن المجال الكهربائي (E) هو كمية فيزيائية متجهة ، حيث أن القوة F كمية فيزيائية متجهة ، q_0 كمية فيزيائية قياسية (غير متجهة) وأن اتجاه المجال الكهربائي E يكون بنفس اتجاه القوة الكهربائية F وهو الاتجاه الذي تتحرك فيه الشحنة q_0 لو كانت حرة الحركة ، وبذلك أن وحدات المجال الكهربائي هي وحدات قوة مقسومة على وحدات شحنة (نيوتن/كولوم N/C)

(3-2)

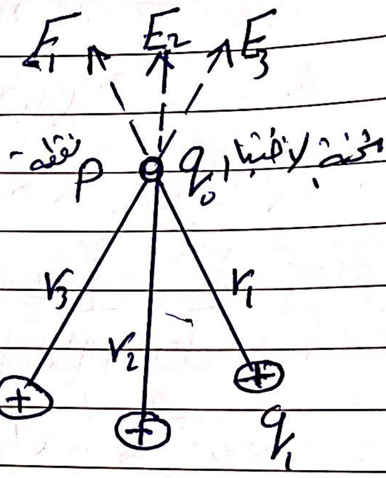
ملاحظة

نلاحظ من معادلة ② أن شدة المجال الكهربائي E لا تعتمد على مقدار شحنة الاختبار q_0 وإنما تعتمد على الشحنة q (الشحنة مصدر المجال الكهربائي) وعلى المسافة r بين الشحنة q وشحنة الاختبار q_0 (والتي تحدد مكان النقطة المراد حساب المجال عندها).

فلو كان هناك عدد من الشحنات النقطية المعزولة q_1 ، q_2 ، q_3 والتي تقع على أبعاد r_1 ، r_2 ، r_3 ... إلخ على التوالي من شحنة الاختبار q_0 الموضوعة عند النقطة P (وكما مبين بالشكل). يمكن حساب شدة المجال لكل من الشحنات النقطية عند نقطة P ، ثم نجمعها جمعاً اتجاهياً بحيث أن

$$E_1 = k\frac{q_1}{r_1^2} \;;\; E_2 = k\frac{q_2}{r_2^2} \;;$$

$$E_3 = k\frac{q_3}{r_3^2} \;;\; E_n = k\frac{q_n}{r_n^2}$$



∴ محصلة شدة المجال الكهربائي E تساوي حاصل جمع شدات المجال E_1 ، E_2 ، E_3 ، E_n جمعاً اتجاهياً

$$\therefore E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_n$$

$$E = K\left(\frac{q_1}{r_1^2} + \frac{q_2}{r_2^2} + \frac{q_3}{r_3^2} + \dots + \frac{q_n}{r_n^2}\right)$$

$$E = K\sum_i \frac{q_i}{r_i^2}$$

حيث i هو رقم الشحنة الكهربائية

$i = 1, 2, 3, 4, \dots n$

* لو فرضنا أن الشحنة q موزعة على جسم ذو أبعاد محدودة (ليس شحنة نقطية بل توزيع سطحي أو حجمي) من هنا من الملائم أن نتصور أن الجسم يقسم إلى عدد كبير من الشحنات المتناهية بالصغر (شحنات نقطية) مقدار كل منها dq وتبعد مسافة r عن نقطة P (حيث أن r متغيرة لكل شحنة dq) ثم نحسب شدة المجال dE لكل شحنة صغيرة dq عند النقطة P باعتبار كل منها يمثل شحنة نقطية، حيث أن

$$dE = K\frac{dq}{r^2}$$

(4-2)

وكحساب شدة المجال بالنسبة لهذا الجسم الكبير المتكون من النقطة P نأخذ التكامل المتجه للطرفين Vector integral للمعادلة السابقة تحصل على

$$E = K\int \frac{dQ}{r^2}$$

خطوط المجال الكهربائي :

أن العالم مايكل فراداي (1791 ↔ 1867) هو أول من مثل المجال الكهربائي بخطوط تسمى (الخطوط القوة) (Lines of Force) وذلك في عام 1840 وهي خطوط وهمية يكون اتجاهها باتجاه المجال وكثافتها تمثل شدة المجال الكهربائي في تلك المنطقة.

ويمكن اجمال مميزات الخطوط المجال الكهربائي (خطوط القوة) بما يلي :

① متجه المجال الكهربائي E يكون باتجاه المماس لخط المجال عند كل نقطة ويمتلك الخط اتجاه يحدد بأسهم لها نفس اتجاه القوة المؤثرة على الشحنة الاختبار الموجبة الموضوعة بالمجال.

② يكون عدد خطوط المجال لكل وحدة مساحات تمر خلال مساحة سطحية عمودياً على خطوط المجال تتناسب طردياً مع مقدار المجال الكهربائي في تلك المنطقة لهذا فان خطوط المجال الكهربائي تكون اقرب من بعضها البعض عندما يكون المجال الكهربائي قوياً وتكون خطوط المجال الكهربائي متباعدة عن بعضها البعض عندما يكون المجال الكهربائي ضعيف.

③ تنبع (تخرج) خطوط المجال الكهربائي من الشحنة الموجبة وتنتهي (تدخل) في الشحنة السالبة. وفي حالة وجود شحنة واحدة (منفردة) فقط فان خطوط المجال تبدأ (تخرج)

(5-2)

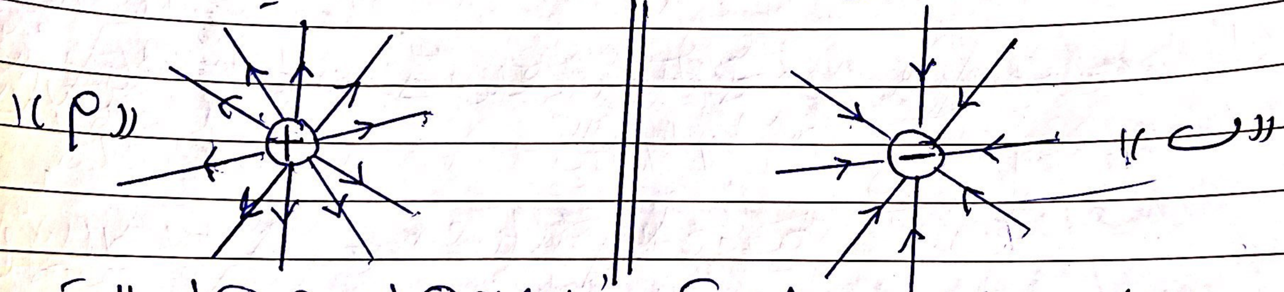
أو تنتهي (تدخل) من مكان لانهائي (بعيد جداً)

4) عدد خطوط المجال التي تخرج من الشحنة الموجبة (أو التي تصل الى (أو تدخل في) الشحنة السالبة) يتناسب طردياً مع مقدار الشحنة.

5) خطوط المجال الكهربائي لا تتقاطع مع بعضها.

6) خطوط المجال الكهربائي تكون متقاربة من بعضها عندما نصل الى الشحنة وتكون متباعدة عن بعضها كلما ابتعدنا عن الشحنة مما يشير الى أن المجال الكهربائي يكون عالي قرب الشحنة وتقل قيمته كلما ابتعدنا عن الشحنة.

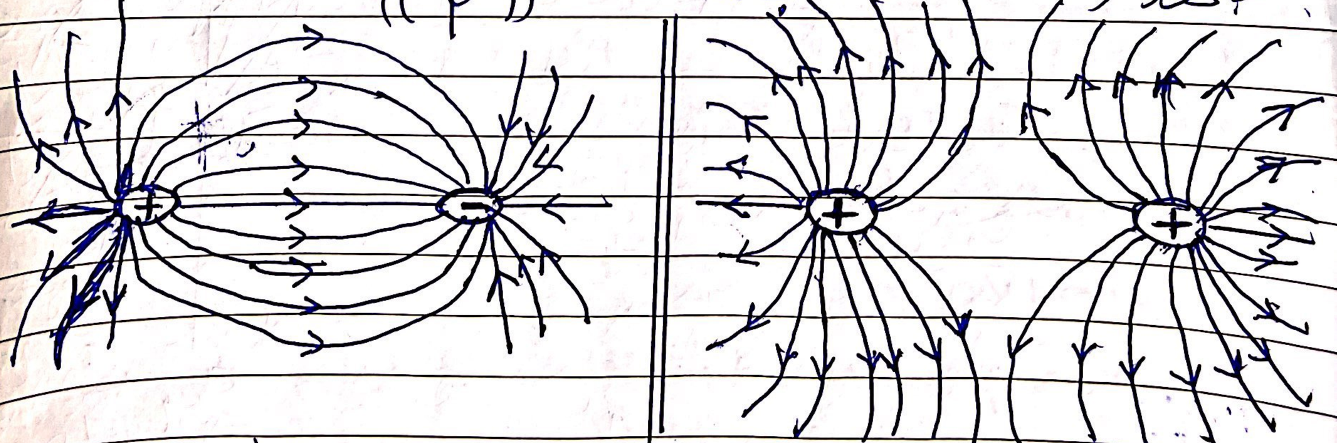
والشكل أدناه يوضح خطوط المجال لشحنة نقطية واحدة



الشكل يوضح خطوط المجال الكهربائي للشحنة (أ) الموجبة (ب) السالبة

والشكل أدناه يوضح خطوط المجال لشحنتين نقطيتين متساويتين بالمقدار

((أ)) ((ب))



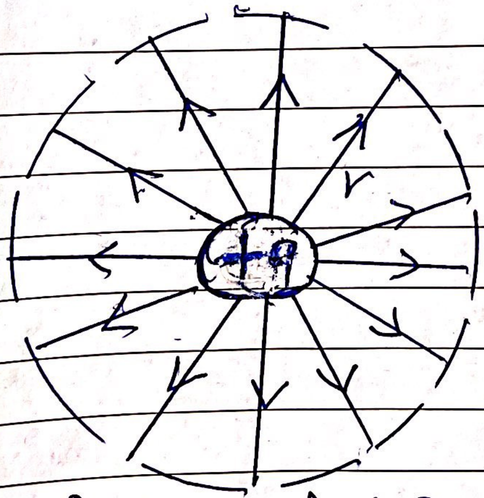
الشكل يوضح خطوط المجال الكهربائي لشحنتين نقطيتين متساويتين (أ) مختلفتين بالاشارة (ثنائي قطب كهربائي)، (ب) متشابهتين بالاشارة

(6-2)

خطوط القوة الكهربائية (Lines of electric force)

إن العالم فاراداي هو أول من أدخل فكرة خطوط القوة الكهربائية لتسهيل تصور المجال الكهربائي (والمجال المغناطيسي أيضاً). حيث أن خط القوة الكهربائية خط وهمي يرسم بحيث يكون اتجاهه (أو اتجاه المماس له) عند أية نقطة من نقاطه يمثل اتجاه المجال الكهربائي في تلك النقطة ولأن اتجاه المجال يتغير من نقطة إلى أخرى تكون خطوط القوة على شكل منحنيات. ولاحظنا من الأشكال في الفقرة السابقة خطوط القوة حول شحنة منفردة معزولة (موجبة أو سالبة)، وكذلك حول شحنتين متساويتين في المقدار ومتعاكستين بالإشارة (ثنائي القطب الكهربائي) وكذلك حول شحنتين موجبتين متساويتين بالمقدار.

نفرض أن شحنة موجبة q موضوعة في مركز كرة وهمية نصف قطرها r فإن شدة المجال عند أية نقطة على السطح الكروي (وكما مبين بالشكل) تساوي



$$E = k\frac{q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

حيث أن كثافة خطوط القوة تساوي شدة المجال الكهربائي E وفي الحالة التي تكون فيها شدة المجال (والتي تساوي كثافة خطوط القوة) واحدة في جميع النقاط الواقعة على سطح محدد الأبعاد وعمودي على المجال يكون العدد الكلي للخطوط النافذة من السطح (N)

(7-2)

$$N = EA \quad (2)$$

حيث أن: E شدة المجال المنتظم و A مساحة السطح
وحيث أن السطح كروي فإن

$$A = 4\pi r^2 \quad (3)$$

من المعادلات (1) و (2) و (3) نحصل على

$$N = EA = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cdot 4\pi r^2$$

$$\therefore \boxed{N = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

نلاحظ من المعادلة الأخيرة التي تمثل عدد خطوط القوة التي تقطع السطح الكروي بصورة عمودية، أن عدد خطوط القوة لا يعتمد على نصف قطر السطح الكروي r، أي أن نفس هذا العدد من الخطوط يقطع سطح أية كرة أخرى تقع الشحنة q في مركزها

Gauss's Law قانون كاوس

يمثل هذا القانون الذي يعرف باسم العالم الألماني كاوس (1777-1855) العلاقة بين فيض المجال الكهربائي Φ خلال سطح مغلق وقيمة الشحنة التي يحتويها هذا السطح بداخله.

ينص قانون كاوس على أن [عدد خطوط القوة N (الفيض الكهربائي Φ) التي تقطع أي سطح مغلق مهما كان شكله منتظماً أو غير منتظم يساوي حاصل قسمة الشحنة التي يحتويها السطح بداخله على ثابت السماحية للفراغ ε_0] وقد أثبتنا في الفقرة السابقة أن مجموع خطوط القوة التي تترك أي سطح مغلق يحتوي على شحنة مقدارها q في داخله يساوي:

$$\boxed{\Phi = N = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

قانون كاوس

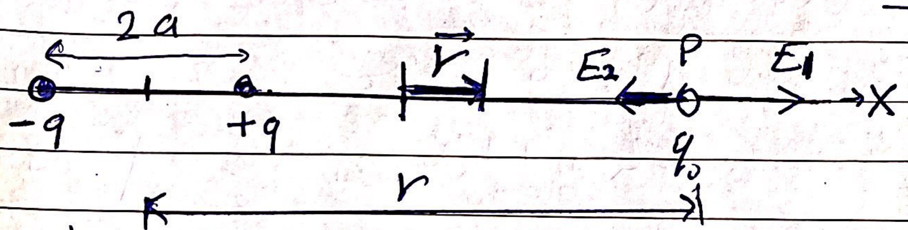
تطبيقات على كيفية حساب شدة المجال الكهربائي

١- المجال الكهربائي الناشئ عن ثنائي القطب الكهربائي (Electric Dipole)

يتكون ثنائي القطب الكهربائي من شحنتين متساويتين بالمقدار وتختلفين بالإشارة أحدهما موجبة $+q$ والأخرى سالبة $-q$ وتفصلهما مسافة صغيرة قدرها $2a$.

سوف نناقش المجال الكهربائي عن ثنائي القطب عند ثلاث نقاط في الفضاء المحيط به

أ) المجال الكهربائي عند نقطة واقعة على امتداد محور ثنائي القطب



نفرض أن نقطة P تبعد مسافة r عن مركز ثنائي القطب وكما مبين بالشكل أعلاه. لحساب شدة المجال عند P نستخدم معادلة شدة المجال الكهربائي (معادلة 2) حيث تكون شدة المجال الناشئ عن الشحنة الموجبة $(+q)$ يساوي

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r-a)^2}$$

المجال الناشئ عن الشحنة السالبة $(-q)$ يساوي

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r+a)^2}$$

أي أن محصلة شدة المجال الناتج من ثنائي القطب عند نقطة P يساوي

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

حيث أن E_1 هو بعكس E_2

$$E = E_1 - E_2$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{(r-a)^2} - \frac{q}{(r+a)^2}\right]$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{4ra}{(r^2-a^2)^2}\right].$$

ونلاحظ من المعادلة أعلاه أن اتجاه المجال الكهربائي E الناشئ على امتداد محور ثنائي القطب يقع على امتداد محور ثنائي القطب ويكون باتجاه الموجب لمحور X .

فعندما تكون $r >> a$ أي أن المسافة بين شحنتي ثنائي القطب صغيرة جداً مقارنة مع المسافة بين مركز ثنائي القطب والنقطة P، أي يمكن اهمال a^2 نسبة r^2 وبذلك فإن المعادلة الأخيرة تصبح كما يلي:

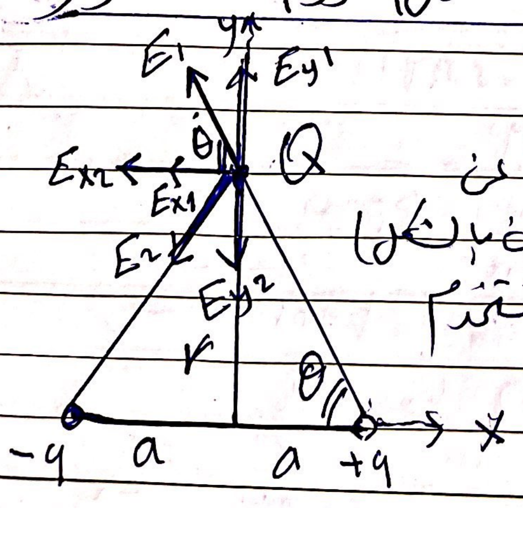
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4aq}{r^3}$$

وحيث أن العزم الكهربائي لثنائي القطب Electric dipole moment (P) يساوي ($P = 2aq$) وعليه فإن:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2P}{r^3}$$

والجدير بالذكر أن عزم ثنائي القطب هو كمية اتجاهية ويكون اتجاهها من الشحنة السالبة الى الشحنة الموجبة.

ب) المجال الكهربائي عند نقطة واقعة على العمود المنصف لمحور ثنائي القطب

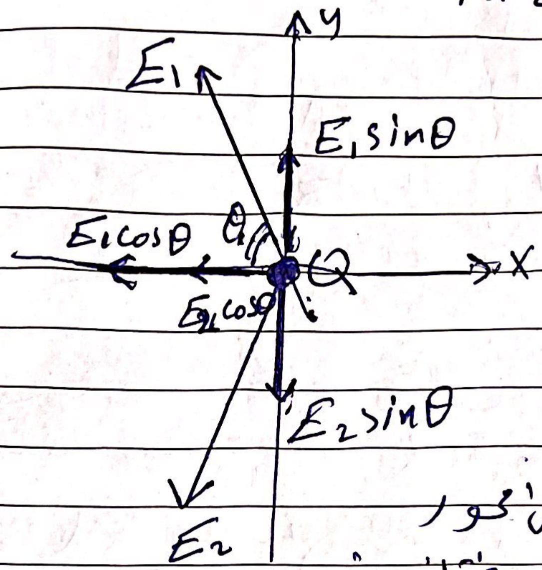


لنفرض أن نقطة Q تبعد مسافة r عن مركز ثنائي القطب الكهربائي (كما مبين بالشكل) ولحساب شدة المجال عند نقطة Q نستخدم معادلة المجال الكهربائي

(10-2)

باستخدام المعادلة (2) نحصل على

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2+a^2}$$



ولكي نجد شدة المجال الكلي الناشئ عن شحنة ثنائي القطب الكهربائي عند نقطة Q نحلل كل من E_1 و E_2 الى مركبتين عمودية وافقية.

نلاحظ أن المركبتين العموديتين على محور ثنائي القطب متساويتين بالمقدار ومختلفتين بالاتجاه وبذلك يكون مجموعهما صفر ($E_1\sin\theta - E_2\sin\theta = 0$)

أما المركبتين الموازيتين لمحور ثنائي القطب فإنهما تكونان بنفس الاتجاه وبذلك تكون محصلة المجالين E_1 و E_2 باتجاه محور ثنائي القطب وكما يلي (أي بالاتجاه السالب لمحور y) بحيث أن:

$$E = E_1\cos\theta + E_2\cos\theta$$

وحيث أن:

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{r^2+a^2}}$$

نعوض قيم E_1 و E_2 بمعادلة محصلة المجال E نحصل على

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2+a^2}\frac{a}{\sqrt{r^2+a^2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2+a^2}\frac{a}{\sqrt{r^2+a^2}}$$

$$E = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2+a^2}\frac{a}{\sqrt{r^2+a^2}}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2aq}{(r^2+a^2)^{3/2}}$$

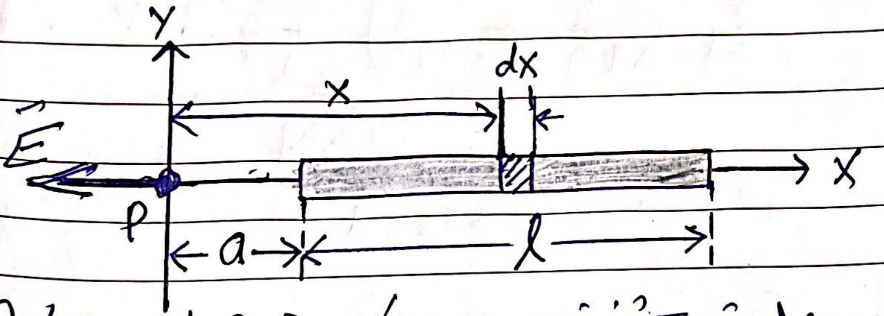
عندما تكون $r \gg a$ نهمل a^2 في المقام نحصل على

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2aq}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}$$

(11-2)

2- المجال الكهربائي الناتج عن ساق مشحون

The electric Field due to charged rod.



ساق طوله l عليه شحنة موجبة لكل وحدة طول مقدارها λ وان شحنة الساق الكلية تساوي Q . المطلوب حساب المجال الكهربائي في نقطة p والتي تقع على امتداد طول محور الساق على مسافة a من نهايته (وكما موضح بالشكل أعلاه)

نفترض الساق يمتد على امتداد محور x و dx هو طول العنصر الصغير ويحمل شحنة dq . وحيث ان الساق يمتلك شحنة لكل وحدة طول مقدارها λ $(\lambda = \frac{dq}{dx})$.

ان مقدار المجال الكهربائي dE عند نقطة p والناتج عن كل عنصر صغير من الساق (يكون في الاتجاه السالب لمحور x لأن كل عنصر صغير يحمل شحنة موجبة dq) على الشكل التالي

$$dE = K\frac{dq}{x^2} = K\frac{\lambda\, dx}{x^2}$$

ولان الساق متصل وحيث ان كل عنصر على الساق ينتج عنه مجال كهربائي في الاتجاه السالب لمحور x فان مجموع مشاركات كل عناصر الساق الصغيرة يمكن ايجادها بالتكامل على كل عناصر الساق وكما يلي

$$E = \int dE = \int_a^{l+a} K\lambda \frac{dx}{x^2}$$

وحيث ان K و $\lambda = Q/l$ هي مقادير ثابتة ويمكن

(12-2)

أخرجها خارج التكامل أي أن

$$E = K\lambda \int_a^{l+a} \frac{dx}{x^2} = K\lambda \left[-\frac{1}{x} \right]_a^{l+a}$$

$$E = K \frac{Q}{l} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{l+a} \right)$$

$$E = \frac{KQ}{a(l+a)} \quad *$$

ملاحظة:

① عندما $(a \to 0)$ أي أن طرف الساق الايسر يقترب من نقطة P أي أن المسافة بين طرف الساق الايسر ونقطة P تؤول صفر فان شدة المجال $(E \to \infty)$ لانهائية

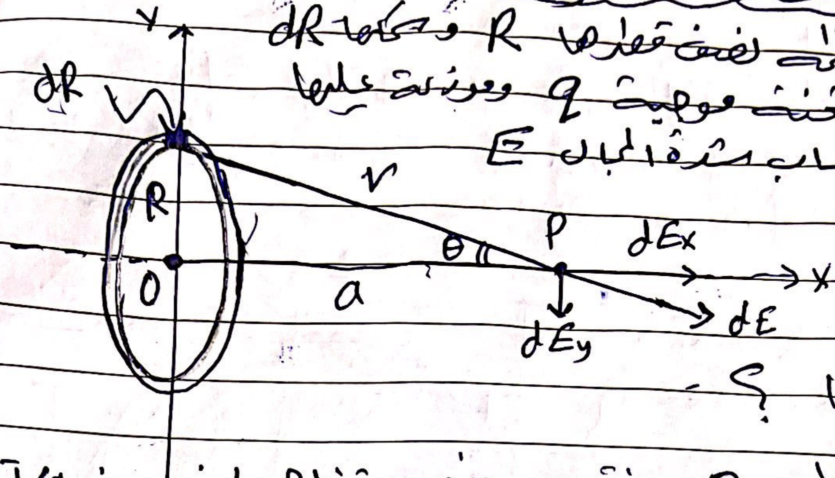
② لو فرضنا أن $(a \gg l)$ أي أن نقطة P بعيدة جداً عن الساق فما مقدار المجال عند نقطة P؟

عندما تكون $(a \gg l)$ فان l تهمل نسبة الى a $(l+a) \to a$ وبذلك فان المعادلة $(*)$ أعلاه تصبح

$E = K \frac{Q}{r^2}$ وهذا بالضبط يمثل المجال الكهربائي الناتج عن شحنة نقطية. أي انه شدة المجال عند النقاط البعيدة عن ساق متصل مشحون يصبح مثل شدة المجال لشحنة نقطية.

3- المجال الكهربائي لحلقة مشحونة

حلقة دائرية نصف قطرها R وسمكها dR مركزها O مشحونة بشحنة موجبة q وموزعة عليها بانتظام. المطلوب حساب شدة المجال E لهذه الحلقة عند نقطة p الواقعة على محور الحلقة وتبعد مسافة a عن مركزها؟



لإيجاد شدة المجال عند نقطة p. نتصور عنصر صغير من الحلقة يحمل شحنة مقدارها dq. وكتابة شدة المجال لهذا العنصر عند نقطة p

$$dE = K\frac{dq}{r^2} \quad —(1)$$

where $r^2 = a^2+R^2 \quad —(2)$

$$\therefore dE = K\frac{dq}{a^2+R^2} \quad —(3)$$

نحلل شدة المجال dE الى مركباته

الافقية $dE_x = dE\cos\theta$

العمودية $dE_y = dE\sin\theta$

أن المركبات العمودية تلغي احداها الأخرى لانه يوجد لكل عنصر هناك عنصر مماثل له بالاتجاه الآخر ومساوية بالمقدار ومعاكسة بالاتجاه

$$E_y = \int dE_y = 0$$

تبقى فقط المركبة الأفقية لأنها تكون بنفس الاتجاه لجميع العناصر المتماثلة أي أن

$$E_x = \int dE_x = \int dE\cos\theta \quad —(4)$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{a}{r} \quad —(5)$$

نعوض عن المعادلات (2) و(3) و(5) بالمعادلة (4) نحصل على

$$E_x = \int K\frac{dq}{a^2+R^2}\cdot\left(\frac{a}{r}\right)$$

$$E_x = k\frac{a}{a^2+R^2}\frac{1}{\sqrt{a^2+R^2}}\int dq$$

$E_y = 0$

$$\boxed{E = k\frac{aq}{(a^2+R^2)^{3/2}}} \quad —(*)$$

(1) عندما p بعيدة جداً عن الحلقة $(a>>R)$ أي أن

$$E = k\frac{q}{a^2}$$

أي أن شحنة الحلقة تعتبر نقطية عند المسافات البعيدة

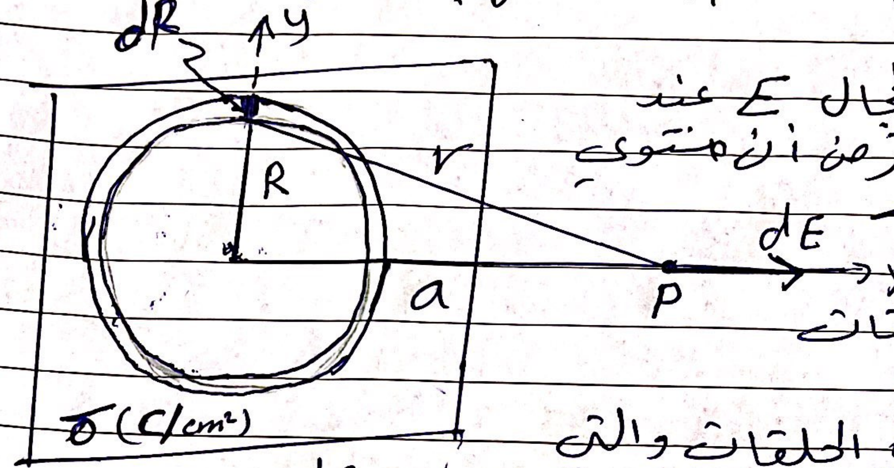
(2) عندما p تقع في مركز الحلقة $(a=0)$ فإن شدة المجال

$$E = 0$$

شدة المجال تساوي صفراً عند مركز الحلقة

4 - المجال الكهربائي لشحنة موزعة بشكل صفيحة مستوية

لنفرض أن صفيحة موصلة بشكل مستوي مساحتها لا نهائية مشحونة بشكل منتظم وبكثافة شحنة سطحية $\sigma\ (C/m^2)$. والمطلوب حساب شدة المجال عند النقطة p الواقعة على بعد a من الصفيحة؟



* لإيجاد شدة المجال E عند النقطة p نفترض أن مستوي الصفيحة اللانهائية تقسم الى عناصر بشكل حلقات متحدة المركز. نأخذ أحد هذه الحلقات والتي نصف قطرها R وعرضها dR وشحنتها dq، وحيث أن المجال الكهربائي للحلقة المشحونة يعطى بالعلاقة:

$$E = K \frac{aq}{(R^2+a^2)^{3/2}}$$

لذا فان المجال الناشئ عن عنصر الحلقة يعطى بالعلاقة

$$dE = K \frac{a\,dq}{(R^2+a^2)^{3/2}}$$

الاتجاه بعيداً عن الصفيحة

Where: $dq = \sigma \times$ (مساحة الحلقة)

حيث dq هي شحنة الحلقة

محيط الحلقة $2\pi R$ dR

عند فتح الحلقة تصبح مستطيل طوله $(2\pi R)$ وعرضه dR

$$dq = \sigma(2\pi R\,dR)$$

$$dE = K \frac{a(2\pi R\,dR)\,dR}{(R^2+a^2)^{3/2}}$$

$$E_p = \int dE = 2\pi\sigma a k \int_0^\infty \frac{R\,dR}{(R^2+a^2)^{3/2}}$$

$$E_p = 2\pi\sigma a k \int_0^\infty (R^2+a^2)^{-3/2} R\,dR = 2\pi\sigma a k \left[-\frac{1}{(R^2+a^2)^{1/2}}\right]_0^\infty$$

$$E_p = 2\pi\sigma a k \left[-\left(0-\frac{1}{a}\right)\right] = 2\pi\sigma a k\left[\frac{1}{a}\right]$$

$$\boxed{E_p = 2\pi\sigma K = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

حيث $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

أي أن شدة المجال لا تعتمد على بعد النقطة P