قيم الحد الأقصى والحد الأدنى
الدوال التزايدية والدوال التناقصية

* اذا كانت $f'(x_0) > 0$ إذن ممكن ان نبين ان $f(x)$ هي داله تزايدية عند $x = x_0$ وبالمثل اذا كانت $f(x_0) < 0$ إذن تكون $f(x)$ داله تناقصية عند $x = x_0$ أما اذا $f'(x_0) = 0$ ، إذن $f(x)$ هي داله مستقرة.

* الحد الأقصى النسبي والحد الأدنى النسبي

Relative maximum and minimum

Values of function قيم الدالة

الدالة $f(x)$ يقال أن لها حد أقصى نسبي عند $x = x_0$ لو أن $f(x_0) \geq f(x)$ لكل قيم x في بعض الفترة المفتوحة المحتوية على x_0 ، بمعنى أنه اذا كانت قيمة $f(x_0)$ أكبر من أو تساوي قيمة $f(x)$ لكل النقط القريبة. وتكون للدالة $f(x)$ حداً أدنى نسبي عند $x = x_0$ لو أن $f(x_0) \leq f(x)$ لكل قيم x في بعض الفترات المفتوحة المحتوية على x_0. اي أنه إذا كانت قيمة $f(x_0)$ أقل من أو تساوي قيمة $f(x)$ عند كل النقط القريبة.

* اذا كانت $f(x)$ قابلة للتفاضل في $a \leq x \leq b$ واذا كانت $f(x)$ لها حد أقصى (أو أدنى) عند $x = x_0$ حيث $a < x_0 < b$ اذاً $f'(x_0) = 0$.

اختبار المشتقة الأولى First derivative test

الخطوات التالية يمكن ان تستخدم قيم الحد الأقصى أو الأدنى النسبي للدالة $f(x)$ معاً مع المشتقة الاولى التي تكون متصلة

١ - حل $f'(x) = 0$ للقيم الحرجة

٢ - ضع القيم الحرجة على محور x وبذلك يتحدد عدد من الفترات

٣ - عين إشارة $f'(x)$ على كل فترة

٤ - دع x تتزايد خلال كل قيمة حرجة $x = x_0$ أذن

(أ) $f(x)$ لها قيمة قصوى $f(x_0)$، لو $f'(x)$ تغيرت من + الى −

(ب) $f(x)$ تكون لها أدنى قيمة $f(x_0)$، لو $f'(x)$ تغيرت من − الى +

(ج) لا تكون للدالة $f(x)$ أعلى أو أدنى قيمة عند $x = x_0$ لو $f'(x)$ لا تغير في إشارتها.

مثال // اذا كانت $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$

أوجد (أ) النقطة الحرجة (ب) الفترات التي فيها y تزايدية وتناقصية (ج) أقصى وأدنى قيم للدالة y

$$y' = x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$$

بوضع $y' = 0$ يعطي القيم الحرجة $x = -3$، $x = 2$. النقطة الحرجة هي $(-3, 43/2)$ و $(2, 62/3)$.

(ب) عندما تكون y' موجبة ما تكون y تزايدية وعندما تكون y' سالبة تكون y تناقصية

عندما $x < -3$ مثلاً $x = -4$ $y' = (-)*(-) = +$ و y تزايدية

عندما $-3 < x < 2$ مثلاً $x = 0$ $y' = (+)(-) = -$ و y تناقصية

عندما $x > 2$ مثلاً، $x = 3$، $y' = (+)(+) = +$ و y تزايدية

$x<-3$	$x=-3$	$-3<x<2$	$x=2$	$x>2$
$y'=+$ ↗		$y'=-$ ↘		↗ $y'=+$
y increases		y decreases		y increases
تتزايد		تتناقص		تتزايد

(م) نختبر القيم الحرجة $x=-3$ ، $x=2$ للحد الأقصى والأدنى كلما تزداد x خلال -3 ، y' تغير إشارتها من $+$ الى $-$ ، لذلك عند $x=-3$ لـ y لها أقصى قيمة $4\,3/2$. كلما تزايد x خلال 2 ، تتغير إشارة y' من $-$ الى $+$ إذن عند $x=2$ ، y لها أدنى قيمة $2/3$.

مثال // أختبر $y=|x|$ لأقصى وأدنى قيمة .

الدالة معرفة في كل مكان ولها مشتقة لكل قيم x ما عدا $x=0$ لذلك $x=0$ هي القيمة الحرجة . لقيم $x<0$ تكون $f'(x)=-1$ ولقيم $x>0$ تكون $f'(x)=+1$. الدالة لها قيمة أدنى عند $x=0$.

التقعر Concavity

* كلما زادت x ، تكون $f'(x)$ إما لها نفس الإشارة وتزداد أو تغير الإشارة من سالب الى موجب ، في كلتا الحالتين يزداد ميل $f'(x)$ لذلك $f''(x)>0$ ويسمى القوس من المنحني $y=f(x)$ مقعر للأعلى .

* كلما زادت x تكون $f'(x)$ إما لها نفس الإشارة وتقل أو تغير الإشارة من موجب الى سالب ، وفي كلتا الحالتين الميل $f'(x)$ يقل و $f''(x)<0$. ويسمى القوس من المنحني $y=f(x)$ مقعر للأسفل .

نقطة الانقلاب :- Point of inflection

* نقطة الانقلاب هي نقطة تتغير عندها المنحني من مقعر لأعلى الى مقعر لأسفل والعكس صحيح .

مثال // أختبر $y = x^4 - 6x + 2$ من ناحية التقعر ونقاط الانقلاب .

$$y' = 4x^3 - 6$$

$$y'' = 12x^2$$

نقاط الانقلاب الممكنة هي عند $x = 0$. من الفترات $x < 0$ و $x > 0$ ، $y'' = +$ لذلك الأقواس على جانبي $x = 0$ تكون مقعرة لأعلى لذلك النقطة $(0, 2)$ ليست نقطة انقلاب .

أختبار المشتقة الثانية :- Second derivative test

هناك أختبار ثاني للحد الأعلى والحد الأدنى

اذا كانت قيمة المشتقة الثانية للدالة عند النقطة الحرجة سالبة فان هذه النقطة هي قيمة أعلى (قيمة عظمى محلية) واذا كانت قيمة المشتقة الثانية للدالة عند النقطة الحرجة موجبة فان هذه النقطة حد أدنى (قيمة صغرى محلية) .

مثال // اوجد المشتقة الاولى والثانية للدالة

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$$

المشتقة الاولى والثانية

$$y' = x^2 - x - 2$$

$$y'' = 2x - 1$$

* نجعل المشتقة الأولى تساوي صفر

$y' = x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0$

إما $(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$

أو $(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1$

2 ، -1 هي النقاط الحرجة

* نعوض في الدالة عن قيم X

$y = \frac{1}{3}(2)^3 - \frac{1}{2}(2)^2 - 2(2) + 2 = -\frac{4}{3}$ ، $x = 2$

$y = \frac{1}{3}(-1)^3 - \frac{1}{2}(-1)^2 - 2(-1) + 2 = \frac{19}{6}$ ، $x = -1$

ومنه فإن $(-1 , \frac{19}{6})$ ، $(2 , -\frac{4}{3})$ هي النقاط الحرجة

بالنسبة للنقطة الحرجة $(2 , -\frac{4}{3})$

$y''\Big|_{x=2} = 2(2) - 1 = 3 > 0$

ومنه $(2 , -\frac{4}{3})$ هي نهاية صغرى محلية

بالنسبة للنقطة الحرجة $(-1 , \frac{19}{6})$

$y''\Big|_{x=-1} = 2(-1) - 1 = -3 < 0$

ومنه $(-1 , \frac{19}{6})$ هي نهاية عظمى محلية

مثال / أحسب $y = x^2 + 250/x$ للحد الأعلى والحد الأدنى باستخدام طريقة المشتقة الثانية

$$y' = 2x - \frac{250}{x^2}$$

$$y' = \frac{2(x^3 - 125)}{x^2} = 0$$

$$\therefore x^3 - 125 = 0 \Rightarrow x = 5$$

لذا النقطة الحرجة $x = 5$

أيضاً

$$y'' = 2 + \frac{500}{x^3}$$

لأن $y'' > 0$ عند $x = 5$ ، y لها حد أدنى

قيمته 75 عند $x = 5$

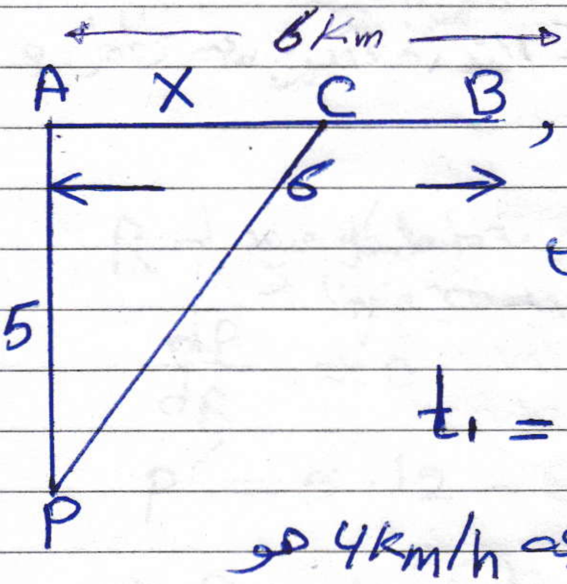
تطبيقات على القيم العظمى والصغرى

((تطبيقات فيزيائية)).

لنفرض أنه يمكن كتابة قيم X ولـ y متناسبة مع الشكل $y = f(x)$ ومنه يمكن حساب القيم العظمى والصغرى للدالة.

مثال //

متحرك M يبدأ من نقطة P يبعد عن النقطة A $5\ km$ ويسير بسرعة $4\ km$ في الساعة متجهاً الى النقطة B التي تبعد عن A $6\ km$ الى اليمين . أوجد النقطة C الواقعة بين A و B والتي يمر بها المتحرك لكي يصل منها الى B بسرعة $2\ km/h$ وفي أقصر وقت ممكن .



اذا وضعنا $X = \overline{AC}$ ، نجد أن $\overline{PC} = \sqrt{25+X^2}$ ،

ومنه فأن الزمن اللازم لقطع $\overline{CB} = 6-X$ المسافة $\overline{PC}$ بسرعة $4km/h$ هو

$$t_1 = \frac{\sqrt{25+x^2}}{2}$$

والزمن اللازم لقطع المسافة $\overline{CB}$ بسرعة $4km/h$ هو

$$t_2 = \frac{6-x}{4}$$

اذن الزمن اللازم ليصل المتحرك الى B هو

$$t = t_1 + t_2 = \frac{6-x}{4} + \frac{\sqrt{25+x^2}}{2}$$

ويكون الزمن اللازم ليصل المتحرك الى B أقصر ما يمكن اذا كان $\frac{dt}{dx} = 0$ ومنه

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{4} + \frac{x}{2\sqrt{25+x^2}} = 0$$

$$\therefore \frac{x}{2\sqrt{25+x^2}} = \frac{1}{4} \Rightarrow 2x = \sqrt{25+x^2}$$

$$\therefore 4X^2 = 25 + X^2 \Rightarrow 3X^2 = 25$$

$$\Rightarrow X = \pm \frac{5}{\sqrt{3}}$$

وبما أن المسافة لا يمكن لها أن تكون سالبة إذن

$$X = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

مثال// القدرة الكهربائية P (Watts) المولدة من أحدى المصادر تعطى بالمعادلة التالية

$$P = 5.12\,R - \frac{8}{3}R^3$$

حيث R (ohms) هي المقاومة بالدائرة الكهربائية.

١- من أجل أية قيمة للمقاومة تكون القدرة الكهربائية عظمى ؟

٢- ماهي القدرة الكهربائية العظمى .

* ان الدالة $P = P(R)$ قابلة للأشتقاق من أجل كل قيمة لـ R وتأخذ قيمة عظمى أو صغرى في نقطة تكون عندها

$$\frac{dP}{dR} = 0$$

ومنه

$$P' = 5.12 - 8R^2 = 0 \Rightarrow 8R^2 = 5.12$$

$$\Rightarrow R = \pm\sqrt{\frac{5.12}{8}} \Rightarrow R = \pm 0.8\,(\text{ohms})$$

لكن المقاومة لا تكون سالبة لذلك $R = 0.8$ (ohms) ومنه هذه القيمة تقابلها قيمة عظمى

اذن القدرة الكهربائية تكون عظمى من أجل $R = 0.8$ (ohms) وهي

$$P(0.8) = 5.12 * (0.8) - \frac{8}{3}(0.8)^3$$

$$= 2.731 \text{ Watts}$$

RoLL's Theorem and Mean Value Theorem

* مبرهنة رول ومبرهنة القيم المتوسطة

- مبرهنة القيمة المتوسطة :-

اذا كانت f دالة مستمرة ضمن الفترة المغلقة $[a,b]$ ، وقابلة للاشتقاق ضمن الفترة المفتوحة (a,b) ، فأن هناك عدد مثل c ينتمي الى الفترة (a,b) حيث $c \in (a,b)$: لذلك فأن

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

مثال :- جد العدد c الذي يمكن الحصول عليه من نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة ضمن الفترة $[1,3]$ ؟

$$f(x) = x^3 - 7x + 6$$

الحل :-

$$f'(x) = 3x^2 - 7$$

$\rightarrow f(b) = (3)^3 - (3 \times 7) + 6$ $\quad b = 3$ من الفترة

$= 27 - 21 + 6 = 12$

$\rightarrow f(a) = (1)^3 - (1 \times 7) + 6 =$ $\quad a = 1$

$= 1 - 7 + 6 = 0$

نطبق القانون

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$3c^2 - 7 = \frac{12 - 0}{3 - 1} = \frac{12}{2} = 6$$

$\therefore 3c^2 - 7 = 6$

$3c^2 = 6 + 7 = 13$

$\therefore c^2 = \frac{13}{3} \Rightarrow c = \mp \frac{\sqrt{13}}{3}$

$\rightarrow c = -\frac{\sqrt{13}}{3}$ يهمل

$\rightarrow c = +\frac{\sqrt{13}}{3}$

مثال :- جد قيمة x ضمن الفترة $[-2,3]$ ، حيث $f(x)=x^2+2x-1$

الحل :-

$$f'(x)=2x+2$$

$b=3$ $\rightarrow f(b)=3^2+(2\times 3)-1=14$

$a=-2$ $\rightarrow f(a)=(-2)^2+(2\times(-2))-1=-1$

$$\because f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\therefore 2x+2=\frac{14+1}{3+2}=\frac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{5}_{1}}$$

$$\therefore 2x+2=3 \Rightarrow 2x=3-2 \Rightarrow 2x=1$$

$$\therefore x=\frac{1}{2}$$

$$\therefore C=\frac{1}{2}$$

- مبرهنة رول :- Roll's Theorm

اذا كانت الدالة f دالة مستمرة ضمن الفترة المغلقة $[a,b]$ ، و قابلة للاشتقاق ضمن الفترة المفتوحة (a,b) ، اذا كانت $f(b)=f(a)$ ، فان هناك عدد واحد موجود على الاقل مثل C ضمن الفترة (a,b) حيث $f'(c)=0$

مثال :- باستخدام مبرهنة رول جد العدد C ، حيث $f(x)=x^4-2x^2$ ضمن الفترة $[-2,2]$.

الحل

الحل :-

$f(2) = 2^4 - 2(2)^2$

$= 16 - 8 = 8$

$f(-2) = (-2)^4 - 2(-2)^2$

$= 16 - 8 = 8$

$\therefore f(b) = f(a)$

$\longrightarrow f'(c) = 0$

$f'(x) = 4x^3 - 4x$

$f'(c) = 4c^3 - 4c = 0$

$\therefore 4c^3 - 4c = 0$

$4c(c^2 - 1) = 0$

اما $4c = 0 \Rightarrow \boxed{c = 0}$

او $c^2 - 1 = 0 \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow \boxed{c = \pm 1}$

$\therefore c = 0, 1, -1$