المشتقة الثانية ومشتقات الرتب الأعلى

اذا كانت $f'(x)$ هي المشتقة الأولى ومعرفة فأن

$f''(x)$ تسمى المشتقة الثانية و $f'''(x)$ المشتقة الثالثة وهكذا

حيث

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}(f(x)) = \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}(f(x))\right]$$

$$f'''(x) = \frac{d^3}{dx^3}(f(x)) = \frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{d}{dx}(f(x))\right]$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}(f(x))$$

مثال/ جد $f^5(x)$ من $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 2$

$$f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 2x - 4$$

$$f''(x) = 36x^2 - 12x + 2$$

$$f'''(x) = 72x - 12$$

$$f''''(x) = f^4(x) = 72$$

$$f^5(x) = 0$$

٢٩

مثال// لتكن $y = t^4 + 2t + 3$

$x = t^2 + 1$

جد $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dt} = 4t^3 + 2 \quad ، \quad \frac{dx}{dt} = 2t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} * \frac{dt}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$$= \frac{4t^3 + 2}{2t} = \frac{2t^3 + 1}{t}$$

$$= \frac{2(\sqrt{x-1})^3 + 1}{\sqrt{x-1}} = \frac{2(x-1)^{3/2} + 1}{(x+1)^{1/2}}$$

مثال// لتكن $y = t^3$ ، $x = \sin t$ ، $Z = x^2 e^y$ جد $\frac{dz}{dt}$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$= 2x e^y \cdot \cos t + x^2 e^y \cdot 3t^2$$

$$= 2 \sin t \, e^{t^3} \cos t + 3t^2 \sin^2 t \, e^{t^3}$$

معادله المماس والعمود على المماس للمنحني

نذكر معادله الخط المستقيم
معادله الخط المستقيم ذا الميل m والمار بالنقطه (x_0, y_0)
تعطى بما يلي

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

مثال//
أكتب معادله المماس للمنحني $y = 2 + x^2$ عند النقطه $(-1, 3)$

* ميل المماس عند النقطه $(-1, 3)$ هو مشتقه الداله عند
هذه النقطه

$$m = \frac{dy}{dx} = 2x = 2(-1) = -2$$

معادله المماس هي

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 3 = m(x - (-1)) \Rightarrow y - 3 = -2(x + 1)$$

$$= -2x - 2 \Rightarrow y = -2x - 2 + 3$$

$$\Rightarrow y = -2x + 1$$

مثال // أكتب معادله العمود على المماس للمنحني $y = 2 + x^2$ عند
النقطه $(-1, 3)$

ليكن m ميل المماس و m_1 ميل العمود عليه إذن

$$m * m_1 = -1 \Rightarrow m_1 = \frac{-1}{m}$$

من المثال السابق $m = -2$ فأن ميل العمود عليه $m_1 = -\frac{1}{m} = \frac{1}{2}$

∴ معادله العمود على المماس هي $y - y_0 = m_1(x - x_0)$

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - (-1)) \Rightarrow y - 3 = \frac{1}{2}(x + 1)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 3 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

مثال// لتكن $S=f(t)=2t^3+5$ هي معادلة المسافة بدلالة الزمن. أوجد السرعة الآنية عند اللحظة $t=5\,sec$

* السرعة الآنية هي معدل تغير المسافة S بالنسبة للزمن t وتعطى بالمشتقة

$$\frac{dS}{dt}=6t^2$$

السرعة الآنية عند $t=5sec$ هي

$$\frac{dS}{dt}=6*(5)^2=150\ m/sec$$

التفاضل الضمني Implicit differentiation

تعرف الدالة في بعض الحالات بمعادلة من الشكل $f(x,y)=0$ تحتوي المتغير x وقيم المتغير y

مثال// $xy=1$

أحد الطرق لحساب المشتقة الأولى $\frac{dy}{dx}$ هي كتابة المعادلة بالشكل $y=\frac{1}{x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}$$

كما أنه يوجد أمكانية وذلك بأشتقاق طرفي المعادلة $(xy=1)$ قبل كتابة y بدلالة x بأعتبارها دالة قابلة للأشتقاق ومنه

$$\frac{d}{dx}(xy)=\frac{d}{dx}(1)\Rightarrow x\frac{d}{dx}y+y\frac{d}{dx}(x)=0$$

$$\Rightarrow x\frac{dy}{dx}+y=0\Rightarrow x\frac{dy}{dx}=-y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-y}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-1}{x^2}$$ بالتعويض عن $y=\frac{1}{x}$

الطريقة الثانية لحساب المشتقة تسمى بالاشتقاق الضمني وتستعمل في حساب مشتقة داله معرفة بشكل ضمني بمعادلة من الشكل $f(x,y)=0$ دون حل هذه المعادلة وذلك بأشتقاق طرفي هذه المعادلة ثم تستخرج قيمة y' بدلالة x, y.

مثال // أوجد $\frac{dy}{dx}$ في ما يلي $xy^3-3x^2=xy+5$

* نشتق طرفي المعادلة فتحصل على

$$y^3+3xy^2\frac{dy}{dx}-6x=y+x\frac{dy}{dx}+0$$

$$\Rightarrow 3xy^2\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}=y-y^3+6x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left[3xy^2-x\right]=y-y^3+6x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left[x(3y^2-1)\right]=y-y^3+6x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y-y^3+6x}{x(3y^2-1)}$$

مثال / لتكن $x^2-2xy+y^2=0$ جد y'

$$\frac{d}{dx}(x^2-2xy+y^2)=\frac{d}{dx}(0)$$

$$\Rightarrow 2x-2y-2xy'+2yy'=0 \qquad \left(y'=\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\Rightarrow 2x-2y-2xy'+2yy'=0$$

$$\Rightarrow y'(2y-2x)=2y-2x \Rightarrow y'=\frac{2y-2x}{2y-2x}$$

$$\Rightarrow y'=1$$

س٣

مثال // لتكن $xy + x - 2y - 1 = 0$ جد $y' \left(\frac{dy}{dx}\right)$

$$x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx} + \frac{dx}{dx} - 2\frac{dy}{dx} - \frac{d}{dx}(1) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$\Rightarrow x\frac{dy}{dx} + y + 1 - 2\frac{dy}{dx} - 0 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)\frac{dy}{dx} = -y - 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-y-1}{x-2}$$

مثال / لتكن $\frac{dy}{dx}$ للدالة $x^3 + y^3 = 3xy$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 3x\frac{dy}{dx} + 3y$$

$$\Rightarrow 3y^2\frac{dy}{dx} - 3x\frac{dy}{dx} = 3y - 3x^2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(3y^2 - 3x) = 3y - 3x^2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3y - 3x^2}{3y^2 - 3x} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

مشتقة الدوال المثلثية

1- $\frac{d}{dx}(\sin(u)) = \cos(u) \cdot \frac{du}{dx}$

2- $\frac{d}{dx}(\cos(u)) = -\sin(u) \cdot \frac{du}{dx}$

3- $\frac{d}{dx}(\tan(u)) = \sec^2(u) \cdot \frac{du}{dx}$

4- $\frac{d}{dx}(\cot(u)) = -\csc^2(u) \cdot \frac{du}{dx}$

5- $\frac{d}{dx}(\sec(u)) = \sec(u)\tan(u)\frac{du}{dx}$

6- $\frac{d}{dx}(\csc(u)) = -\csc(u)\cot(u)\frac{du}{dx}$

مثال//

جد $f'(x)$ أو $\frac{dy}{dx}$ للدالة

1- $f(x) = \tan(3x^2)$

$f'(x) = 6x\sec^2(3x^2)$

2- $y = \sin(2x) + \sec(3x)$

$y' = 2\cos(2x) + 3\sec(3x)\tan(3x)$

3- $y = \cos(\sqrt{x})$

$y' = -\sin(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x})$

4- $y^2 = x^2 + \sin(xy)$

$2y\frac{dy}{dx} = 2x + \cos(xy)\left(x\frac{dy}{dx} + y\right)$

$2y\frac{dy}{dx} = 2x + x\cos(xy)\frac{dy}{dx} + y\cos(xy)$

$$\Longrightarrow 2y\frac{dy}{dx} - x\cos(xy)\frac{dy}{dx} = 2x + y\cos(xy)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x + y\cos(xy)}{2y - x\cos(xy)}$$

5 – $xy = \csc(x-y)$

$$x\frac{dy}{dx} + y = -\csc(x-y)\cot(x-y)\left(1 - \frac{dy}{dx}\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y - \csc(x-y)\cot(x-y)}{x - \csc(x-y)\cot(x-y)}$$

6 – $y = \sin^5(3x^2)$

$$y' = 5\sin^4(3x^2)(6x)\cos 3x^2$$

$$= 30x\sin^4(3x^2)\cos(3x^2)$$

7 – $y = x\tan\frac{1}{x}$

$$y' = \tan\frac{1}{x} - x\frac{1}{x^2}\sec^2\frac{1}{x}$$

$$= \tan\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\sec^2\frac{1}{x}$$

8 – $y = \sec(2x+1)^{5/2}$

$$y' = \frac{5}{2}(2x+1)^{3/2}(2)\tan(2x+1)^{5/2}\sec(2x+1)^{5/2}$$

$$= 5(2x+1)^{3/2}\tan(2x+1)^{5/2}\sec(2x+1)^{5/2}$$

$$9- \quad y = \frac{1}{x^2 \sin^3 x}$$

$$y' = -\frac{(2x\sin^3 x + 3x^2 \sin^2 x \cos x)}{(x^2 \sin^3 x)^2}$$

$$= -\frac{(2\sin x + 3x\cos x)}{x^3 \sin^4 x}$$

$$10- \quad y = (x^4 - \cot x)^3$$

$$y' = 3(x^4 - \cot x)^2 (4x^3 + \csc^2 x)$$

$$11- \quad y = \sqrt{1+\cos^2 x} \Rightarrow y = (1+\cos^2 x)^{1/2}$$

$$y' = \frac{1}{2}(1+\cos^2 x)^{-1/2}(-2\cos x \sin x)$$

$$= -(1+\cos^2 x)^{-1/2} \cos x \sin x$$

$$= \frac{-\cos x \sin x}{(1+\cos^2 x)^{1/2}}$$

$$12- \quad y = \sqrt{\csc x^3} = (\csc x^3)^{1/2} = \csc^{1/2} x^3$$

$$y' = \frac{1}{2}(\csc x^3)^{-1/2}(3x^2)(-\cot x^3 \csc x^3)$$

$$= -\frac{3}{2} x^2 \csc^{-1/2} x^3 \cot x^3 \csc x^3 = -\frac{3}{2} x^2 \csc^{\frac{1}{2}} x^3 \cot x^3$$