

المفاضلة

تعريف 1- نقول عن الدالة f أنها قابلة للأشتقاق عند x_0 إذا وجد عدد حقيقي b حيث

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = b$$

وتسمى b مشتقة f عند x_0 ونرمز لها بالرمز $f'(x_0)$ ونقول عن f أنها قابلة للأشتقاق على مجال I إذا كانت قابلة للأشتقاق عند كل نقطة x_0 من I .

تعريف المشتقة

إذا كانت الدالة $y = f(x)$ قابلة للأشتقاق على المجال I من R فأنت المشتقة الأولى للدالة $y = f(x)$ حرفه كما يلي

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ولرمز للمشتقة بأحد الرموز التالية

$$y' \quad \text{أو} \quad \frac{dy}{dx} \quad \text{أو} \quad \frac{df}{dx} \quad \text{أو} \quad \frac{d}{dx} [f(x)] \quad \text{أو} \quad f'(x) \quad \text{أو} \quad y'$$

ومنه فإحدى المشتقة الأولى باستخدام التعريف تتبع الخطوات التالية -

1- كتب مقدار تغير الدالة $f(x)$ إلى $f(x + \Delta x)$

2- كتب الفارق $f(x + \Delta x) - f(x)$

3- كتب متوسط التغير $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ بمعنى $f(x)$ و $f(x + \Delta x)$ على Δx

4- نجد المشتقة في النهاية $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

مثال / أوجد المشتقة الأولى باستخدام التعريف

$$f(x) = 2x + 5 \quad \text{للدالة}$$

1- حسب مقدار تغير الدالة $f(x)$ إلى $f(x+dx)$

$$f(x+dx) = 2(x+dx) + 5$$

2- حسب الفارق $f(x+dx) - f(x)$

$$\begin{aligned} f(x+dx) - f(x) &= 2(x+dx) + 5 - (2x + 5) \\ &= 2x + 2dx + 5 - 2x - 5 \\ &= 2dx \end{aligned}$$

3- حسب متوسط التغير $\frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$

$$\frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = \frac{2dx}{dx} = 2$$

4- وأيضاً نوجد المشتقة باستخدام

$$f'(x) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

$$= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} 2$$

$$= 2$$

21

مثال / أوجد المشتقة الأولى باستخدام التعريف

$$f(x) = x^2 + 2 \quad \text{للدالة}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 + 2 - (x^2 + 2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2) - (x^2 + 2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + \Delta x = 2x$$

مثال / أوجد المشتقة الأولى باستخدام التعريف للدالة

$$f(x) = \sqrt{3x-7}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3(x + \Delta x) - 7} - \sqrt{3x - 7}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3(x + \Delta x) - 7} - \sqrt{3x - 7}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{3(x + \Delta x) - 7} + \sqrt{3x - 7}}{\sqrt{3(x + \Delta x) - 7} + \sqrt{3x - 7}}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{3x} + 3\Delta x - \cancel{7} - \cancel{3x} + \cancel{7}}{\Delta x (\sqrt{3(x + \Delta x) - 7} + \sqrt{3x - 7})}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x (\sqrt{3(x + \Delta x) - 7} + \sqrt{3x - 7})} = \frac{3}{2\sqrt{3x - 7}}$$

القوانين العامة للمشتقات

1- مشتقة الثابت هي اى
 حيث C Constant ثابت
 $\frac{d}{dx}(C) = 0$

$$\frac{d}{dx}(5) = 0$$

مثال / اذا كانت $y = 7$ حد y'

$$y' = 0$$

و اذا كانت $y = -5$ حد y'

$$y' = 0$$

ج- مشتقات الدوال ذات الاس n

لكل الداله $y = f(x) = x^n$

$$y' = f'(x) = nx^{n-1} \quad \text{فان}$$

مثال / اذا كانت $y = x^3$ فان $y' = 3x^2$

مثال / اذا كانت $y = x^{-4}$ فان $y' = -4x^{-4-1}$
 $= -4x^{-5}$

ومنه فان مشتقه $y = x$ يساوي العدد 1

$$\text{حيث } \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x) = 1$$

د- مشتقة الداله $y = ax^n$ هو $y' = an x^{n-1}$

مثال / اذا كانت $y = 3x^6$ فان

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3x^6) = 3 * 6 * x^{6-1} = 18x^5$$

مثال / او مشتقه

$$y = 5\sqrt[3]{x}$$

$$y = 5\sqrt[3]{x} = 5x^{1/3}$$

$$\therefore y' = 5 * \frac{1}{3} x^{(1/3)-1} = \frac{5}{3} x^{-2/3}$$

ع - مشتقة مجموع أو فرق دوال

لتكن الدالة $F(x)$ تكتب على الشكل

$$F(x) = f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_{n-1}(x) \pm f_n(x)$$

حيث $f_1(x), \dots, f_n(x)$ دوال قابلة للأشتاق فإن

$$F'(x) = f_1'(x) \pm f_2'(x) \pm \dots \pm f_{n-1}'(x) \pm f_n'(x)$$

مثال / لتكن الدالة $y = 4x^3 - 5x^2 + 7x - 12$

$$\therefore y' = -3 \times 4x^{3-1} - 5 \times 2x^{2-1} + 7x^{1-1}$$

$$= -12x^2 - 10x + 7$$

هـ - مشتقة حاصل ضرب دالتين

لتكن الدالة $F(x)$ تكتب على الشكل $F(x) = f_1(x) \times f_2(x)$ حيث $f_1(x)$ و $f_2(x)$ دالتين قابلتين للأشتاق فإن

$$F'(x) = f_1'(x)f_2(x) + f_2'(x)f_1(x)$$

مثال / لتكن الدالة $F(x) = (3x-2)(4x+1)$

$$F'(x) = 3(4x+1) + 4(3x-2)$$

$$= 12x + 3 + 12x - 8 = 24x - 5$$

٦

٦- مشتقة قسمة دالتين
لدينا الدالة $F(x)$ مكتوب بالشكل $F(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$

حيث $f_2(x) \neq 0$ والتين قابلتين للأشتاق و

$$F'(x) = \frac{f_1'(x)f_2(x) - f_2'(x)f_1(x)}{(f_2(x))^2} \quad \text{فإن}$$

والدالة / أوجد مشتقة الدالة $y = \frac{8x^7}{2x-1}$ حيث $x \neq \frac{1}{2}$

$$f_1(x) = 8x^7 \Rightarrow f_1'(x) = 8 \times 7x^{7-1} = 56x^6 \quad \text{لدينا}$$

$$f_2(x) = 2x-1 \Rightarrow f_2'(x) = 2$$

$$\therefore F'(x) = \frac{f_1'(x)f_2(x) - f_2'(x)f_1(x)}{(f_2(x))^2}$$

$$= \frac{56x^6(2x-1) - 2 \times 8x^7}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{56x^6(2x-1) - 16x^7}{(2x-1)^2} = \frac{112x^7 - 56x^6 - 16x^7}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{96x^7 - 56x^6}{(2x-1)^2} = \frac{8x^6(12x-7)}{(2x-1)^2}$$

٤٥
٧- مشتقة الدالة التي تكتب على الشكل
فإن

$$F(x) = (f(x))^n$$
$$F'(x) = n(f(x))^{n-1} f'(x)$$

مثال / أوجد مشتقة الدالة

$$y = F(x) = 4(2x^2 + 3x - 2)^2$$
$$f(x) = 2x^2 + 3x - 2 \Rightarrow f'(x) = 4x + 3$$

$$\therefore y' = F'(x) = 2 \times 4(2x^2 + 3x - 2)^{2-1} \times (4x + 3)$$
$$= 8(2x^2 + 3x - 2)(4x + 3)$$

٨- مشتقة مقلوب دالة

لتكن $g(x)$ دالة قابلة للأستقامة و $g(x) \neq 0$ و

$$y = f(x) = \frac{1}{g(x)} \quad \text{فإن}$$
$$y' = f'(x) = \frac{-g'(x)}{(g(x))^2}$$

مثال / لتكن $g(x) = (2x - 1)$ و $y = f(x) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{(2x - 1)}$

$$y' = f'(x) = \frac{-g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{-2}{(2x - 1)^2}$$

فإن

٩- مشتقة الدوال المركبة

لكن الدالة $Z = f(y)$ حيث $y = g(x)$ أي أن

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \text{فإن } Z = f(g(x))$$

وهذه تسمى قاعدة السلسلة

مثال / لنك $Z = y^3 + 2y + 4$ و $y = 5x^2$ أي أن

$$Z = (5x^2)^3 + 2(5x^2) + 4$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = (3y^2 + 2)(10x)$$

$$= 10x(3y^2 + 2)$$

نعوض عن $y = 5x^2$ فيكون لدينا

$$\frac{dz}{dx} = 10x(3(5x^2)^2 + 2)$$

$$= 10x(75x^4 + 2)$$

المشتق الأول $f'(x)$ للدالة $f(x)$

$$1 - f(x) = x + \frac{1}{x^2} + 3$$
$$= x + \frac{x^2}{x^2} + 3$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^3}$$

$$2 - f(x) = \sqrt{x^3 - 2} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$f(x) = (x^3 - 2)^{1/2} + (x+1)^{-1/2}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{2} (x^3 - 2)^{-1/2} * 3x^2 - \frac{1}{2} (x+1)^{-3/2} * 1$$
$$= \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - 2}} - \frac{1}{2\sqrt{(x+1)^3}}$$

$$3 - f(x) = (x^2 + 1)^3 (x^3 - 1)^2$$

$$f'(x) = (x^2 + 1)^3 * 2(x^3 - 1) * 3x^2 + (x^3 - 1)^2 * 3(x^2 + 1)^2 * 2x$$
$$= 6x^2 (x^2 + 1)^3 (x^3 - 1) + 6x (x^3 - 1)^2 (x^2 + 1)^2$$

$$1 - f(x) = \left(\frac{x+1}{x^2 - 2} \right)^3$$

والدالة $f(x)$

$$2 - f(x) = \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x+1}}$$

$$3 - f(x) = (x^2 + 1)^8$$

$$4 - f(x) = (x+1)^2 (x^2 + 1)^{-3}$$