Absolute Value القيم المطلقة

تعرف القيمة المطلقة بالشكل التالي: اذا كان x و y اي عدد حقيقي فان:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

الخصائص :-

1. $|-x| = |x|$
2. $|xy| = |x||y|$
3. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$; $y \neq 0$
4. $|x| = \sqrt{x^2}$
5. $|x+y| \leqslant |x| + |y|$
6. $|x-y| \geqslant |x| - |y|$
7. $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$
8. if $|x| \leqslant a$; فان $-a \leqslant x \leqslant a$
9. if $|x| \geqslant a$; فان $x \leqslant -a$ $\boxed{\text{or}}$ $x \geqslant a$
10. $|x^2| = |x|^2$

مثال (1):

① $|4-8| = |-4| = 4$

② $|4| + |-3| = 4 + 3 = 7$

③ $|4-8| = |4+(-8)| \leq |4| + |-8|$

④ $|4-8| = |4-(-8)| \geq |4| - |-8|$

مثال ② حل المتراجحة التالية :

$$|x-7| < 9$$

الحل :

حسب خاصية $\boxed{8}$ فان

$$-9 < x-7 < 9$$

$$-9+7 < x-7+7 < 9+7$$

$$-2 < x < 16$$

مج الحل $x \in (-2, 16)$

مثال ③ حل المتراجحة التالية $|2x+3| > 5$

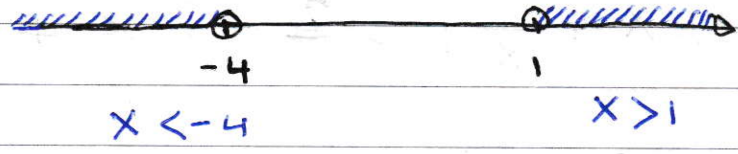
الحل :

حسب خاصية ⑨ فان $2x+3 < -5$ او $2x+3 > 5$

$2x+3-3 < -5-3$ او $2x+3-3 > 5-3$

$2x < -8$ $\quad$ $2x > 2$

$\boxed{x < -4}$ $\quad$ $\therefore \boxed{x > 1}$



ح : $x \in (-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$

مثال 4 :- حل المتراجحة التالية $|x+3| \leq 5$

الحل: حسب الخاصية (8) فان

$$-5 \leq x+3 \leq 5$$

$$-5-3 \leq x+3-3 \leq 5-3$$

$$-8 \leq x \leq 2$$

ح $= \{x : -8 \leq x \leq 2\} = [-8, 2]$

مثال ⑤

$$\left| x + \frac{1}{x} \right| > 2 \quad ; x \neq 0$$

$$\left| \frac{x^2+1}{x} \right| > 2$$

$$\frac{|x^2+1|}{|x|} > 2 \qquad (x^2+1) > 0$$

$$x^2+1 > 2|x|$$

$$x^2 - 2|x| + 1 > 0$$

$$|x|^2 - 2|x| + 1 > 0 \qquad \text{حيث } |x|^2 = x^2$$

$$(|x| - 1)^2 > 0 \quad ; |x| \neq 1$$

الحل هو جميع الاعداد الحقيقية ما عدا

$$x = 1 \quad ; x = -1 \quad ; x = 0$$

$$\text{ح} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (1, \infty)$$

مثال (6) :

$$|x^2-9| > 2$$

الحل: حسب الخاصية $\boxed{9}$

$x^2-9 > 2$ $\boxed{\text{or}}$ $x^2-9 < -2$

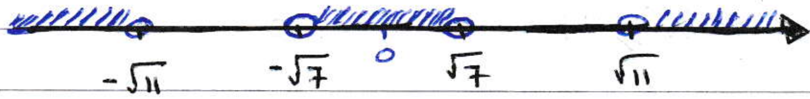
$x^2-9+9 > 2+9$ or $x^2-9+9 < -2+9$

$x^2 > 11$ or $x^2 < 7$

$|x| > \sqrt{11}$ or $|x| < \sqrt{7}$

$\because |x| = \pm x$ $\therefore$

$\therefore$ $x > \sqrt{11}$ or $x < -\sqrt{11}$ or $x < \sqrt{7}$ or $x > -\sqrt{7}$



م ح $= (-\infty, -\sqrt{11}) \cup (-\sqrt{7}, \sqrt{7}) \cup (\sqrt{11}, +\infty)$

مثال H.W : واجب

جد مجموعة الحل مع التمثيل على خط الأعداد

$$|x^2-3| < 1$$

مثال (7) جد حل المتراجحات التالية

(a) $|2x-3| \leq 1$

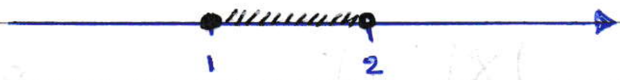
الحل: حسب الخاصية (8)

$$|2x-3| \leq 1$$

$$-1 \leq 2x-3 \leq 1$$

$$2 \leq 2x \leq 4 \Rightarrow \div 2$$

$$\boxed{1 \leq x \leq 2}$$



$$ع = \{x : 1 \leq x \leq 2\} = [1,2]$$

(b) $|2x-3| \geq 1$

خاصية (9)

$2x-3 \geq 1$ or $2x-3 \leq -1$

$2x \geq 4$ or $2x \leq 2$

$\boxed{x \geq 2}$ or $\boxed{x \leq 1}$

$$ع = \{x : x \geq 2 \text{ or } x \leq 1\}$$

$$= (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$$

واجب H.w.

(1) $\left|\frac{2}{x} - 4\right| < 3$

(2) $\left|\frac{3x}{5} - 1\right| > \frac{2}{5}$

الثوابت و المتغيرات :

في تعريف الفترة $a < x < b$

① كل من a و b يمثل عدد منفرد ويدعى الثابت Constant

② الرمز x يمثل اي عدد من مجموعة الاعداد ويدعى المتغير Variable

الدالة : تعرف الدالة f بانها مجموعة من الازواج المرتبة (x, y) بحيث ان لكل x توجد قيمة وحيدة الى y .

ملاحظة :

⊛ نطلق على مجموعة قيم x بمنطلق الدالة f (Domain)

⊛ نطلق على مجموعة قيم y بمدى الدالة f (Range)

اي ان $y = f(x)$ اي أن العدد y يمثل قيمة الدالة عند x

مثلا ان : $y = f(x) = x^2$

منطلق الدالة هو مجموعة الاعداد الحقيقية $\text{dom}(f) = (-\infty, \infty)$

مدى الدالة هو مجموعة الاعداد الموجبة $\text{ran}(f) = [0, \infty)$

مثال : جد منطلق ومدى الدوال التالية

1) $y = x^2$
2) $y = \frac{1}{x}$
3) $y = \sqrt{x}$
4) $y = \sqrt{4-x}$
5) $y = \sqrt{1-x^2}$

الحل :

ت	الدالة	المنطلق	المدى
١	$y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$
٢	$y = \frac{1}{x}$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
٣	$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$(0, \infty)$
٤	$y = \sqrt{4-x}$	$(-\infty, 4]$	$[0, \infty)$
٥	$y = \sqrt{1-x^2}$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$

مثال : جد مدى الدالة $g(x)=\sqrt{x+4}$

$x \in [0,5]$

الحل :

نعوض منطلق الدالة في الدالة لايجاد المدى

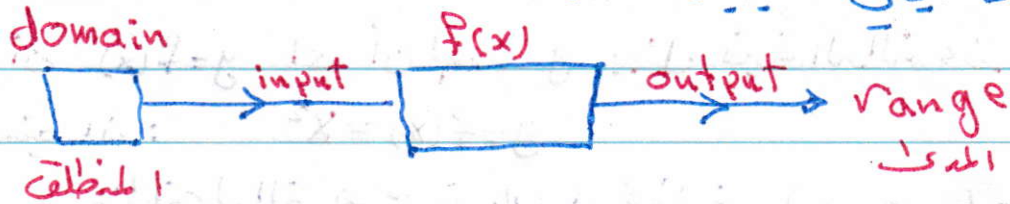
$g(0)=\sqrt{0+4}=\sqrt{4}=2$

$g(5)=\sqrt{5+4}=\sqrt{9}=3$

المنطلق $[0,5]$

المدى $[2,3]$

مخطط توضيحي لايجاد المدى



مثال: جد المنطلق والمدى للدالة

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2-x}}+5$$

الحل

$2-x>0$

$-x>-2$

$\boxed{x<2}$

$\therefore$ Domain $(-\infty, 2)$

نعوض في الدالة نجد المدى

range $(5, \infty)$

① $f(x) = x^2 - 4$ مثال : جد المنطلق والمدى للدالة

الحل : ① المنطلق كل قيم R

② لايجاد المدى

$y = x^2 - 4 \Rightarrow x^2 = y + 4 \Rightarrow x = \mp\sqrt{y+4}$

شرط $y + 4 \geq 0 \Rightarrow y \geq -4$

$\therefore$ Range $(-4, \infty)$ المدى

② $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

$\therefore$ Domain $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$

$f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} = \dfrac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}} = x - 2$, for $x \neq 2$

$f(x) = x - 2 \Rightarrow y = x - 2 \Rightarrow$

نعوض عن قيم x

$y = -2 - 2 = -4$

$\therefore$ Range $(-\infty, -4) \cup (-4, \infty)$

مثال : جد المجال Domain للدوال التالية

① $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 4x - 12}$ ② $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2+4}$

③ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$

الحل :

① $x^2 - 4x - 2 = 0$

$(x-6)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 6 \; ; \; x = -2$

$\therefore$ Domain $(-\infty, -2) \cup (-2, 6) \cup (6, \infty)$

② $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

$\therefore$ Domain $[1, \infty)$

③ $x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x^2 > 4$

هذه العبارة صحيحة عندما

$x < -2 \quad \text{or} \quad x > 2$

$\therefore$ Domain $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$