Discrete Structure
هياكل متقطعة
Chapter 1

Course Objectives

اهداف المادة

- التمكن من اسخدام المنطق في التعبير عن مفاهيم الحياه الواقعية والرياضيات او بالعكس.
- معرف الأساليب الأساسية للبراهين واستخدام بعض الاستراتيجيات الأساسية لإنتاج البراهين
- فهم الخوارزميات وتعقيدتها من وجهة نظر رياضية
- معرفة قدرا معينا عن بعض المفاهيم : الدوال، نظرية الأعداد والعد وعلاقات التكافؤ

Course Textbook(s)

1- Rosen, Kenneth. *Discrete Mathematics and Its Applications 7th edition*. McGraw-Hill Science, 2011.

2- كتاب الهياكل المتقطعة \السنة ١٩٩٣ جاسم طعمة سرسوح٢. 1996

Other Recommended Resource:

1- Todd Feil, Joan Krone, **"Essential Discrete Mathematics"**, Prentice Hall, 2003.

Foundations of Logic

Foundations of Logic: Overview

- Proposition
- Logical operators
- Compound proposition
- Bit operators
- Equivalence

Propositional Logic

Propositional

هوجملة مفيدة اما ان تكون صائبة (True) او خاطئة (False)، أي انه يجب ان تكون احد الاحتمالين وليس كلاهما ولا قيمة بينهما.

Propositional variable

هو متغير قيمته اما Trueاو Falseو**نستخدمه للعبارة المنطقية (Propositional)، وعادة ما يكون رمز واحد p,q,r....**

Operators / Connectives

operator* or *connective

معاملات الربط هي عبارة عن ادوات تستخدم لربط التعابير المنطقية البسيطة الى عبارات اكبر. توجد نوعان من معاملات الربط:

Unary operators take 1 operand (*e.g.*, −3);

binary operators take 2 operands (*e.g.*, 3 × 4).

Some Popular Boolean Operators

Formal Name	**Nickname**	**Arity**	**Symbol**
Negation operator	NOT	Unary	$\neg$
Conjunction operator	AND	Binary	$\wedge$
Disjunction operator	OR	Binary	$\vee$
Exclusive-OR operator	XOR	Binary	$\oplus$
Implication operator	IMPLIES	Binary	$\rightarrow$
Biconditional operator	IFF	Binary	$\leftrightarrow$

The Negation Operator

هو معامل احادي unary operator يقوم بنفي العبارة المنطقية (عكس العبارة المنطقية) ويرمز لها بالرمز "¬"

E.g. If p = "I have brown hair."

then $\neg p$ = "I do **not** have brown hair."

جدول الحقيقة الخاص ب NOT:

p	$\neg p$
T	F
F	T

T :≡ True; F :≡ False

":≡" means "is defined as"

The Conjunction Operator (AND)

معامل الدمج او الوصل *conjunction operator* او الربط connective، وهو أداة ثنائية المعامل (*binary operator*) أي تربط بين اثنين من Propositional ويرمز له بالرمز "∧"

AND

E.g. If *p*="I will have chicken for lunch." and *q*="I will have steak for dinner.", then $p \wedge q$="I will have chicken for lunch **and** I will have steak for dinner."

Conjunction Truth Table

- Note that a conjunction $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$ of n propositions will have 2^n rows in its truth table.

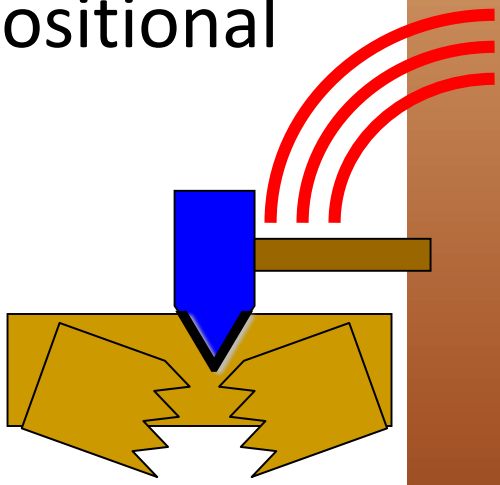
Operand columns

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

- من الجدير بالذكر ان المعاملين (∧ and ¬) معا يمكنهما تكوين أي جدول حقيقة truth table لاي تعبير منطقي.

The Disjunction Operator / OR

معامل الفصل **disjunction operator** او رابطة الفصل **disjunction connective**، وهو معامل ثنائي المعامل (binary operator) أي يربط بين اثنين من Propositional ويرمز له بالرمز "$\vee$"



p="My car has a bad engine."

q="My car has a bad carburetor."

$p \vee q$="Either my car has a bad engine, **or** my car has a bad carburetor."

Meaning is like "and/or" in English.

Disjunction Truth Table

- $p \vee q$ تعني P true او q true او كلاهما true.
- يسمى هذا المعامل ايضا **inclusive** لانه من المحتمل ان تكون p true و q true

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	**T**
F	T	**T**
F	F	F

"¬" و"∨" يمكن ان يرتبطا معا .

Nested Propositional Expressions
التعابير المتداخلة

استخدم الاقواس (parentheses) لتجميع العبارات

"I just saw my old *f*riend, and either he's *g*rown or I've *s*hrunk."

$= f \wedge (g \vee s)$

- $(f \wedge g) \vee s$ يختلف المعنى
- $f \wedge g \vee s$ غامضة

A Simple Exercise

Let p="It rained last night",

q="The sprinklers came on last night,"

r="The lawn was wet this morning."

Translate each of the following into English:

$\neg p$ = "It didn't rain last night."

$r \wedge \neg p$ = "The lawn was wet this morning, and it didn't rain last night."

$\neg r \vee p \vee q$ = "Either the lawn wasn't wet this morning, or it rained last night, or the sprinklers came on last night."

The *Exclusive Or* Operator
Exclusive Disjunction

Exclusive-or يرمز لها بالرمز "⊕" هو معامل ثنائي يربط بين تعبيرين ، لتحقيق شرط *XOR* يجب *ان يكون احد التعابير صائب والاخر خاطئ وليس كلاهما*.

p = "I will earn an A in this course,"

q = "I will drop this course,"

$p \oplus q$ = "I will either earn an A for this course, or I will drop it (but not both!)"

Exclusive-Or Truth Table

يسمى هذا المعامل ب (*exclusive or*) – او القاصرة- بسبب من غير الممكن ان تكون نتيجة التعبيرين التي يقوم بالربط بينهما صائبة.

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- لا ياتي "$\oplus$" و "$\neg$" لوجود معامل يقوم بنفس العمل.

The *Implication* Operator
Conditional Operator

اداة الربط الشرطية للربط بين عبارتين منطقيتين لتكون عبارة مركبة، (اذا كان p فان q).

E.g., let p = "You study hard."

q = "You will get a good grade."

$p \rightarrow q$ = "If you study hard, then you will get a good grade." (else, it could go either way)

Implication Truth Table

- $p \rightarrow q$ حالة واحدة تكون النتيجة خاطئة وهي عندما تكون pصائبة وq خاطئة.

p	q	$p \rightarrow q$	
T	T	T	
T	F	F	The only False case!
F	T	**T**	
F	F	T	

Examples of Implications

- P = احمد من محافظة البصرة ، q= احمد عراقي
  - 1-p = T , q = T , (p → q) = T
  - 2-p = F , q = T , (p → q) = T
  - 3-p = F , q = F , (p → q) = T
  - 4-p = T , q = F , (p → q) = F
- لايمكن ان تكون التعبير صائب (الفرضية) و النتيجة خاطئة.

Converse, Inverse, Contrapositive

(conditional)implication بعض المفاهيم حول :$p \rightarrow q$

- Its *converse* is: $q \rightarrow p$ عكس التعابير(المعكوس)
- Its *inverse* is: $\neg p \rightarrow \neg q$ نفي التعبيرين
- Its *contrapositive*: $\neg q \rightarrow \neg\, p$.

- *واحد من هذه التعابير له نفس النتيجة ل $p \rightarrow q$ ، من هو ؟*

How do we know for sure?

Proving the equivalence of $p \rightarrow q$ and its contrapositive using truth tables:

p	q	$\neg q$		$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow \neg p$
F	F	T	→	T	T	T
F	T	F	→	T	T	T
T	F	T	→	F	F	F
T	T	F	→	F	T	T

The *biconditional* operator/IFF

$p \leftrightarrow q$ اذا وفقط اذ

بمعنى ان p هو شرط ضروري وكافيء للشرط q

p = “You passed the exam.”

q = “you scored 50% or higher.”

$p \leftrightarrow q$ = “You passed the exam if and only if you scored 50% or higher.”

Biconditional Truth Table

- $p \leftrightarrow q$ تعني ان p و q لهما نفس القيمة.
- نلاحظ ان جدول الحقيقة ل Biconditional هو عكس جدول الحقيقة ل $\oplus$

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

- $p \leftrightarrow q$ تعني $\neg(p \oplus q)$

- ليس بالضرورة ان تكون كلا p, q صائبتين

Compound Propositions

- عندما يكون لدينا اكثر من معامل منطقي فيجب ان نعرف أي منهم سيتم تنفيذه اولا ، مثلا

$$\neg p \wedge q$$

فهل تعني $(\neg p) \wedge q$

ام $\neg(p \wedge q)$

المعنى الاول هو الصحيح حسب قانون الاولويات **priorities** في المنطق الرياضي، (المعامل الاحادي تكون له الاولوية على المعامل الثنائي).

Operations Priorities
أولويات المعاملات المنطقية

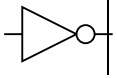
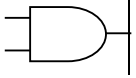
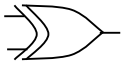
1. Negation / NOT
2. Conjunction / AND
3. Disjunction/OR , Exclusive-OR / XOR

في حالة تساوي العمليات فان الاسبقية تكون من اليسار الى اليمين ، وفي حالة الاقواس () تعطى الاسبقية لاي عملية بداخلها.

Boolean Operations Summary

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
F	F	T	F	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T	T	F
T	F	F	F	T	T	F	F
T	T	F	T	T	F	T	T

Some Alternative Notations

Name:	not	and	or	xor	implies	iff
Propositional logic:	$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\oplus$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
Boolean algebra:	$\overline{p}$	pq	$+$	$\oplus$		
C/C++/Java (wordwise):	!	&&	||	!=		==
C/C++/Java (bitwise):	~	&	|	^		
Logic gates:						

التوافق والتناقض Tautology & Contradiction

- تعرف العبارة المنطقية المركبة Compound Proposition التي دائما يكون ناتجها True مهما كانت مكوناتها ب **Tautology** التوافق.

$p \vee (\neg p)$

p	¬p	p∨(¬p)
T	F	T
F	T	T

- تعرف العبارة المنطقية المركبة التي دائما يكون ناتجها False مهما كان مكونتها ب **Contradiction** التناقض.

- **$p \wedge \neg p$**

P	¬p	p∧¬p
T	F	F
F	T	F

Logical Equivalence التكافؤء المنطقي

- Two propositions are said to be logically equivalent if they have identical truth values for every set of truth values of their components.
  - تعتبر العبارتان المنطقيتان متكافئتان اذا كانت نتيجتهما متساوية دائما مهما كانت قيمة الفرضيات المبنية عليهما.
    ويرمز لها بالرمز $\Leftrightarrow$ او احيانا $P \equiv Q$

De Morgan's laws

- قانون دي موغان هو احد قوانين التكافؤء في علم المنطق.

ר(p ∧q) ⇔ ר p v ר q القانون الاول

ר(p v q) ⇔ ר p ∧ ר q القانون الثاني

اثبات القانون الثاني

p	q	ר(p v q)	ר p	ר q	ר p∧ר Q
T	T	F	F	F	F
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T