Al Basrah university
college of Pharmacy

Mathematics and Statistics\ first stage

Dr . Rana Hasan

28/12/ 2022

Indefinite Integral

Def : *A function $F(x)$ is called an anti-derivative of a function $f(x)$ if $F'^{(x)} = f(x)$. If $F(x)$a is any anti-derivative of $f(x)$,then the most general anti-derivative of $f(x)$ is called an intdefinite integral and denoted $\int f(x)dx = F(x) + c, c$ is any constant.*

In this definition the $\int$ is called the integral symbol, $f(x)$is called the integrand , x is called the integration variable and the c is called the constant of integration.

Properties of the Indefinite Integral:

1) $\int k \, . f(x)\, dx = k \int f(x)dx,$ k is any number.
2) $\int -f(x)\, dx = -\int f(x)dx.$
3) $\int \left(f(x) \mp g(x)\right) dx = \int f(x)dx \mp \int g(x)dx$.
4) $\int k \, . dx = kx + c,$ k and c are constant.

Basic Integralion formulas:

1.$\int x^n dx = \frac{x^n+1}{n+1} + c \, , n \neq -1$.

2. .$\int \left(f(x)\right)^n . f'(x)dx = \frac{\left(f(x)\right)^{n+1}}{n+1} + c$

Examples:

1) $\int 8\,dx = 8x + c$

2) $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c.$

3) $\int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + c.$

4) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + c$

5) $\int \frac{1+x}{x^3} dx = \int \left(\frac{1}{x^3} + \frac{x}{x^3}\right) dx = \int \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}\right) dx$

6) $= \int \frac{1}{x^3} dx + \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-3} dx + \int x^{-2} dx$

$$= \frac{x^{-2}}{-2} + \frac{x^{-1}}{-1} + c = \frac{-1}{2x^2} - \frac{1}{x} + c.$$

Note1:

عند التكامل كل دالة جذرية يجب أن تحول إلى دالة اسية

7) $\int \sqrt[5]{x^2}\;dx = \int x^{2/5}\,dx = \frac{5}{7} x^{7/5} + c$

$$= \frac{5}{7}\sqrt[5]{x^7} + c.$$

8) $\int (x+1)^2\;dx = \int (x^2 + 2x + 1)\;dx$

$$= \int x^2 dx + 2\int x dx + \int dx = \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + x + c.$$

9) $\int \frac{x}{\sqrt{(1-2x^2)^3}} dx = \int x(1-2x^2)^{-3/2} . \frac{-4}{-4}\;dx$

$$= \frac{1}{-4}\int (-4x)(1-2x^2)^{-3/2} dx$$

$$= \frac{1}{-4}\left(\frac{(1-2x^2)^{-1/2}}{-1/2}\right) + c = \frac{1}{2\sqrt{1-2x^2}} + c$$

$$10)\ \int 9\sqrt{x}\,dx = 9\int x^{1/2}\ dx$$

$$= 9.\frac{2}{3}x^{3/2} + c \qquad = 6\sqrt{x^3} + c.$$

Note2:

كل دالة في المقام مرفوعة إلى أس نرفعها إلى البسط مع تغير إشارة الأس

$$11)\ \int \frac{8}{x^6}dx = \int 8x^{-6}\,dx = \frac{8}{-5}x^{-5} + c.$$

$$12)\ \int \frac{25}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int 25\,x^{-2/3}\,dx$$

$$= 25\frac{x^{1/3}}{\frac{1}{3}} + c \quad = 75\sqrt[3]{x} + c$$

$$13)\ \int (3x^2 + 6x + 8)dx = 3\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} + 8x + c.$$

$$14)\ \int (3\sqrt{x} + 6\sqrt[3]{x^2}\,)dx = \int 3x^{1/2}\,dx + \int 6x^{2/3}\,dx$$

$$= 3\frac{2}{3}x^{3/2} + 6\ \frac{3}{5}x^{5/3} + c$$

$$= 2\sqrt{x^3} + \frac{18}{5}\sqrt[3]{x^5} + c.$$

Note3:

لا يوجد حاصل ضرب دالتين في التكامل وإنما نجري عملية توزيع الضرب

$$15)\int(3x-1)(x+5)dx=\int(3x^{2+}+15x-x-5)dx$$

$$=3\frac{x^3}{3}+14\frac{x^2}{2}-5x+c=x^3+7x^2-5x+c.$$

$$16)\int(x^2+3)^2.2x\,dx=\frac{(x^2+3)^3}{3}+c.$$

$$17)\int(3x^2+8x+5)^6*(3x+4)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int(3x^2+8x+5)^6.(6x+8)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(3x^2+8x+5)^7}{7}+c\quad=\frac{1}{14}(3x^2+8x+5)^7+c.$$

$$18)\int(3x-3)\sqrt{x^2-2x}\;dx$$

$$=\frac{3}{2}\int 3(x^2-2x)^{1/2}.(2x-2)\;dx$$

$$=\frac{3}{2}\frac{(x^2-2x)^{3/2}}{\frac{3}{2}}+c\;=\frac{3}{2}.\frac{2}{3}\sqrt{(x^2-2x)^3}+c$$

$$=\sqrt{(x^2-2x)^3}+c.$$

Note3:

أذاكانت مشتقة داخل القوسين غير موجودة خارج القوس هناك احتمالان

الاحتمال الأول استخراج عامل مشترك كما في الأمثلة التالية :

$$19)\int \sqrt[7]{2x^9-3x^7}\,dx=\int \sqrt[7]{x^7(2x^2-3)}\ dx$$

$$=\int (2x^2-3)^{1/7}(x^7)^{1/7}\,dx=\int (2x^2-3)^{1/7}(x)^{7/7}\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\int (2x^2-3)^{1/7}\,(4x)\,dx \quad =\frac{1}{4}\,\frac{(2x^2-3)^{8/7}}{\frac{8}{7}}+c$$

$$=\frac{1}{4}.\frac{7}{8}\,(2x^2-3)^{8/7}+c \ =\frac{7}{32}\sqrt[7]{(2x^2-3)^8}+c.$$

$$20)\int (2x^6-3x)^4dx=\int \left(x(2x^5-3)\right)^4 dx$$

$$=\int x^4(2x^5-3)^4dx=\frac{1}{10}\int (2x^5-3)^4(10x^4)dx$$

$$=\frac{1}{10}\,\frac{(2x^5-3)^5}{5}+c=\frac{1}{50}(2x^5-3)^5+c.$$

الاحتمال الثاني اذا كانت الدالة داخل القوس على شكل ax^2+bx+c ***كما في المثال التالي:***

نتبع القاعدة التالية: $(\sqrt{\text{الحد الاول}} \mp \sqrt{\text{الحد الثالث}})^2$

$$21)\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2+16x+64}}=\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(x+8)^2}}=\int (x+8)^{-2/5}\,dx$$

$$=\frac{(x+8)^{3/5}}{\frac{3}{5}}+c=\frac{5}{3}\sqrt[5]{(x+8)^3}+c.$$

Note3:

إذا كانت درجة البسط اكبر أو تساوي درجة المقام نستخدم طرق التحليل والاختصار

$$22)\int \frac{x^3+1}{x^2-x+1}dx = \int \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x^2-x+1)}dx$$

$$= \int (x+1)dx = \frac{x^2}{2} + x + c$$

Note3:

إذا كانت درجة البسط اقل من درجة المقام نجزئ الأسس كما في المثال التالي

$$23)\int \frac{x^5}{(x+1)^7}dx = \int \frac{x^5}{(x+1)^5}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}dx$$

$$= \int (\frac{x}{x+1})^5\cdot\frac{1}{(x+1)^2}dx \;= \frac{(\frac{x}{x+1})^6}{6} + c.$$

$$24)\int \frac{x^3}{(x+1)^5}dx = \int \frac{x^3}{(x+1)^3}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}dx$$

$$= \int \left(\frac{x}{x+1}\right)^3\cdot\frac{1}{(x+1)^2}dx = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{x+1}\right)^4 + c.$$