التمثيل العقدي: *The Complex Representation*

في كثير من الأحيان من الملائم استخدام الاعداد العقدية لتمثيل الحركة التوافقية البسيطة.

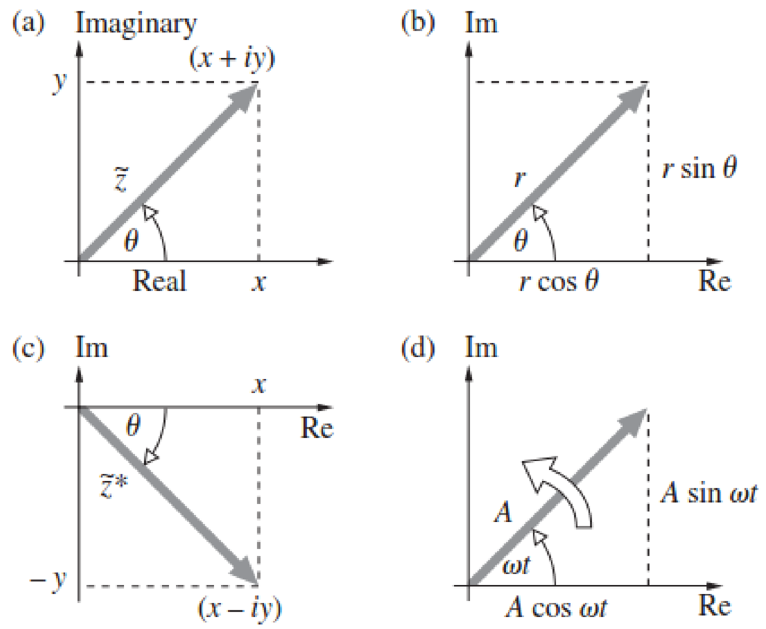
ان العدد المعقد $\tilde{z}$ يتكون من جزء حقيقي وجزء خيالي ويكتب بالشكل التالي

$$\tilde{z} = x + iy$$

$$x = Real(\tilde{z}) \equiv Re(\tilde{z})$$

$$y = Imaginary(\tilde{z}) \equiv Im(\tilde{z})$$

$$i = \sqrt{-1}$$



كما يمكن تمثيل العدد العقدي بأستخدام الاحداثيات القطبية (*Polar coordinates*) كما موضح بالشكل اعلاه حيث:

$$x = r\cos\theta\,, \quad y = r\sin\theta$$

$$\tilde{z} = x + iy = r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$$

$$|\tilde{z}| = r = x^2 + y^2$$

وباستخدام صيغة اويلر (*Euler Formula*)

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\sin\theta$$

$$\therefore \quad \bar{z} = \; r\, e^{i\theta}$$

$$where \qquad \theta = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

ويرمز لمرافق العدد العقدي $\bar{z}$ بالرمز $\bar{z}^*$ حيث تستبدل اشارة i في هذه الحالة كالتالي

$$\bar{z}^* = x - iy$$

$$\therefore \quad \bar{z}^* = |\bar{z}|\, e^{-i\theta}$$

$$e^{-i\theta} = \; cos\,\theta - \; i \; sin\,\theta$$

$$cos\,\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad , \quad sin\,\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\bar{z}.\bar{z}^* = \left(|\bar{z}|\, e^{i\theta}\right)\left(|\bar{z}|\, e^{-i\theta}\right) = |\bar{z}|^2$$

∴ يمكن تمثيل الحركة التوافقية البسيطة بأستخدام الاعداد العقدية ولذا فأن المعادلة (2) تصبح

$$\bar{y} = A\, e^{i(\omega t + \phi_0)}$$

$$= A\, [cos(\omega t + \phi_0) + i\, sin(\omega t + \phi_0)]$$

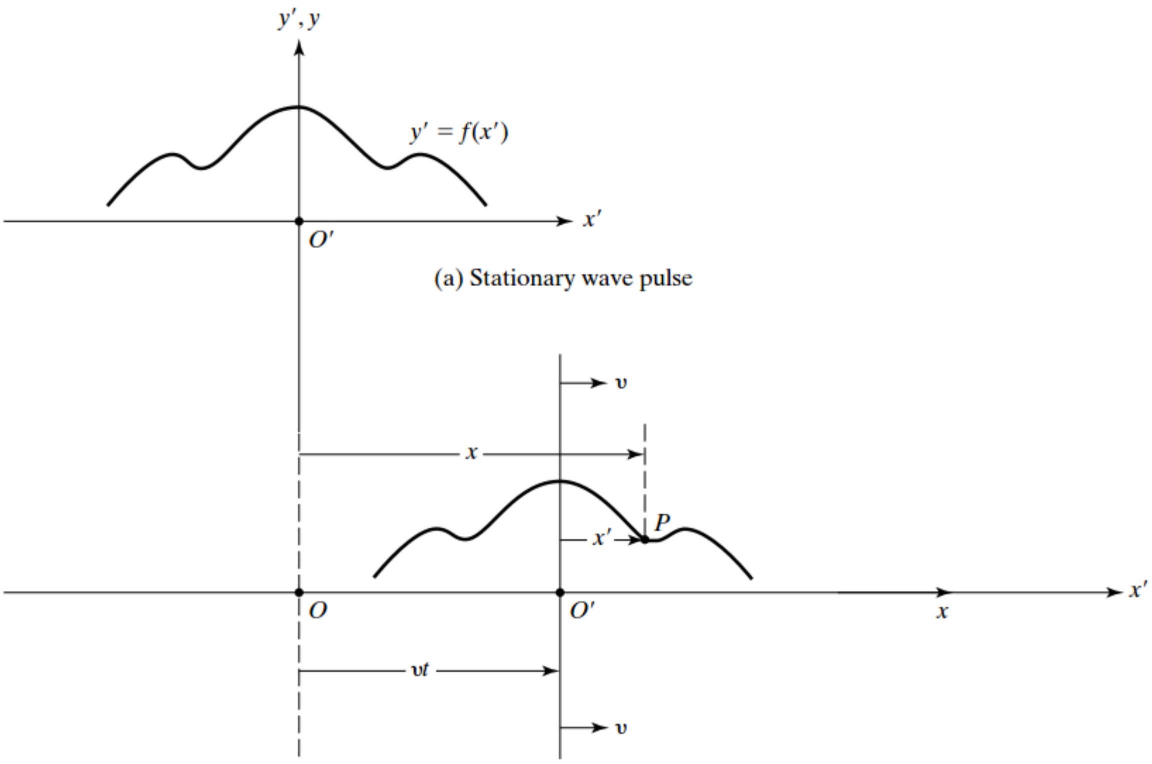
حيث

$$Re\,(\bar{y}) = A\, cos(\omega t + \phi_0)$$

$$Im\,(\bar{y}) = A\, sin(\omega t + \phi_0)$$

اذ تمثل A القيمة المطلقة للعدد العقدي اي سعة الموجة.

معادلة الموجة ذات البعد الواحد *One-Dimensional Wave Equation*



(a) Stationary wave pulse

(b) Wave pulse translating at constant speed

في الشكل اعلاه موجة نبضة ذات بعد واحد لشكل عشوائي توصف بالشكل $y' = f'(x)$ لنفرض أنها ثابته عن المحور $O' = (x', y')$ كما في الشكل (a). افرض ان النظام المحوري والنبضة تحركت الى اليمن على المحور x بسرعة ثابتة v بالنسبة للمحور الثابت $O = (x, y)$ كما في الشكل (b).

لنفرض ان شكل النبضة لايتغير، فأن اي نقطة مثل P يمكن وصفها بالمحور x أو x' حيث :

$$x' = x - vt$$

علماً بأننا فرضنا ان y ثابتة في المحورين، وبذلك فأن النبضة المنتقلة لها الشكل الرياضي التالي :

$$y = y' = f(x') = f(x - vt) \qquad \ldots\ldots(3)$$

وفي حالة سير النبضة نحو اليسار، فأن أشارة v يجب أن تعكس وبالامكان كتابة المعادلة (3) بشكل عام كالتالي:

$$y = f(x \pm vt) \qquad \ldots\ldots(4)$$

حيث تمثل y الازاحه بأتجاه y و x اتجاه انتشار الموجة

تسمى المعادلة (4) بالمعادلة العامة للموجة المنتقلة (*traveling wave*) وهي دالة للموقع والزمن معاً.

ويمكن الحصول على معادلة الموجة الجزئية (التفاضلية) التي تحقق معادلة الموجة ذات البعد الواحد (*one-dimensional differential wave equation*) باستخدام قاعدة السلسلة للتفاضل الجزئي (*chain rule of partial differentiation*)

$$\because \quad y = f(x') \quad where \quad x' = x - vt$$

$$thus \quad \frac{\partial x'}{\partial x} = 1 \quad and \quad \frac{\partial x'}{\partial t} = \pm v$$

بأستخدام قاعدة السلسلة، فان المشتقة للمكان هي

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'}$$

وباعادة نفس الاجراء للمشتقة الثانية نحصل على

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\ \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}\right)$$

وبالمثل يمكن ايجاد المشتقة الثانية للزمن

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} = \pm v\,\frac{\partial f}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'}\left(\pm v\,\frac{\partial f}{\partial x'}\right)(\pm v) = v^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}$$

وبالجمع بين نتائج المشتقات الثانية، نحصل على معادلة الموجة التفاضلية ذات البعد الواحد

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \ldots\ldots\ldots.(5)$$

Q) أثبت ان معادلة الموجة التالية:

$$y(x,t) = \frac{3}{10(x-vt)^2+1}$$

هي حل لمعادلة الموجة التفاضلية ذات البعد الواحد