الفصل الرابع

مقاييس التمركز او التوسط

وهي المقاييس التي تبحث في تقدير قيمة تتمركز حولها اغلبية هذه البيانات واهم مقاييس التمركز هي:

الوسط الحسابي , الوسط الهندسي , الوسط التوافقي , الوسط التربيعي , الوسيط , المنوال:-

أولا: الوسط الحسابي: The Arithmetic mean

الوسط الحسابي في الإحصاء هو القيمة الوسطية لمجموعة من الأرقام، وتعتمد طريقة حساب الوسط على العلاقة بين عناصر المجموعة الخاضعة للتحليل، حيث إنّ الوسط الحسابي لمجموعة من الأرقام، يساوي ناتج جمع الأرقام مقسومًا على عددها، ويعتبر الوسط الحسابي نقطة تتوازن بقية الأرقام حولها، ويستخدم الوسط الحسابي في الإحصاء كقيمة نموذجية مفردة لمجموعة من البيانات، ويرمز له بالرمز $\bar{y}$

أ- في حالة البيانات الغير مبوبة يكون القانون كالتالي:

اذا كان لدينا n من القيم او المشاهدات $y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_n$ فان الوسط الحسابي لها هو

$$\bar{y}= \sum \frac{yi}{n}$$

مثال: البيانات التالية تمثل اوزان الطلبة لقسم علوم الأغذية خلال ثلاث سنوات وهي: 75, 60, 90, 70, 50 كغم فما هو متوسط اوزانهم خلال هذه الفترة.

$$\bar{y}= \sum \frac{yi}{n} = \sum \frac{50+70+90+60+75}{5} = \frac{345}{5} = 69 \text{ كغم}$$

أي ان معدل اوزان الطلبة 69 كغم خلال ثلاث سنوات

ب- في حالة البيانات المبوبة يكون القانون كالتالي:

اذا كانت $y_1, y_2, y_3, y_4 \ldots\ldots y_k$ تمثل مراكز الفئات في جدول التوزيع التكراري مع تكراراتها $f_1, f_2, f_3, f_4 \ldots\ldots f_k$ على التوالي فالوسط الحسابي هو:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{k} fiyi}{\sum_{i=1}^{k} fi}$$

وخطوات إيجاد الوسط الحسابي في البيانات المبوبة هي الاتي:

1- تعيم مراكز الفئات.

2- ضرب مركز أي فئة بمقدار تكرارها (f_iy_i).

3- قسمة مجموع (حاصل ضرب مركز كل فئة × تكرارها) على مجموع التكرارات.

ثانيا: الوسيط The median

أ- للبيانات غير المبوبة فالقانون يكون كالاتي:

اذا كان لدينا n من القيم او المشاهدات $y_1,y_2,y_3 \ldots .y_n$ ورتبت ترتيب تصاعدي او تنازلي 1- اذا كان n عدد فردي فان الوسيط هو القيمة التي ترتيبها $\frac{n+1}{2}$ أي ان الوسيط (ويرمز له $\overline{Me}$) $\overline{Me} = y(n+1)/2$

2- اما اذا كان n عدد زوجي فان الوسيط للقيمتين التين ترتيبهما $\frac{n}{2}$ و $\frac{n}{2}+1$ وقانون حساب الوسيط يكون $\overline{Me} = \frac{y\left(\frac{n}{2}\right)+y\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2}$

مثال: اوجد الوسيط لدرجات طالب في الإحصاء في خمس امتحانات اذ كانت درجاتها هي (84,76,82,80 ,87)

الحل: ترتب الدرجات تصاعديا او تنازليا (76,80,82,84,87)

بما ان عدد الأرقام فردي n=5

اذن الوسيط هو القيمة التي ترتيبها $3 = \frac{6}{2} = \frac{5+1}{2} = \frac{n+1}{2}$

أي ان الوسيط = 82 $\overline{Me} = y_3 = 82$

مثال: اوجد الوسيط للقيم التالية: y_i= 5,4,8,7,3,12,9,2 وبما ان عدد القيم هو عدد زوجي (n=8)

اذن الوسيط هو للقيمتين اللتين ترتيبهما $\left(\frac{n}{2}\right), \left(\frac{n}{2}+1\right)$

ترتب القيم تصاعدي او تنازلي (2,3,4,5,7,8,9,12)

$\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{8}{2} = 4$, $\frac{n}{2} + 1 = 4+1 = 5$

القيمة التي ترتيبها (4) هي 5 اما القيمة التي ترتيبها (5) هي 7

$\overline{Me} = \frac{y\left(\frac{n}{2}\right)+y\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2} = \frac{5+7}{2} = \overline{Me} = \frac{12}{2} = 6$

ثالثا: المنوال او القمة The Mode

للبيانات الغير مبوبة يكون الاتي:

اذا كان لدينا ى من المشاهدات $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ فان المنوال لهذه المشاهدات يكون المشاهدة او القيمة الأكثر تكرار بين هذه المشاهدات

ويرمز له $\overline{Mo}$

مثال : جد المنوال لكل البيانات التالية:

أ- 6,8,2,5,9,5,6,2,5,3

ب- 48.9 , 49.5 , 50,3 , 48.7 , 51.6

الحل : أ- المفردة 5 هي اكثر المفردات تكرارا لذا فهي المنوال

ب – لا يوجد منوال

الوسيط 2,2,3,5,5,5,6,6,8,9

$\overline{Me} = \frac{n}{2}$, $\overline{Me} = \frac{n}{2}+1$, $\frac{10}{2} = 5$, $\frac{10}{2}+1 = 5+1 = 6$

الوسيط هو القيمتين اللتين ترتيبهما 5,6 عند إعادة ترتيب القيم تصاعديا او تنازليا ويساوي (5,5)

51.6 , 50.3 ,49.5 ,48.9 , 48.7

$\overline{Me} = \overline{Me} = \frac{n+1}{2} = \overline{Me} = \frac{5+1}{2} = 3$

مثال : اوجد المنوال والوسيط للقيم التالية:

y_i = 5, 4, 8, 3, 7, 8, 12, 9, 12, 8

ترتب تصاعدي او تنازلي

yi= 3, 4, 5, 7, 8, 8, 8, 9, 12, 12

المنوال $\overline{Me} = \frac{n}{2}$ $\overline{Me} = \frac{n}{2}$ +1 $\overline{Me} = \frac{10}{2}$ =5 $\overline{Me} = \frac{10}{2}$ +1=6

الوسيط = 8 المنوال = 8

مثال: استخرج الوسط الحسابي لاطوال النباتات من جدول التوزيع التكراري التالي:

الفئات	التكرار
40−31	1
50−41	2
60−51	5
70−61	15
80−71	25
90−81	20
100−91	12
	∑fi =80

الحل: $\bar{y} = \frac{\sum fiyi}{\sum fi}$

أولا استخراج مراكز الفئات = (الحد الأول+الحد الثاني/2)

ثانيا استخراج $\sum fiyi$ حاصل ضرب مركز الفئة في تكرارها

الفئات	التكرار	مركز الفئة	$\sum fiyi$
40−31	**1**	**35.5**	**35.5**
50−41	**2**	**45.5**	**91**
60−51	**5**	**55.5**	**277.5**
70−61	**15**	**65.5**	**982.5**
80−71	**25**	**75.5**	**1887.5**
90−81	**20**	**85.5**	**1710**
100−91	**12**	**95.5**	**1146**
	∑fi =80		$\sum fiyi$ **= 6130**

$\bar{y} = \frac{6130}{80} = 76.62$

خواص الوسط الحسابي

أ- مجموع انحرافات القيم عن وسطها الحسابي يساوي صفر

للبيانات غير المبوبة $\sum(yi-\bar{y}) = 0$

للبيانات المبوبة $\sum fi(yi-\bar{y}) = 0$

- $\sum(yi-\bar{y}) = \sum yi - \sum\bar{y}$

  $= \sum yi - n\bar{y} = \sum yi - n\frac{\sum yi}{n}$ بالاختصار

  $= \sum yi - \sum yi = 0$

- $\sum fi(yi-\bar{y}) = \sum fiyi - \bar{y}\sum fi$

  $= \sum fiyi - (\frac{\sum fiyi}{\sum fi})\sum fi$ بالاختصار

  $= \sum fiyi - \sum fiyi = 0$

ب-مجموع مربعات الانحرافات عن الوسط الحسابي هي اقل ما يمكن أي اقل من مجموع مربعات الانحراف عن أي قيمة غير الوسط الحسابي نفسه أي: $\sum(yi-\bar{y})^2$ اقل ما يمكن

مثال : من القيم التالية : yi= 9,8,6,5,7, جد الوسط الحسابي و $\sum(yi-\bar{y})^2$

$$\bar{y} = \frac{\sum yi}{n} = \frac{9+8+6+5+7}{5} = 7$$

$$\sum(yi-\bar{y})^2 = (9-7)^2+(8-7)^2+(6-7)^2+(5-7)^2+(7-7)^2$$

$$= 4+1+1+4+0 = 10$$

فلو طرحنا من القيم أي رقم غير الوسط الحسابي وليكن A=10

$$\sum(yi-A)^2 = (9-10)^2+(8-10)^2+(6-10)^2+(5-10)^2+(7-10)^2$$

$$= 1+4+16+25+9 = 55$$ وطبيعي(55) اكبر من (10)

ج- عند إضافة عدد ثابت مثل (k) الى كل قيمة من قيم المشاهدات فان الوسط الحسابي للقيم الجديدة يساوي الوسط الحسابي للقيم الاصلية مضاف له العدد الثابت(k).

$Xi = yi + k$

$\bar{x} = \bar{y} + k$

Xi= yi + k

$\sum xi=\sum(yi+k)$

$\sum xi= \sum yi + nk$

$\frac{\sum xi}{n} = \frac{\sum yi}{n} + \frac{nk}{n}$

$\bar{x} = \bar{y} + k$

د- اذ ضربت كل قيمة من قيم المشاهدات في قيم ثابت k فان : الوسط الحسابي للقيم الجديدة يساوي الوسط الحسابي للقيم الاصلية مضروب في العدد الثابت k

Zi = kyi

$\bar{z} = k\bar{y}$

البرهان:

Zi=kyi

$\sum Zi = k\sum yi$

$\frac{\sum zi}{n} = k\frac{\sum yi}{n}$

$\bar{z} = k\bar{y}$

مثال: في القيم التالية : yi=8,3,2,12,10 جد قيمة $\bar{z}$ اذا كانت zi = 5yi وقيم $\bar{y} = 7$

الحل:

Zi = (8×5) , (3×5) , (2×5) , (12×5) ,(10×5)

40, 15 , 10 , 60 , 50

$\bar{z} = \frac{\sum xi}{n} = \frac{175}{5} = 35$

وهي تساوي $\bar{z} = (5)(\bar{y}) = (5)(7)=35$

ويمكن تعميم الخاصيتين السابقتين بالقانون التالي :

Xi=a+byi , $\bar{Z} = a + b\bar{y}$

هـ- الوسط الحسابي لمجموع قيم متغيرين يساوي مجموع الوسطين الحسابيين المتغيرين

أي :

Zi=Xi+yi

$\bar{Z} = \bar{x} + \bar{y}$ فان

البرهان:

Zi=Xi+yi

$\sum$zi =$\sum$(xi+yi)

= $\sum$xi+$\sum$yi

$\frac{\sum zi}{n} = \frac{\sum xi}{n} + \frac{\sum yi}{n}$

$\bar{Z} = \bar{x} + \bar{y}$

و- اذا كان لكل قيمة نت المشاهدات yi وزن خاص يتناسب مع أهميتها (wi) فان الوسط الحسابي (الموزون) لهذه القيم هو:

$\bar{y} = \frac{\sum wiyi}{\sum wi}$

مثال: القيم التالية تمثل نتائج احد الطلبة في درس الإحصاء علما بان لكل امتحان وزن او أهمية او نسبة معينة:

الامتحان	الدرجة	الأهمية او النسبة او الوزن	Wiyi (هذا العمود يضاف اثناء الحل)
الأول	70	%10	700
الثاني	60	%30	1800
الثالث	75	%10	750
الرابع	55	%50	2750
		∑wi=100	∑wiyi=6000

الوسط الحسابي او معدل الطالب يكون

$$\bar{y} = \frac{\sum wiyi}{\sum wi} = \frac{6000}{100} = 60$$

تحياتي لكم جميعا

أي شيء غير واضح او أي خطا بالطباعة يمكن مراسلتي على التواصل الاجتماعي كذلك سوف ارسل لكم مقطع صوت اجابة على أي سؤال لتعم الفائدة للجميع

أستاذ المادة

الدكتور وائل علي الوائلي