الفصل الاول : الدوال الخاصة

١) دالة كـاما: Gamma Function

تعرف دالة كـاما $\Gamma(n)$ بالشكل الاتي :

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx \quad ; n>0 \quad \dots \quad (1)$$

ولكي يكون التكامل متقارب يجب ان تكون $n>0$.

ملاحظة:

١) بوضع $n=1$ في (١) نحصل على

على

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty x^{1-1}e^{-x}dx \;=\int_0^\infty e^{-x}dx \;=[-e^{-x}]_0^\infty$$
$$=-[e^{-\infty}-e^0]=-(0-1)=1\Rightarrow\Gamma(1)=1$$

٢) بوضع $n=n+1$ في (١) نحصل على

$$\Gamma(n+1)=\int_0^\infty x^{n+1-1}e^{-x}dx \;=\int_0^\infty x^n e^{-x}dx$$

$$u=x^n \qquad dv=e^{-x}dx$$
$$du=n\,x^{n-1}dx \qquad v=-e^{-x}$$

$$\Gamma(n+1)=-e^{-x}x^n\Big|_0^\infty+n\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$$

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n) \qquad \dots \quad (2)$$

تسمى العلاقة (٢) بالعلاقة التكرارية لدال كـاما (Recurrence Relation)

٣) من (٢) نلاحظ ان n **تكون عدد صحيح موجب :**

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n)\\ &= n(n-1)\Gamma(n-1)\\ &= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)\\ &= n(n-1)(n-2)(n-3)\Gamma(n-3)\\ &\ \vdots\\ &= n(n-1)(n-2) \quad \ldots \quad 3.2.\Gamma(1)\\ &= 1.2.3...(n-1)n\end{aligned}$$

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad \ldots \qquad (3)$$

$$n = 0,1,2,....$$

من (٣) عندما $n=0$ نحصل $\Gamma(1) = 0! = 1$.

<u>امثلة:</u> جد قيمة التكاملات التالية:

$$1) \int_0^\infty x^5 e^{-x} dx = \int_0^\infty x^{6-1} e^{-x} dx = \Gamma(6) = 5!\,.$$

$$2) \int_0^\infty t^6 e^{-2t} dt =$$

$$2t = u$$

$$t = \frac{u}{2} \Rightarrow dt = \frac{du}{2}.$$

$$= \int_0^\infty (\frac{u}{2})^6 e^{-u} \frac{du}{2} = \frac{1}{2^7} \int_0^\infty u^6 e^{-u} du = \frac{\Gamma(7)}{2^7} = \frac{6!}{2^7}.$$

<u>ملاحظة:</u> يمكن كتابة العلاقة (٢) بالصيغة التالية:

$$\Gamma(n)=\frac{\Gamma(n+1)}{n} \qquad \dots \qquad (4)$$

$$n=0 \Rightarrow \Gamma(0)=\frac{\Gamma(1)}{0}=\infty.$$

$$n=-1 \Rightarrow \Gamma(-1)=\frac{\Gamma(0)}{-1}=\frac{\infty}{-1}=-\infty.$$

$$n=-2 \Rightarrow \Gamma(-2)=\frac{\Gamma(-1)}{-2}=\frac{-\infty}{-2}=\infty$$

وبتكرار العلاقة (٤) نلاحظ ان دالة كاما تكون غير معرفة ∞ او $-\infty$ عندما تكون n صفر اوعدد صحيح سالب.اما اذا كان n عدد سالب غير صحيح $n \neq 0,-1,-2,\dots$ فان

$$\Gamma(n)=\frac{\Gamma(n+1)}{n} \qquad ;-1<n<0$$

$$\Gamma(n)=\frac{\Gamma(n+1)}{n} \qquad ;-2<n<-1$$

وهكذا $\Gamma(n)$ تكون معرفة للقيم السالبة غير الصحيحة بالشكل:

$$\Gamma(n)=\frac{\Gamma(n+1)}{n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)} \qquad \dots \quad (5) \qquad n \neq 0,-1,-2,\dots$$

حيث n عدد صحيح وان العلاقة (٥) يمكن استخدامها لإيجاد قيم n لجميع قيم السالبة $n \neq 0,-1,-2,\dots$.

مثال: برهن ان $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

الحل:

$$\Gamma(\frac{1}{2})=\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}-1}e^{-x}dx=\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx$$

$$Let\sqrt{x}=y\Rightarrow x=y^2\Rightarrow dx=2ydy.$$

$$\Gamma(\frac{1}{2})=\int_0^\infty \frac{1}{y}\,e^{-y^2}2ydy=2\underbrace{\int_0^\infty e^{-y^2}dy}_{I}=2I.$$

$$Let\;\; I=\int_0^\infty e^{-y^2}dy \qquad , I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx.$$

$$I^2=I.I=\int_0^\infty e^{-y^2}dy.\int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

وبتحويل التكامل الثنائي الى الاحداثيات القطبية نحصل على:

$$Let\;\; I=\int_0^\infty e^{-y^2}dy \qquad , I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx.$$

$$I^2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-r^2}rdrd\theta=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[e^{-r^2}]_0^\infty d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{\pi}{4}.$$

$$\Rightarrow I^2=\frac{\pi}{4}\Rightarrow I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Rightarrow\Gamma(\frac{1}{2})=2I\Rightarrow\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}.$$

ملاحظة:

يمكن ايجاد دالة كـاما لأي قيمة n عندما تكون n نصف عدد صحيح سالب او موجب فمثلا:

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2}+1) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\ \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma(\frac{7}{2}) = \frac{5}{2}\frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

$$\vdots$$

$$\Gamma(\frac{2p+1}{2}) = \frac{2p-1}{2}\frac{2p-3}{2}\quad\cdots\quad\frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\qquad ;\ p = 1,2,3,\ldots$$

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}.$$

$$\Gamma(-\ \frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma(-\frac{3}{2}) = \frac{\Gamma(-\ \frac{1}{2})}{-\frac{3}{2}} = \frac{-2}{3}\ \frac{-2}{1}\sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma(-\frac{5}{2}) = \frac{\Gamma(-\ \frac{3}{2})}{-\frac{5}{2}} = \frac{-2}{5}\frac{-2}{3}\ \frac{-2}{1}\sqrt{\pi}.$$

$$\vdots$$

$$\Gamma(\frac{-2p+1}{2}) = \frac{-2}{2p+1}\quad\frac{-2}{2p-3}\ \ \frac{-2}{2p-5}\cdots\frac{-2}{3}\ \frac{-2}{1}\sqrt{\pi}.\qquad ; p = 0,1,2,\ldots.$$

امثلة: اثبت التكاملات التالية:

$$1)\ \int_0^2 \frac{dy}{\sqrt{\ln(\frac{2}{y})}} = 2\sqrt{\pi}.$$

$$Let\ \ x = \ln(\frac{2}{y}) \Rightarrow e^x = \frac{2}{y}$$

$$\Rightarrow y = 2e^{-x} \Rightarrow dy = -2e^{-x}dx.$$

$$y \to 0 \Rightarrow x \to \infty$$

$$y \to 2 \Rightarrow x \to 0$$

$$\int_0^2 \frac{dy}{\sqrt{\ln(\frac{2}{y})}} = \int_\infty^0 \frac{-2e^{-x}dx}{\sqrt{x}} = 2\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}-1}\ x^{-\frac{1}{2}}\ e^{-x}dx = 2\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\sqrt{\pi}.$$

$$2)\ \int_0^\infty \sqrt[4]{x}\, e^{-\sqrt{x}}dx = \frac{3}{2}\sqrt{\pi}.$$

$$Let\ \ y = \sqrt{x} \Rightarrow y^2 = x \Rightarrow 2ydy = dx.$$

$$x \to 0 \Rightarrow y \to 0$$

$$x \to \infty \Rightarrow y \to \infty$$

$$\therefore\ \int_0^\infty \sqrt[4]{x}\, e^{-\sqrt{x}}dx = \int_0^\infty \sqrt{y}\, e^{-y}\, 2y\, dy = 2\int_0^\infty y^{\frac{5}{2}-1}\ y^{\frac{3}{2}}\ e^{-y}\, dy$$

$$= 2\Gamma(\frac{5}{2}) = 2\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}\sqrt{\pi}.$$

تمارين: اثبت ان

$$1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan^3\theta+\tan^5\theta)\,e^{-\tan^2\theta}\,d\theta=\frac{1}{2}.$$

$$2)\int_0^1 x^m(\ln x)^n\,dx=\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

٢- دالة بيتا Beta Function

تعرف دالة بيتا بالصيغة التالية:

$$\beta(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx \;\; ; (m,n)>0 \qquad ...(1)$$

ملاحظة: من التعريف اعلاه يمكن اثبات ان دالة بيتا متناظرة بالنسبة ل m,n وذلك اذا وضعنا

$$y=1-x \Rightarrow x=1-y$$
$$dy=-dx$$
$$\beta(m,n)=\int_1^0 (1-y)^{m-1}(y)^{n-1}-dy=\int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{m-1}dy \;=\beta(n,m)$$

$$\beta(m,n)=\beta(n,m).$$

صيغ اخرى لدالة بيتا:

١) اذا وضعنا في (١) $x=\sin^2\theta$ نحصل على

$$dx=2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$
$$x=0\rightarrow 0=\sin^2\theta\rightarrow 0=\sin\theta\rightarrow\theta=0.$$
$$x=1\rightarrow 1=\sin^2\theta\rightarrow 1=\sin\theta\rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}.$$
$$\beta(m,n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\theta)^{m-1}(\overbrace{1-\sin^2\theta}^{\cos^2\theta})^{n-1}2\sin\theta\cos\theta d\theta$$
$$\beta(m,n)\;=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2m-1}(\cos\theta)^{2n-1}d\theta \qquad ...(2)$$

٢) اذا وضعنا $x=\frac{y}{y+1}$ في (١) فنحصل على $dx=\frac{dy}{(y+1)^2}$

$$\therefore\ x=\frac{y}{1+y}\Rightarrow y=x(1+y)\Rightarrow xy-y+x=0$$

$$\Rightarrow y(x-1)=-x\Rightarrow y=\frac{x}{1-x}$$

$$f\ x=0 \Rightarrow y=0$$
$$x=1 \Rightarrow y=\infty$$

$$\frac{1}{1+y}$$

$$\beta(m,n)=\int_{0}^{\infty}\left(\frac{y}{1+y}\right)^{m-1}\left(1-\frac{y}{1+y}\right)^{n-1}\frac{dy}{(1+y)^{2}}$$

$$\beta(m,n)=\int_{0}^{\infty}\frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}}\ dy \qquad \ldots\ (3)$$

3-اذا وضعنا $x=\frac{y}{a},\ a\neq 0$ في (١) نحصل على:

$$\therefore\ x=\frac{y}{a},\quad a\neq 0 \Rightarrow dx=\frac{dy}{a}$$
$$If\ \ x=0 \Rightarrow y=0$$
$$x=1 \Rightarrow y=a$$
$$\beta(m,n)=\int_{0}^{a}\left(\frac{y}{a}\right)^{m-1}\left(1-\frac{y}{a}\right)^{n-1}\frac{dy}{a} \quad , \quad (a^{m-1+n-1+1}=a^{m+n-1})$$
$$\beta(m,n)=\frac{1}{a^{m+n-1}}\int_{0}^{a} y^{m-1}(a-y)^{n-1}\ dy \qquad \ldots\ (4)$$

<u>العلاقة بين دالتى كاما وبيتا:</u>

$$Let\ \ \Gamma(n)=\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt$$

$$put\ \ t=x^2 \Rightarrow dt=2xdx$$

$$\therefore \Gamma(n)==\int_0^\infty x^{2n-2}e^{-x^2}\,2x\,dx$$

$$=2\int_0^\infty x^{2n-1}e^{-x^2}\ dx$$

$$Let\ \ \Gamma(m)=\int_0^\infty s^{m-1}e^{-s}\ ds$$

$$put\ \ s=y^2 \Rightarrow ds=2ydy$$

$$\therefore \Gamma(m)=2\int_0^\infty y^{2m-1}e^{-y^2}\ dy \quad , \quad (y^{2m-2}y=y^{2m-2+1}=y^{2m-1})$$

$$\therefore \Gamma(n)\Gamma(m)=(2\int_0^\infty x^{2n-1}e^{-x^2}\ dx)(2\int_0^\infty y^{2m-1}e^{-y^2}\ dy)$$

$$=4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2n-1}\ y^{2m-1}\ e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

بتحويل التكامل الثنائي للإحداثيات القطبية:

$$\therefore \Gamma(n)\Gamma(m)=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty (r\cos\theta)^{2n-1}(r\sin\theta)^{2m-1}e^{-r^2}rdrd\theta$$

$$=(2\int_0^\infty r^{2(n+m)-2}e^{-r^2}rdr)(2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2n-1}(\sin\theta)^{2m-1}d\theta) \quad ,$$

$$\int_0^\infty r^{2(n+m)-1}e^{-r^2}rdr=\int_0^\infty (r^2)^{n+m-1}e^{-r^2}rdr$$

$$\Gamma(n)\Gamma(m)=\Gamma(m+n)\,\beta(m,n)\rightarrow \beta(m,n)=\frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(m+n)}$$

ملاحظة:

١- من العلاقات المهمة الاخرى التي تحتوي على دالة كـاما هي :

$$\Gamma(m)\Gamma(1-m)=\frac{\pi}{\sin(m\pi)}; \quad (0<m<1)$$

٢- $$\int_0^\infty \frac{y^{m-1}}{1+y}\,dy=\frac{\pi}{\sin(m\pi)}$$

البرهان:

$$\beta(m,n)=\frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(m+n)}$$

$$\int_0^\infty \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy=\frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(m+n)}$$

$$put \quad n=1-m$$

$$\int_0^\infty \frac{y^{m-1}}{(1+y)}\,dy=\frac{\Gamma(m)\Gamma(1-m)}{\Gamma(m+1-m)}$$

$$\frac{\pi}{\sin(m\pi)}=\Gamma(m)\Gamma(1-m).$$

مثال(١): جد ناتج التكامل

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$$

$$Let \quad y=x^3 \Rightarrow x=y^{\frac{1}{3}} \Rightarrow dx=\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}dy$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}=\int_0^1 \frac{\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}dy}{\sqrt{1-y}}=\frac{1}{3}\int_0^1 y^{-\frac{2}{3}}(1-y)^{-\frac{1}{2}}\,dy, \quad (m-1=-\frac{2}{3}\Rightarrow m=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3})$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 y^{\frac{1}{3}-1}(1-y)^{\frac{1}{2}-1}\,dy \quad , \quad n-1=-\frac{1}{2}\Rightarrow n=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{3}\beta(\frac{1}{3},\frac{1}{2})=\frac{1}{3}\frac{\Gamma(\frac{1}{3})\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{3}+\frac{1}{2})}$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{5}{6})}.$$

مثال (٢): اثبت ان

$$\int_0^2 t(8-t^3)^{\frac{1}{3}}dt = \frac{16}{9}\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

$$let\ \ t^3 = 8x \Rightarrow t = 2x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow dt = \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx$$

$$t = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$t = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$\therefore \int_0^2 t(8-t^3)^{\frac{1}{3}}dt = \int_0^1 2x^{\frac{1}{3}}(8-8x)^{\frac{1}{3}}\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^1 x^{-\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}}dx$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^1 x^{\frac{2}{3}-1}(1-x)^{\frac{4}{3}-1}dx$$

$$= \frac{8}{3}\beta(\frac{2}{3},\frac{4}{3}) = \frac{8}{3}\frac{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3}+\frac{4}{3})} = \frac{8}{3}\frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{2}{3}) \quad ,(\Gamma(\frac{4}{3}) = \frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{3}))$$

$$= \frac{8}{9}\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(1-\frac{1}{3}) = \frac{8}{9}\frac{\pi}{\sin(\frac{1}{3}\pi)} = \frac{8}{9}\frac{\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{16\pi}{9\sqrt{3}}.$$

مثال (٣): برهن ان

$$\int_0^{\pi}\cos^4\theta d\theta = \frac{3\pi}{8}.$$

$$\int_0^{\pi}\cos^4\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta+\overbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^4\theta d\theta}^{x=\pi-\theta\to\theta=\pi-x\to d\theta=-dx}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^4\theta d\theta=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^4(\pi-x)(-dx)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,dx \quad ,(cox(\pi-x)=\overset{-1}{\cos\pi}\ \cos x+\overset{0}{\sin\pi}\sin x)$$

$$\therefore\int_0^{\pi}\cos^4\theta d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\sin^0\theta d\theta$$

$$2m-1=4\Rightarrow m=\frac{5}{2}$$

$$2n-1=0\Rightarrow n=\frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\pi}\cos^4\theta d\theta=\beta(\frac{5}{2},\frac{1}{2})=\frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2}+\frac{1}{2})}=\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}=\frac{3}{8}\pi.$$

٣- دالة الخطأ(ErrorFunction): تعرف دالة الخطأ بالشكل الاتي:

$$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt.$$

وباخذ الغاية للطرفين عندما $x\to\infty$ نحصل على

$$\lim_{x\to\infty} erf(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt.$$

$$erf(\infty)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt.$$

$$\therefore erf(\infty)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1\Rightarrow erf(\infty)=1.$$

دالة الخطأ المتتمة(Complementary Error Function): تعرف دالة الخطأ المتتمة بالشكل الاتي:

$$erfc(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty}e^{-t^2}dt.$$

ملاحظة : هناك علاقة تربط بين دالة الخطأ ودالة الخطأ المتتمة:

$$\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt=\int_0^{x}e^{-t^2}dt+\int_x^{\infty}e^{-t^2}dt.$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x}e^{-t^2}dt+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty}e^{-t^2}dt.$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=erf(x)+erfc(x).$$

$$erf(x)+erfc(x)=1.$$

مثال: اثبت ان $\int_{-a}^{a}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}\,erf(a)$.

الحل:

$$\int_{-a}^{a}e^{-t^2}dt=\int_{-a}^{0}e^{-t^2}dt+\int_0^{a}e^{-t^2}dt.$$

بالتكامل الاول نضع

$$\int_{-a}^{a}e^{-t^2}dt=\int_{-a}^{0}\underbrace{e^{-t^2}dt}_{\substack{y=-t\\ dy=-dt}}+\int_0^{a}e^{-t^2}dt.$$

$$\int_{-a}^{a}e^{-t^2}dt=\int_{a}^{0}e^{-y^2}(-dy)+\int_0^{a}e^{-t^2}dt.$$

$$=\int_0^{a}e^{-y^2}dy+\int_0^{a}e^{-t^2}dt.$$

$$=2\int_0^{a}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}\,\underbrace{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{a}e^{-t^2}dt.}_{erf(a)}$$

$$=\sqrt{\pi}\,erf(a).$$

تمارين: اوجد حل التكاملات التالية

1) $\int_{-3}^{-2} (y+3)^6 (y+2)^4 dy$

2) $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}(1+x)}$

3) $\int_{0}^{2} \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx$

4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan\theta}\ d\theta$

٥) اثبت ان . $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\theta} d\theta}{e^{3\theta}+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

حل تمرين (١):

$$\int_{-3}^{-2} (y+3)^6 (y+2)^4 dy = \int_{0}^{1} x^6 (x-1)^4 dx$$

$$y+3 = x \Rightarrow y = x-3 \Rightarrow dx = dy$$

$$y \to -3 \Rightarrow x \to 0 \quad , \beta(m,n) = \int_{0}^{1} x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$$

$$y \to -2 \Rightarrow x \to 1$$

$$= \int_{0}^{1} x^6 (-(1-x))^4 dx = \int_{0}^{1} x^6 (1-x)^4 dx,\ m-1 = 6 \to m = 7$$

$$n-1 = 4 \to n = 5$$

$$= \beta(7,5) = \frac{\Gamma(7)\Gamma(5)}{\Gamma(12)} = \frac{6!4!}{11!}.$$

الفصل الثاني : دوال بيسل

المعادلة التفاضلية $x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$

تسمى معادلة بيسل التفاضلية من الرتبة n حيث n عدد ثابت.

بما ان المعادلة (١) من الرتبة الثانية فيكون لها حلين مستقلين خطيا ولإيجادهما نستخدم طريقة المتسلسلات لحل المعادلة. نلاحظ ان $x=0$ هي نقطة منفردة منتظمة للمعادلة (١) ولذلك نفرض الحل بالصيغة $y=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^{k+n} \quad ; \quad a_0\neq 0$

وبتعويض المتسلسلة اعلاه في المعادلة (١) نحصل في حالة $n\neq 0$ (n ليست عدد صحيح)على احد حلول المعادلة والذي يكون بالشكل: $y=AJ_n(x)$

حيث A ثابت اختياري حيث ان

$$\boxed{J_n(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(\frac{x}{2})^{2r+n}}{r!\,\Gamma(r+n+1)}}$$

$J_n(x)$ تسمى دالة بيسل من النوع الاول والرتبة n .

اما في حالة الجذر الثاني $-n$ نحصل على الحل الثاني والذي يكون بالشكل :

$$J_{-n}(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(\frac{x}{2})^{2r-n}}{r!\,\Gamma(r-n+1)}$$

الحل العام للمعادلة (١) في حالة n ليست عدد صحيح و $n\neq 0$.

$$y=AJ_n(x)+BJ_{-n}(x)$$

حيث A,B ثابت اختياري.

وفي حالة $n=0$ او عدد صحيح فان الحلول تساوي:

$y=AJ_n(x)$ والحل الثاني $y=BY_n(x)$.

حيث ان $Y_n(x)$ تسمى دالة بيسل من النوع الثاني والرتبة n وتعطى بالصيغة:

$$Y_n(x)=\frac{J_n(x)\cos(n\pi)-J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)}.$$

وبهذا يكون الحل العام $y=AJ_n(x)+BY_n(x)$.

<u>ملاحظة:</u> اذا كانت n عدد صحيح موجب فان $J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x)$.

<u>البرهان:</u>

$$J_{-n}(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(\frac{x}{2})^{2r-n}}{r!\,\Gamma(r-n+1)}$$

$$=\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(-1)^r(\frac{x}{2})^{2r-n}}{r!\,\Gamma(r-n+1)}+\sum_{r=n}^{\infty}\frac{(-1)^r(\frac{x}{2})^{2r-n}}{r!\,\Gamma(r-n+1)}$$

$$r-(n-1)\leq 0\Rightarrow\Gamma(r-n+1)=\infty\Rightarrow\frac{1}{\Gamma(r-n+1)}=0$$

في المجموع الاول $r\leq n-1$

$$J_{-n}(x)=\underset{r=r+n\to r+n=n\to r=0}{\sum_{r=n}^{\infty}}\frac{(-1)^r(\frac{x}{2})^{2r-n}}{r!\,\Gamma(r-n+1)}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r+n}(\frac{x}{2})^{2(r+n)-n}}{\underbrace{(r+n)!}_{\Gamma(r+n+1)}\,\underbrace{\Gamma(r+n-n+1)}_{\Gamma(r+1)=r!}}$$

$$J_{-n}(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(-1)^n(\frac{x}{2})^{2r+n}}{r!\,\Gamma(r+n+1)}=(-1)^nJ_n(x).$$

<u>الصيغ التكرارية لدالة بيسل:</u> في هذا الموضوع سوف نشتق العلاقات التكرارية بدوال بيسل $J_n(x)$ ومشتقاتها:

$$J_n(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(\frac{x}{2})^{2r+n}}{r!\,\Gamma(r+n+1)}$$

$$J_n'(x)\ =\sum_{r=0}^{\infty}\ \frac{(-1)^r(\frac{2r+n}{2})(\frac{x}{2})^{2r+n-1}}{r!\,\Gamma(r+n+1)}\ ...(*)\qquad (\frac{2r+n}{2}=r+\frac{n}{2}).$$

$$J_n'(x)\ =\sum_{r=0}^{\infty}\ \frac{(-1)^r(r+\frac{n}{2})(\frac{x}{2})^{2r+n-1}}{r!\,\Gamma(r+n+1)}$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}\ \frac{r(-1)^r(\frac{x}{2})^{2r+n-1}}{\underbrace{r\ \ !}_{r(r-1)!}\,\Gamma(r+n+1)}+\sum_{r=0}^{\infty}(\frac{n}{2})\frac{(-1)^r(\frac{x}{2})^{2r+n-1}}{r!\,\Gamma(r+n+1)}$$

$$=\sum_{\underbrace{r=1}_{r=r+1}}^{\infty}\ \frac{(-1)^r(\frac{x}{2})^{2r+n-1}}{(r-1)!\,\Gamma(r+n+1)}+\frac{n}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\ \frac{(-1)^r(\frac{x}{2})^{2r+n-1}}{r!\,\Gamma(r+n+1)}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\ \frac{(-1)^{r+1}(\frac{x}{2})^{2r+n+1}}{r!\,\Gamma(r+n+1+1)}+\frac{n}{x}\sum_{r=0}^{\infty}\ \frac{(-1)^r(\frac{x}{2})^{2r+n}}{r!\,\Gamma(r+n+1)}$$

$$J_n'(x)\ =-\sum_{r=0}^{\infty}\ \frac{(-1)^r(\frac{x}{2})^{2r+(n+1)}}{r!\,\Gamma(r+(n+1)+1)}+\frac{n}{x}J_n(x)$$

$$J_n'(x)\ =-J_{n+1}(x)+\frac{n}{x}J_n(x)\quad ....\ (1)$$

من معادلة (*) نحصل على

$$J_n'(x)\ =\sum_{r=0}^{\infty}\ \frac{(-1)^r(\frac{2r+n}{2})(\frac{x}{2})^{2r+n-1}}{r!\,\Gamma(r+n+1)}\ ...(*)$$

$$J_n'(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (\overbrace{\frac{2r+n}{2}}^{\frac{r}{2}+\frac{r+n}{2}})(\frac{x}{2})^{2r+n-1}}{r!\,\Gamma(r+n+1)} \quad ...(*)$$

$$J_n'(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (\frac{r}{2}+\frac{r+n}{2}) \frac{(-1)^r (\frac{x}{2})^{2r+n-1}}{r!\,\Gamma(r+n+1)}$$

$$J_n'(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r}{2} \frac{(-1)^r (\frac{x}{2})^{2r+n-1}}{\underbrace{r!}_{r(r-1)!}\ \Gamma(r+n+1)} + \sum_{r=0}^{\infty} (\frac{r+n}{2}) \frac{(-1)^r (\frac{x}{2})^{2r+n-1}}{r!\,\underbrace{\Gamma(r+n+1)}_{(r+n)\Gamma(r+n)}}$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{r=1}^{\infty}}_{r=r+1} \frac{\overbrace{(-1)^r}^{-(-1)^r} (\frac{x}{2})^{2r+n-1}}{(r-1)!\,\Gamma(r+n+1)} + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (\frac{x}{2})^{2r+n-1}}{r!\,\Gamma(r+n)}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (\frac{x}{2})^{2r+(n+1)}}{r!\,\Gamma(r+(n+1)+1)} + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (\frac{x}{2})^{2r+(n-1)}}{r!\,\Gamma(r+(n-1)+1)}$$

$$J_n'(x) = -\frac{1}{2} J_{n+1}(x) + \frac{1}{2} J_{n-1}(x) \quad .... (2)$$

من معادلة (١)و(٢) نحصل على

$$J_n'(x) = -J_{n+1}(x) + \frac{n}{x} J_n(x) \quad .... (1)$$

$$-2J_n'(x) = J_{n+1}(x) - J_{n-1}(x) \quad .... (2)$$

$$\overline{\hspace{20em}}+$$

$$-J_n'(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x)$$

$$J_n'(x) = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x) \quad .... (3)$$

كذلك من (١) و(٢) نحصل على

$$J_n'(x) = -J_{n+1}(x) + \frac{n}{x} J_n(x) \quad .... (1)$$

$$-2J_n'(x) = J_{n+1}(x) - J_{n-1}(x) \quad .... (2)$$

$$J_n'(x) = -J_{n+1}(x) + \frac{n}{x} J_n(x) \quad .... \ (1)$$

$$-J_n'(x) = \frac{1}{2} J_{n+1}(x) - \frac{1}{2} J_{n-1}(x) \quad .... \ (2)$$

+

$$0 = -\frac{1}{2} J_{n+1}(x) - \frac{1}{2} J_{n-1}(x) + \frac{n}{x} J_n(x)$$

$$\frac{2n}{x} J_n(x) = J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x) \quad .... \ (4)$$

من معادلة (٣) نضربها في x^n

$$J_n'(x) = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x)$$

$$x^n J_n'(x) = x^n J_{n-1}(x) - n x^{n-1} J_n(x)$$

$$x^n J_n'(x) + n x^{n-1} J_n(x) = x^n J_{n-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x) \right] = x^n J_{n-1}(x) \quad ... \ (5)$$

$$\int x^n J_{n-1}(x)\, dx = \int \frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x) \right] dx + c$$

$$\int x^n J_{n-1}(x)\, dx = x^n J_n(x) + c \quad ... \ (6)$$

بضرب طرفي المعادلة (١) في x^{-n} نحصل على

$$J_n'(x) = -J_{n+1}(x) + \frac{n}{x} J_n(x)$$

$$x^{-n} J_n'(x) = -x^{-n} J_{n+1}(x) + n x^{-n-1} J_n(x)$$

$$x^{-n} J_n'(x) - n x^{-n-1} J_n(x) = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-n} J_n(x) \right] = -x^{-n} J_{n+1}(x) \quad ... \ (7)$$

$$\int x^{-n} J_{n+1}(x)\, dx = -x^{-n} J_n(x) + c \quad ...(8)$$

امثلة:

١) جد $J_3(x)$ **بدلالة** $J_0(x), J_1(x)$.

من العلاقة التكرارية (٤)

$$\frac{2n}{x}J_n(x) = J_{n+1}(x)+J_{n-1}(x)$$
$$n=1 \Rightarrow \frac{2}{x}J_1(x) = J_2(x)+J_0(x) \quad .... \ (1)$$
$$n=2 \Rightarrow \frac{4}{x}J_2(x) = J_3(x)+J_1(x) \quad .... \ (2)$$

من (٢) نحصل على

$$J_3(x)=\frac{4}{x}J_2(x)-J_1(x) \ ... \ (3)$$

من (١) نحصل على

$$J_2(x)=\frac{2}{x}J_1(x)-J_0(x) \ ... \ (4)$$

بتعويض (٤) في(٣) نحصل على

$$J_3(x)=\frac{4}{x}\left(\frac{2}{x}J_1(x)-J_0(x)\right)-J_1(x)$$
$$=\frac{8}{x^2}J_1(x)-\frac{4}{x}J_0(x)-J_1(x)$$
$$=\left(\frac{8-x^2}{x^2}\right)J_1(x)-\frac{4}{x}J_0(x)$$

٢) جد تكامل $\int x^4 J_1(x)dx$.

$$\int x^4 J_1(x)dx$$
$$u=x^2 \qquad dv=x^2 J_1(x)dx$$
$$du=2xdx \qquad v=x^2 J_2(x) \quad , \ \left(\int x^n J_{n-1}(x)\,dx = x^n J_n(x)+c \ \right) ... \ (6)$$
$$\int x^4 J_1(x)dx = x^4 J_2(x) - 2\int \overbrace{x^3 J_2(x)}^{(6)}dx$$
$$= x^4 J_2(x) - 2x^3 J_3(x) + c$$

٣) اثبت ان

$$\int_0^2 x^3 J_0(x)dx = 8J_0(2)$$

$$u = x^2 \qquad dv = xJ_0(x)dx \qquad (\int udv = u.v - \int v\,du)$$

$$du = 2xdx \qquad v = xJ_1(x) \quad , \; (\int x^n J_{n-1}(x)\,dx = x^n J_n(x) + c \;)\ldots (6)$$

$$\int_0^2 x^3 J_0(x)dx = x^3 J_1(x)\Big|_0^2 - 2\int_0^2 x^2 J_1(x)dx$$

$$= x^3 J_1(x)\Big|_0^2 - 2[x^2 J_2(x)]_0^2$$

$$= 8J_1(2) - 8J_2(2) = 8(J_1(2) - J_2(2))\ldots(*)$$

من العلاقة (٤)

$$\frac{2n}{x} J_n(x) \; = J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x)$$

$$n = 1, x = 2$$

$$\frac{2}{2} J_1(2) = J_2(2) + J_0(2) \Rightarrow J_0(2) = J_1(2) - J_2(2)$$

نعوض في معادلة (*) نحصل

$$\int_0^2 x^3 J_0(x)dx = 8J_0(2)$$

٤) اثبت ان

$$\int J_1(\sqrt[3]{x})dx = 6\sqrt[3]{x} J_1(\sqrt[3]{x}) - 3\sqrt[3]{x^2} J_0(\sqrt[3]{x}) + c.$$

$$\sqrt[3]{x} = y \Rightarrow x = y^3 \Rightarrow dx = 3y^2 dy.$$

$$\int J_1(\sqrt[3]{x})dx = \int J_1(y)\,3y^2 dy = 3y^2 J_2(y) + c$$

$$\frac{2n}{y} J_n(y) \; = J_{n+1}(y) + J_{n-1}(y)$$

$$\frac{2}{y} J_1(y) \; = J_2(y) + J_0(y)$$

$$J_2(y) = \frac{2}{y} J_1(y) - J_0(y)$$

$$\int J_1(\sqrt[3]{x})dx = \quad 3y^2[\frac{2}{y} J_1(y) - J_0(y)] + c$$

$$= 6yJ_1(y) - 3y^2 J_0(y) + c.$$

$$\int J_1(\sqrt[3]{x})dx = 6\sqrt[3]{x} J_1(\sqrt[3]{x}) - 3\sqrt[3]{x^2} J_0(\sqrt[3]{x}) + c$$

نتيجة:

$$1)\; J_{\frac{1}{2}}(x) \; = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\sin x$$

$$2)\; J_{-\frac{1}{2}}(x) \; = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\cos x \quad (H.W)$$

برهان (١):

$$J_n(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(\frac{x}{2})^{2r+n}}{r!\ \Gamma(r+n+1)}$$

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(\frac{x}{2})^{2r+\frac{1}{2}}}{r!\ \Gamma(r+\frac{1}{2}+1)}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(\frac{x}{2})^{2r+\frac{1}{2}}}{r!\ \Gamma(\frac{2r+3}{2})}$$

$$\Gamma(\frac{2r+3}{2})=\frac{2r+1}{2}.\frac{2r-1}{2}...\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\sqrt{\pi}\qquad,(\Gamma(n+1)=n\Gamma(n))$$

$$=\frac{2r+1}{2}.\frac{2r-1}{2}...\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\sqrt{\pi}.\frac{2.4...(2r-2)(2r)}{2.4...(2r-2)(2r)}$$

$$=\frac{(2r+1)!\sqrt{\pi}}{2^{r+1}}.\frac{1}{2(1).2(2).2(3).2(4)........2(r)}$$

$$=\frac{(2r+1)!\sqrt{\pi}}{2^{r+1}r!2^r}=\frac{(2r+1)!\sqrt{\pi}}{2^{2r+1}r!}$$

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(\frac{x}{2})^{2r+\frac{1}{2}}}{r!\ \Gamma(\frac{2r+3}{2})}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(\frac{x}{2})^{2r+\frac{1}{2}}}{r!\ \frac{(2r+1)!\sqrt{\pi}}{2^{2r+1}r!}}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r2^{2r+1}(\frac{x}{2})^{2r+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}(2r+1)!}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r2^{2r+1}(x)^{2r+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}\,2^{2r+\frac{1}{2}}(2r+1)!}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(x)^{2r+1}}{(2r+1)!}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \sin x.$$

مثال: جد $J_{\frac{3}{2}}(x),J_{\frac{5}{2}}(x),J_{\frac{-3}{2}}(x)$ بدلالة $\sin x,\ \cos x$.

$$\frac{2n}{x}J_n(x) = J_{n+1}(x)+J_{n-1}(x)$$

$$n=\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{1}{x}J_{\frac{1}{2}}(x) = J_{\frac{3}{2}}(x)+J_{-\frac{1}{2}}(x)$$

$$J_{\frac{3}{2}}(x)=\frac{1}{x}J_{\frac{1}{2}}(x)-J_{-\frac{1}{2}}(x)=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \sin x-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \cos x =$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}(\frac{1}{x}\sin x-\cos x).$$

$$\frac{2n}{x}J_n(x) = J_{n+1}(x)+J_{n-1}(x)$$

$$n=\frac{3}{2}\Rightarrow \frac{3}{x}J_{\frac{3}{2}}(x) = J_{\frac{5}{2}}(x)+J_{\frac{1}{2}}(x)$$

$$J_{\frac{5}{2}}(x)=\frac{3}{x}J_{\frac{3}{2}}(x)-J_{\frac{1}{2}}(x)=\frac{3}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}(\frac{1}{x}\sin x-\cos x)-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \sin x.$$

$$\frac{2n}{x}J_n(x) = J_{n+1}(x)+J_{n-1}(x)$$

$$n=-\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{-1}{x}J_{-\frac{1}{2}}(x) = J_{\frac{1}{2}}(x)+J_{\frac{-3}{2}}(x)$$

$$J_{\frac{-3}{2}}(x)=\frac{-1}{x}J_{-\frac{1}{2}}(x)-J_{\frac{1}{2}}(x)=\frac{-1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \sin x.$$

<u>الدالة المولدة لدالة بيسل:</u>

تسمى الدالة $g(x,t)=e^{\frac{x}{2}(t-t^{-1})}$ بالدالة المولدة لدالة بيسل والتي يمكن كتابتها بشكل متسلسلة تعتمد على دالة بيسل:

$$g(x,t)=e^{\frac{x}{2}(t-t^{-1})}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n$$

تسمى المعادلة اعلاه بالمعادلة المولدة لدالة بيسل.

<u>ملاحظة:</u>

$$e^{\frac{x}{2}(t-t^{-1})}=J_0+J_1t+J_2t^2+\ldots+J_{-1}t^{-1}+J_{-2}t^{-2}+J_{-3}t^{-3}\ldots$$

$$\overset{J_{-n}=(-1)^nJ_n}{=}J_0+J_1t+J_2t^2+\ldots.\quad -J_1\quad t^{-1}+J_2t^{-2}-J_3t^{-3}+J_4t^{-4}-\ldots$$

$$=J_0+(t-t^{-1})J_1+(t^2+t^{-2})J_2+(t^3-t^{-3})J_3+\ldots\ (*)$$

$$t = e^{i\theta} \Rightarrow t^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$
$$t^{-n} = e^{-in\theta} = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta)$$
$$\overline{}\ +$$
$$t^n + t^{-n} = 2\cos(n\theta).$$

اما بالطرح نحصل على

$$t^n - t^{-n} = 2i\sin(n\theta).$$

نعوض في (*) نحصل :

$$e^{\frac{x}{2}(2i\sin(\theta))} = J_0 + 2i\sin(\theta)J_1 + 2\cos(2\theta)J_2 + 2i\sin(3\theta)J_3 + 2\cos(4\theta)J_4 + \ldots$$

$$e^{x(i\sin(\theta))} = J_0 + 2\cos(2\theta)J_2 + 2\cos(4\theta)J_4 + \ldots + i(2\sin(\theta)J_1 + 2\sin(3\theta)J_3 + \ldots.)$$

$$\cos(x\sin\theta) + i\sin(x\sin\theta) = J_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\cos 2k\theta\, J_{2k} + i\,2\sum_{k=1}^{\infty}\sin(2k-1)\theta\, J_{2k-1}$$

$$\cos(x\sin\theta) = J_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\cos 2k\theta\, J_{2k} \qquad \ldots. \quad (1)$$

$$\sin(x\sin\theta) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\sin(2k-1)\theta\, J_{2k-1} \quad \ldots. \quad (2)$$

اذا ضربنا معادلة (١) في $\cos(n\theta)$ واجراء التكامل من $0 \to \pi$

اذا ضربنا معادلة (٢) في $\sin(n\theta)$ واجراء التكامل من $0 \to \pi$ نحصل على :

$$\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta)\cos(n\theta)\,d\theta = \int_0^{\pi} J_0\cos(n\theta)d\theta + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}\int_0^{\pi}\cos 2k\theta\cos n\theta\,d\theta \quad \ldots \quad (3)$$

$$\int_0^{\pi}\sin(x\sin\theta)\sin(n\theta)\,d\theta = 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}\int_0^{\pi}\sin(2k-1)\theta\sin n\theta\,d\theta \quad \ldots \quad (4)$$

باستخدام العلاقات التالية:

$$\int_0^{\pi} \cos(m\theta)\cos(n\theta)\,d\theta = \begin{cases} 0 & ; n \neq m \\ \dfrac{\pi}{2} & ; \ n = m \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \sin(m\theta)\sin(n\theta)\,d\theta = \begin{cases} 0 & ; n \neq m \\ \dfrac{\pi}{2} & ; \ n = m \neq 0 \end{cases}$$

وتطبيقها على المعادلتين (٣)و(٤) نحصل على:

$$\int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(x\sin\theta)\,d\theta = \begin{cases} \pi J_n & ; n \ is\, even \\ 0 & ; \ n\, is\ odd \end{cases} \quad ...\ (5)$$

$$\int_0^{\pi} \sin(n\theta)\sin(x\sin\theta)\,d\theta = \begin{cases} 0 & ; n \ is\, even \\ \pi J_n & ; \ n\, is\ odd \end{cases} \quad ...(6)$$

اذا كان n عدد فردي او زوجي او صفر فان :

$$\int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(x\sin\theta)\,d\theta + \int_0^{\pi} \sin(n\theta)\sin(x\sin\theta)\,d\theta = \pi J_n$$

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\cos(n\theta)\cos(x\sin\theta) + sin(n\theta)\sin(x\sin\theta)]d\theta$$

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - x\sin\theta)d\theta \ ; \ n = 0,1,2,...$$

وعندما $n = 0$ فان

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)d\theta$$

وعند الحصول على المشتقة

$$J_n'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(n\theta - x\sin\theta)\, sin(\theta)d\theta$$

وهكذا بالنسبة للمشتقات العليا.

<u>مثال :</u>باستخدام الدالة المولة لدالة بيسل اثبت العلاقة التكرارية $\frac{2n}{x}J_n(x) \ = J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x)$

<u>الحل:</u> نشتق المعادلة المولدة لدالة بيسل بالنسبة لـ t نحصل على:

$$e^{\frac{x}{2}(t-t^{-1})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\,t^n \Rightarrow e^{\frac{x}{2}(t-t^{-1})}(\frac{x}{2}(1+\frac{1}{t^2})) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)n\,t^{n-1}$$

$$\Rightarrow (\frac{x}{2}(1+\frac{1}{t^2}))\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\,t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)n\,t^{\overset{n-1=n}{n-1}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)(t^n + t^{\overset{n-2=n}{n-2}}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{n+1}(x)(n+1)\,t^n$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2}[\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{n+2}(x)t^n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{n+1}(x)(n+1)\,t^n$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2}[\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n(J_n(x)+J_{n+2}(x))] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{n+1}(x)(n+1)\,t^n$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2}[J_n(x)+J_{n+2}(x)] = (n+1)J_{n+1}(x)$$

$$\Rightarrow J_n(x)+J_{n+2}(x) = \frac{2(n+1)}{x}J_{n+1}(x) \qquad (n=n-1)$$

$$\Rightarrow J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x)$$

<u>دوال بيسل المعدلة:</u> تعرف دالة بيسل المعدلة من النوع الاول والرتبة n بالصيغة:

$I_n(x) = i^{-n}J_n(ix)$

حيث دالة بيسل المعدلة هي حل للمعادلة التفاضلية:

$x^2y'' + xy' - (x^2+n^2) = 0$

ويمكن كتابة دالة بيسل المعدلة بصيغة المتسلسلات كالتالي:

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(\frac{x}{2})^{2r+n}}{r!\,\Gamma(r+n+1)}$$

$$I_n(x) = i^{-n}J_n(ix) = i^{-n}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(\frac{ix}{2})^{2r+n}}{r!\,\Gamma(r+n+1)}$$

$$= i^{-n}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\overbrace{\underbrace{(-1)^r\quad(i)^{2r}}_{((i)^2)^r=(-1)^r}}^{(-1)^{2r}=1}\quad(i)^n(\frac{x}{2})^{2r+n}}{r!\,\Gamma(r+n+1)}$$

$$= i^{-n}i^n\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^{2r+n}}{r!\,\Gamma(r+n+1)}$$

اذن دالة بيسل المعدلة هي $$I_n(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^{2r+n}}{r!\,\Gamma(r+n+1)}$$

ملاحظة: في حالة ى عدد صحيح موجب فان $I_n(x)=I_{-n}(x)$

البرهان:

$$I_{-n}(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^{2r-n}}{r!\,\Gamma(r-n+1)}$$

$$=\overbrace{\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(\frac{x}{2})^{2r-n}}{r!\,\Gamma(r-n+1)}}^{\frac{1}{\infty}=0}+\sum_{r=n}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^{2r-n}}{r!\,\Gamma(r-n+1)}$$

في المجموع الاول $$r\le n-1\Rightarrow r-n+1\le 0\Rightarrow \Gamma(r-n+1)=\infty.$$

$$I_{-n}(x)=\sum_{r=n}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^{2r-n}}{r!\,\Gamma(r-n+1)}$$

$$I_{-n}(x)=\sum_{\substack{r=n\\ r=r+n}}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^{2r-n}}{(r+n)!\,\Gamma(r-n+1)}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^{2(r+n)-n}}{\underbrace{(r+n)!}_{\Gamma(r+n+1)}\,\underbrace{\Gamma(r+n-n+1)}_{\Gamma(r+1)}}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^{2r+n}}{r!\,\Gamma(r+n+1)}=I_n(x)$$

العلاقات التكرارية لداوال بيسل المعدلة:

يمكن الحصول على العلاقات التكرارية لدوال بيسل المعدلة $I_n(x)$ من العلاقات التكرارية لدوال بيسل $J_n(x)$ مثلا:

$$\frac{2n}{x}J_n(x)\ =J_{n+1}(x)+J_{n-1}(x)$$

بابدال $x\rightarrow ix$ نحصل على

$$\frac{2n}{ix}J_n(ix) \ = J_{n+1}(ix)+J_{n-1}(ix)$$

$$I_n(x)=i^{-n}J_n(ix)\Rightarrow J_n(ix)=i^n I_n(x).$$

$$[\frac{2n}{x}i^{n-1}I_n(x) \ = i^{n+1}I_{n+1}(x)+i^{n-1}I_{n-1}(x)](\frac{1}{i^{n-1}})$$

$$\frac{2n}{x}I_n(x) \ = i^2 I_{n+1}(x)+I_{n-1}(x)\Rightarrow \frac{2n}{x}I_n(x) \ = -I_{n+1}(x)+I_{n-1}(x)...(1)$$

من العلاقة التكرارية

$$J_n'(x) \ = -\frac{1}{2}J_{n+1}(x)+\frac{1}{2}J_{n-1}(x)...(1)$$

بابدال $x \to ix$ نحصل

$$J_n'(ix) \ = -\frac{1}{2}J_{n+1}(ix)+\frac{1}{2}J_{n-1}(ix)$$

$$J_n(ix) \ = i^n I_n(x)\Rightarrow i\,J_n'(ix)=i^n I_n'(x)$$

$$J_n'(ix)=i^{n-1}I_n'(x)$$

$$[i^{n-1}I_n'(x)=-\frac{1}{2}i^{n+1}I_{n+1}(x)+\frac{1}{2}i^{n-1}I_{n-1}(x)]\frac{1}{i^{n-1}}$$

$$I_n'(x)=-\frac{1}{2}i^2 I_{n+1}(x)+\frac{1}{2}I_{n-1}(x)$$

$$I_n'(x)=\frac{1}{2}I_{n+1}(x)+\frac{1}{2}I_{n-1}(x)....(2)$$

<u>تمرين</u> : برهن العلاقات التكرارية لدوال بيسل المعدلة الباقية.

<u>تمرين</u>:١- باستخدام العلاقات التكرارية اثبت

$$1)\ J_2(x)=J_0(x)+2J_2''(x).$$

$$2)\ J_3(x)=-3J_0'(x)-4J_0'''(x).$$

٢- باستخدام العلاقة $2J_n'(x) \ = J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)$ برهن ان

$$\int J_0(x)dx=2[J_1(x)+J_3(x)+J_5(x)+...]$$

الفصل الثالث **دوال ليجندر:Legender Function**

المعادلة التفاضلية

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0 \quad ... \quad (1)$$

تسمى معادلة ليجندر التفاضلية حيث n يساوي صفر او عدد صحيح موجب.

حل هذه المعادلة بطريقة المتسلسلات يعطينا احد الحلول $y=AP_n(x)$

حيث ان $P_n(x)$ تمثل متعددة حدود ليجندرمن الدرجة n وتعطى بالعلاقة التالية

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k(2n-2k)!\,x^{n-2k}}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} \quad ... \quad (2)$$

حيث ان

$N=\frac{n}{2}$ عندما n عدد زوجي

$N=\frac{n-1}{2}$ عندما n عدد فردي

من العلاقة (٢) يمكن الحصول على

$$P_0(x)=1,\ P_1(x)=x, P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1), P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x).$$

ملاحظة: هناك صيغة اخرى لمتعددة حدود ليجندر هي $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$

التي تسمى **صيغة رود ريج لمتعددات حدود ليجندر.**

مثال: جد $P_2(x), P_3(x)$ باستخدام صيغة رود ريج

الحل:

$$\begin{aligned}P_2(x)&=\frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2\\ &=\frac{1}{8}\frac{d^2}{dx^2}(x^4-2x^2+1)\\ &=\frac{1}{8}\frac{d}{dx}(4x^3-4x)=\frac{1}{2}(3x^2-1).\end{aligned}$$

؟؟ $P_3(x)$ (H.W).

الدالة المولدة لدالة ليجندر: الدالة $(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}$ تسمى الدالة المولدة لمعادلة ليجندر والتي يمكن كتابتها بالشكل :

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,t^n \quad \dots \ (3)$$

تمثل المعادلة اعلاه المعادلة المولدة لمعادلة ليجندر.

<u>ملاحظة:</u> اذا وضعنا $x=1$ في (٣) يكون لدينا

$$(1-2t+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)\,t^n$$

$$((1-t)^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)\,t^n \Rightarrow \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)\,t^n$$

$$\because \frac{1}{1-t} = 1+t+t^2+\dots = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

$$\frac{1}{1+t} = 1-t+t^2-t^3\dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\,t^n$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} 1\,t^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)\,t^n \Rightarrow P_n(1)=1.$$

الان نضع $x=-1$ في(٣)

$$(1+2t+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1)\,t^n$$

$$(1+t)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1)\,t^n \Rightarrow \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1)\,t^n$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\,t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \overbrace{P_n(-1)}\,t^n \Rightarrow P_n(-1) = (-1)^n = \begin{cases} 1 & n=0 \ \ or\ is\, even \\ -1 & n\ is\ odd \end{cases}$$

<u>ملاحظة:</u> ١) لمعرفة ان دالة ليجندر فردية او زوجية نستخدم(٣) وذلك بوضع $x=-x, t=-t$ فنحصل على

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-x)(-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n P_n(-x)\ t^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\ t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \overbrace{(-1)^n\,P_n(-x)}\,t^n \Rightarrow P_n(x) = (-1)^n\,P_n(-x)$$

$$P_n(-x) = (-1)^n\,P_n(x)$$

وبذلك تعتمد على قيمة n فردية او زوجية.

اذا كانت n فردية فان دالة ليجندر دالة فردية و اذا كانت n زوجية فان دالة ليجندر دالة زوجية.

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2-\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+...+\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}x^n+... \quad (٢$$

اذا وضعنا $x=0$ في (٣) نحصل على

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n \quad ... \ (3)$$

$$(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(0)t^n$$

$$1-\frac{1}{2}t^2+\frac{1.3}{2.4}t^4-\frac{1.3.5}{2.4.6}t^6+...+\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}t^{2n}+...=$$

$$P_0(0)t^0+P_1(0)t^1+P_2(0)t^2+...+P_n(0)t^n+...$$

$$\therefore P_1(0)=0, P_3(0)=0,\ ...,P_{2n+1}(0)=0$$

$$P_0(0)=1,\ P_2(0)=-\frac{1}{2},\ P_4(0)=\frac{1.3}{2.4},\ P_6(0)=-\frac{1.3.5}{2.4.6},...,P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}$$

خاصية التعامد لدالة ليجندر في الفترة $(-1,1)$

ان الدالة ليجندر $P_n(x)$ تكون متعامدة في الفترة $(-1,1)$ كالدوال المثلثية $\sin(mx), \cos(mx)$ وكالاتي:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0 & : n \neq m \;...\; (1) \\ \dfrac{2}{2n+1} & : n = m \;...\; (2) \end{cases}$$

برهان (١)

بما ان $P_n(x)$ هو حل للمعدلة ليجندر التفاضلية فعليه يمكن كتابة المعادلة بالشكل الاتي:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$$

$$(1-x^2)\frac{d^2P_n(x)}{dx^2} - 2x\frac{dP_n(x)}{dx} + n(n+1)P_n(x) = 0$$

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{dP_n(x)}{dx}] + n(n+1)P_n(x) = 0$$

بضرب طرفي المعادلة $P_m(x)$ واجراء التكامل ل x من ١- لـ ١

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{dP_n(x)}{dx}]dx + n(n+1)\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0$$

$$u = P_m(x) \quad , \qquad dv = \frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{dP_n(x)}{dx}]dx$$

$$du = P'_m(x)dx \quad , \quad v = (1-x^2)\frac{dP_n(x)}{dx} . \qquad where \; (\frac{dP_n(x)}{dx} = P'_n(x))$$

$$[\overbrace{P_m(x)(1-x^2)P'_n(x)}^{0}]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(1-x^2)P'_m(x)P'_n(x)dx + n(n+1)\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0$$

$$-\int_{-1}^{1}(1-x^2)P'_m(x)P'_n(x)dx + n(n+1)\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0 \quad ... (*)$$

بابدال $m \to n$ و $n \to m$

$$-\int_{-1}^{1}(1-x^2)P'_m(x)P'_n(x)dx + m(m+1)\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0 \quad ... (**)$$

وبطرح (*) من(**) نحصل على

$$[n(n+1)-m(m+1)]\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx=0$$

$$n(n+1)-m(m+1)=n^2+n-m^2-m=n^2-m^2+n-m$$
$$=(n-m)(n+m)+(n-m)=(n-m)(n+m+1).$$

$$(n-m)(n+m+1)\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx=0$$

$$if\ \ n\neq m \Rightarrow n-m\neq 0,\ n+m+1\neq 0 \rightarrow \int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx=0$$

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx=0 \quad if \quad n\neq m.$$

<u>برهان (٢):</u>

في حالة $n=m$ من المعادلة المولدة لدالة ليجندر فان

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

$$(1-2xt+t^2)^{-1}=(\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n)^2$$

$$(1-2xt+t^2)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} P_n(x)P_m(x)t^{n+m} \quad ,(n=m)$$

باجراء التكامل للطرفين من $1 \rightarrow -1$ نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\int P_n(x)P_m(x)t^{n+m}dx = \int_{-1}^{1} P_0 P dx + \int_{-1}^{1} P_0 P_1\, t dx + \int_{-1}^{1} P_0 P_2\, t^2 dx + \ldots$$

$$+ \int_{-1}^{1} P_1 P_0\, t dx + \int_{-1}^{1} P_1 P_1\, t^2 dx + \int_{-1}^{1} P_1 P_2\, t^3 dx + \ldots$$

$$+ \int_{-1}^{1} P_2 P_0\, t^2 dx + \int_{-1}^{1} P_2 P_1\, t^3 dx + \int_{-1}^{1} P_2 P_2\, t^4 dx + \ldots$$

كل تكامل فيه $n \neq m$ يساوي صفر

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-1}^{1} P^2{}_n(x)\; t^{2n} dx$$

$$\therefore \int_{-1}^{1}(1-2xt+t^2)^{-1}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-1}^{1}(P^2{}_n(x)\,dx)\,t^{2n}$$

$$\int_{-1}^{1}(1-2xt+t^2)^{-1}dx = \int_{-1}^{1}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}P_n(x)P_m(x)t^{n+m}\,dx$$

$$let\;\; y = 1-2xt+t^2 \rightarrow dy = -2tdx \rightarrow dx = \frac{dy}{-2t}$$

$$x = -1 \Rightarrow y = 1+2t+t^2 = (1+t)^2$$
$$x = 1 \Rightarrow y = 1-2t+t^2 = (1-t)^2$$

$$\int_{-1}^{1}(1-2xt+t^2)^{-1}dx = \int_{(1+t)^2}^{(1-t)^2}\frac{1}{y}\;\frac{dy}{-2t} = \frac{1}{2t}\int_{(1-t)^2}^{(1+t)^2}\frac{dy}{y}$$

$$= \frac{1}{2t}[\ln y]_{(1-t)^2}^{(1+t)^2} = \frac{1}{2t}[\ln(1+t)^2 - \ln(1-t)^2] = \frac{1}{2t}\ln(\frac{1+t}{1-t})^2$$

$$= \frac{1}{t}\ln[\frac{1+t}{1-t}] = \frac{1}{t}[\ln(1+t)-\ln(1-t)].$$

توضيح

$$\int \frac{dt}{1-t} = \int \sum t^n dt \qquad , \int \frac{dt}{1+t} = \int \sum (-1)^n t^n dt$$

$$-\ln(1-t) = \sum \frac{t^{n+1}}{n+1} \quad , \ \ln(1+t) = \sum (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

$$\frac{1}{t}[\ln(1+t)-\ln(1-t)] = \frac{1}{t}[\sum (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} + \sum \frac{t^{n+1}}{n+1}] = \frac{1}{t}[\sum \frac{t^{n+1}}{n+1} \overbrace{[(-1)^n + 1]}^{\begin{cases} 0 \ , & n \ odd \\ 2 \ , & n \ even \end{cases}}] =$$

$$= \frac{1}{t}[2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} t^{2n}.$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \overbrace{\frac{2}{2n+1}} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \overbrace{\int_{-1}^{1} (P^2{}_n(x)\, dx)} \ t^{2n} \Rightarrow \int_{-1}^{1} P^2{}_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \quad , n = m$$

مثال: اثبت ان $\int_{-1}^{1} x^m P_n(x) dx = 0$ في حالة $n+m$ عدد فردي.

الحل: بماان $n+m$ عدد فردي

اذن اما m عدد فردي و n عدد زوجي

x^m دالة فردية و $P_n(x)$ دالة زوجية اذن $x^m\, P_n(x)$ دالة فردية.

او m عدد زوجي و n عدد فردي

x^m دالة زوجية و $P_n(x)$ دالة فردية اذن $x^m\, P_n(x)$ دالة فردية اذن . $\int_{-1}^{1} x^m P_n(x) dx = 0$

مثال: استخدم صيغة رودريج لاثبات ان $n > m \ , \ \int_{-1}^{1} x^m P_n(x) dx = 0$.

$$\int_{-1}^{1} x^m P_n(x)dx = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} x^m \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx$$

$$u = x^m \quad , \qquad dv = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx$$

$$du = \frac{d}{dx}x^m \quad , \quad v = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n$$

$$\int_{-1}^{1} x^m P_n(x)dx = \frac{1}{2^n n!}[x^m \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n]_{-1}^{1} - \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n \frac{d}{dx}x^m$$

$$= -\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}x^m \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n$$

$$u = \frac{d}{dx}x^m \qquad , \quad dv = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n$$

$$du = \frac{d^2}{dx^2}x^m \quad , \quad v = \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^2-1)^n$$

$$\int_{-1}^{1} x^m P_n(x)dx = \frac{-1}{2^n n!}[\frac{d}{dx}x^m \frac{d^{n-2}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n]_{-1}^{1} + \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} \frac{d^2}{dx^2}x^m \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^2-1)^n$$

$$= \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} \frac{d^2}{dx^2}x^m \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^2-1)^n \ .$$

بعد n من التكاملات نحصل على

$$\int_{-1}^{1} x^m P_n(x)dx = (-1)^n \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}x^m (x^2-1)^n$$

بما ان $n > m \Leftarrow$ $\int_{-1}^{1} x^m P_n(x)dx = 0$.

مثال: باستخدام الدالة المولدة لدالة ليجندر اثبت ان: $xP_n^{'}(x)-P_{n-1}^{'}(x)=nP_n(x)$

الحل:

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0q}^{\infty z}P_n(x)t^{n`}...(1)$$

باشتقاق المعادلة بالنسبة لـ x

$$-\frac{1}{2}(1-2xt+t^2)^{-\frac{3}{2}}(-2t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{'}(x)t^n$$

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{3}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{'}(x)t^{n-1}...\ (2)$$

باشتقاق (١) بالنسبة لـ t نحصل على

$$-\frac{1}{2}(1-2xt+t^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x+2t)=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1}$$

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{3}{2}}(x-t)=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1}...\ (3)$$

وبتعويض (٢) في (٣) نحصل على

$$(x-t)\sum_{n=1}^{\infty}P_n^{'}(x)t^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}xP_n^{'}(x)t^{n-1}-\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}P_n^{'}(x)t^n}_{n=n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1}$$

نضع كل $n-1=n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} xP_n'(x)t^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} P_{n-1}'(x)t^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}$$

$$\overbrace{xP_1'(x)}^{x} + \sum_{n=2}^{\infty} xP_n'(x)t^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} P_{n-1}'(x)t^{n-1} = \overset{x}{P_1(x)} + \sum_{n=2}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} xP_n'(x)t^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} P_{n-1}'(x)t^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} [xP_n'(x) - P_{n-1}'(x)]t^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}$$

$$xP_n'(x) - P_{n-1}'(x) = nP_n(x)$$

نتيجة: اذا كانت $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$ فان $a_n = \dfrac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} F(x)P_n(x)dx$.

البرهان: بما ان $F(x) = a_0P_0(x) + a_1P_1(x) + \ldots + a_nP_n(x) + \ldots$

بضرب طرفي المعادلة في $P_n(x)$ واجراء التكامل من ١- الى ١ بالنسبة لـ x نحصل على

$$\int_{-1}^{1} F(x)P_n(x)dx = a_0 \underbrace{\int_{-1}^{1} P_0(x)P_n(x)dx}_{0} + a_1 \underbrace{\int_{-1}^{1} P_1(x)P_n(x)dx}_{0} + \ldots + a_n \underbrace{\int_{-1}^{1} P_n(x)P_n(x)dx}_{\frac{2}{2n+1}} + \ldots$$

وحسب خاصية التعامد لدوال ليجندر نحصل على

$$\int_{-1}^{1} F(x)P_n(x)dx = a_n \frac{2}{2n+1} \Rightarrow a_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} F(x)P_n(x)dx$$

مثال: اكتب الدالة x^2 بشكل متسلسلة تتضمن حدودها دوال ليجندر.

$$F(x) = a_0P_0(x) + a_1P_1(x) + \ldots + a_nP_n(x) + \ldots$$

$$P_0 = 1,\ P_1 = x,\ P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$a_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} F(x)P_n(x)dx$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} F(x)P_0(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} F(x)P_0(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

$$a_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} F(x)P_1(x)dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^2 \overset{x}{P_1(x)}\, dx = 0$$

$$a_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} x^2 \overset{\frac{1}{2}(3x^2-1)}{P_2(x)}\, dx = \frac{2}{3}.$$

$$a_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 P_n(x)dx = 0 \quad \forall \;\; n \geq 3.$$

$$x^2 = \frac{1}{3}P_0(x) + 0.P_0(x) + \frac{2}{3}P_0(x) + 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3}P_0(x) + \frac{2}{3}P_0(x)$$

<u>تمرين: ١)</u> اثبت ان $3x^2 - 4x + 5 = 6P_0(x) - 4P_1(x) + 2P_2(x)$.

٢) استخدم صيغة رودريج لبرهان العلاقة $P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$

ثم استنتج ان $\int_{-1}^{1} P_n(x)dx = \frac{1}{2n+1}[P_{n-1}(1) - P_{n+1}(1)]$.

الفصل الرابع : تحويل لابلاس (Laplace Transformation):

لتكن f دالة معرفة لجميع قيم t الموجبة فان تحول لابلاس للدالة $f(t)$ ويرمز له بالرمز $L\{f(t)\}$ يعرف كالاتي:

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \bar{f}(s).$$

بشرط ان يكون التكامل متقارب.

تحول لابلاس يغير الدالة $f(t)$ الى حالة اخرى بدلالة s يسمى وسيط التحول وهذا المتغير يمكن ان يكون حقيقيا او عقديا.

تحول لابلاس لبعض الدوال الاولية:

١- اذا كانت $f(t)=k$ حيث k ثابت فان

$$L\{k\} = \int_0^\infty k\,e^{-st}dt = \frac{k}{-s}\int_0^\infty -s\,e^{-st}dt = \frac{k}{-s}[e^{-st}]_0^\infty = \frac{k}{-s}[0-1] = \frac{k}{s}.$$

$$L\{k\} = \frac{k}{s}$$

٢- اذا كانت $f(t)=e^{at}$ حيث a ثابت فان

$$L\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{at}\,e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt = \frac{1}{-(s-a)}\int_0^\infty -(s-a)e^{-(s-a)t}dt =.$$

$$= \frac{1}{-(s-a)}[e^{-(s-a)t}]_0^\infty = \frac{1}{-(s-a)}[0-1]$$

$$L\{e^{at}\} = \frac{1}{(s-a)} = \bar{f}(s).$$

مثال: $L\{e^{5t}\} = \frac{1}{s-5}, L\{e^{-3t}\} = \frac{1}{s+3}$

ملاحظة:

المؤثر L لتحويل لابلاس له الخاصية الخطية أي ان

$$L\{af(t) \mp bg(t)\} = aL\{f(t)\} \mp bL\{g(t)\}.$$

٣) اذا كانت $f(t)=\sin(at)$ حيث a ثابت فان

$$L\{\sin at\} = L\{\frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}\}$$

$$= \frac{1}{2i}[L\{e^{iat}\} - L\{e^{-iat}\}] = \frac{1}{2i}[\underbrace{\frac{1}{s-ai} - \frac{1}{s+ai}}_{s^2+a^2}] = \frac{1}{2i}[\frac{s+ai-(s-ai)}{(s-ai)(s+ai)}]$$

$$= \frac{1}{2i}[\frac{2ia}{s^2+a^2}]$$

$$L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

مثال: $L\{\sin\frac{1}{2}t\} = \frac{\frac{1}{2}}{s^2+(\frac{1}{2})^2}$

٤-

$$L\{\cos at\} = L\{\frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2}\}$$

$$L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}$$

٥-

$$L\{\sinh at\} = L\{\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\}$$

$$L\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2-a^2}$$

٦-

$$L\{\cosh at\} = L\{\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\}$$

$$L\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2-a^2}$$

مثال: اوجد

$$L\{\cos^2 t\}$$

$$L\{\cos^2 t\} = L\left\{\frac{1}{2}(1+\cos 2t)\right\} = \frac{1}{2}(L\{1\}+L\{\cos 2t\})$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4}\right).$$

مثال:جد

$$L\{\sin at \cos at\}$$
$$\sin 2t = 2\sin t\cos t;\ \sin 2at = 2\sin at\cos at \rightarrow \frac{1}{2}(\sin 2at) = \frac{1}{2}(2\sin at\cos at)$$
$$L\{\sin at\cos at\} = L\left\{\frac{1}{2}\sin 2at\right\} = \frac{1}{2}L\{\sin 2at\} = \frac{1}{2}\frac{2a}{s^2+4a^2} = \frac{a}{s^2+4a^2}.$$

مثال:جد

$$L\{\sin 3t \sin t\}$$
$$\cos(x-y) = \cos x cos y + \sin x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x cos y - \sin x \sin y$$
$$\overline{\hspace{6cm}}-$$
$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2\sin x\sin y$$
$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right]$$
$$\therefore \sin 3t\sin t = \frac{1}{2}\left[\cos(3-1)t - \cos(3+1)t\right] = \frac{1}{2}\left[\cos 2t - \cos 4t\right]$$
$$\therefore L\{\sin t\sin 3t\} = \frac{1}{2}\left[L\{\cos 2t\} - L\{\cos 4t\}\right]$$
$$\therefore L\{\sin t\sin 3t\} = \frac{1}{2}\left[\frac{s}{s^2+4} - \frac{s}{s^2+16}\right].$$

مثال: اثبت ان

$$L\{t^n\}=\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \quad ; \; n>-1$$

$$L\{t^n\}=\int_0^\infty t^n e^{-st}dt$$

$$st=x \to t=\frac{x}{s} \to dt=\frac{dx}{s}$$

$$L\{t^n\}=\int_0^\infty (\frac{x}{s})^n e^{-x}\,\frac{dx}{s}=\frac{1}{s^{n+1}}\overbrace{\int_0^\infty x^{(n+1)-1}e^{-x}d\,x}^{\Gamma(n+1)}=\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$$

$$L\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}}, \;\; n \; is \, integer$$

مثال:

$$L\{t\}=\frac{1!}{s^2}=\frac{1}{s^2}$$

$$L\{t^3\}=\frac{3!}{s^4}=\frac{6}{s^4}$$

$$L\left\{t^{\frac{5}{2}}\right\}=\frac{\Gamma(\frac{7}{2})}{s^{\frac{7}{2}}}=\frac{\frac{5}{2}.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{s^{\frac{7}{2}}}=\frac{15}{8s^{\frac{7}{2}}}\sqrt{\pi}$$

ملاحظة: لكي يكون تحول لابلاس للدالة f موجود سوف نضع فرضيتين

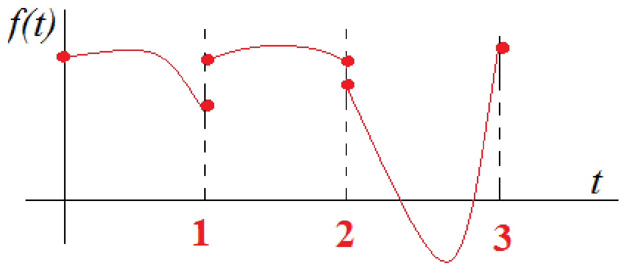
الفرضية الاولى:الدالة f تكون مستمرة بالاجزاء (picewise continuous) لكل قيم t بالفترة

$[0, a]$ حيث a عددثابت موجب.

تعريف:الدالة المستمرة بالاجزاء

تكون الدالة *f(t)* مستمرة بالاجزاء على الفترة المغلقة [*a, b*] اذا كان بالامكان تجزئة هذه

الفترة الى عدد محدود من الفترات الجزئية
$c \le t \le d$ بحيث انه في كل فترة جزئية تكون $f(t)$ *مستمرة في الفترة المفتوحة*
$c < t < d$ ولها غاية محددة عندما تقترب t من الداخل الى كل نقطة نهاية ضمن الفترة
الجزئية. اي ان الغايتين $\lim_{t\to c^+} f(t), \lim_{t\to d^-} f(t)$ موجودتان.



الشكل اعلاه يوضح مخطط الدالة f التي تكون مستمرة بالاجزاء على الفترة [0,3] وذلك لان هذه الفترة مجزئة الى الفترات $0 \le t \le 1$, $1 \le t \le 2$, $2 \le t \le 3$ بحيث ان $f(t)$ مستمرة لكل فترة ولها غاية محددة عندما تقترب من اطراف الفترة.

ملاحظة: ١- الدالة المستمرة بالاجزاء على فترة محدودة تكون قابلة للتكامل في تلك الفترة.

٢-كل دالة مستمرة تكون مستمرة بالاجزاء والعكس غير صحيح.

الفرضية الثانية:الدالة $f(t)$ تحقق المتباينة $|f(t)| < Me^{\alpha t}$ or $|e^{-\alpha t}f(t)| < M$ لكل قيم $t \ge T$, $(T > 0,)$ لبعض قيم α.

الدالة التي تحقق الفرضية ٢ تسمى دوال من **الرتبة الاسية** (Exponential order) عندما $t \to \infty$.

مبرهنة الوجود:اذا كانت $f(t)$ تحقق الفرضيتين ١و ٢ فان تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ يكون موجودا لكل قيم $s > \alpha$ حيث α ثابت.

البرهان: نفرض $f(t)$ تحقق الفرضيتين ١و٢ ومن تعريف تحول لابلاس

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^T f(t)e^{-st}dt + \int_T^\infty f(t)e^{-st}dt$$

لأي $T > 0$.

بما ان $f(t)$ دالة مستمرة بالاجزاء فان $\int_0^T f(t)e^{-st}dt$ يكون قابل للتكامل ومتقارب.

$$\left|\int_T^\infty f(t)e^{-st}dt\right| \le \int_T^\infty \left|f(t)e^{-st}\right|dt$$

$$\le \int_T^\infty \overbrace{\left|f(t)\right|}^{Me^{\alpha t}} e^{-st}dt$$

$$\le \int_T^\infty Me^{\alpha t}e^{-st}dt \le \int_T^\infty e^{-(s-\alpha)t} M\, dt$$

$$\le M[\frac{e^{-(s-\alpha)t}}{-(s-\alpha)}]_T^\infty \le M[0-\frac{e^{-(s-\alpha)T}}{-(s-\alpha)}]$$

$$\le M\frac{e^{-(s-\alpha)T}}{(s-\alpha)}.$$

اي ان التكامل $\int_T^\infty f(t)e^{-st}dt$ يكون محددا لكل قيم $T > 0$ لذلك فان تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ يكون موجودا.

ملاحظة: الشرطين في المبرهنة اعلاه يكونان كافيان لوجود تحويل لابلاس لدالة $f(t)$ لكنهما غير ضروريان. اي ان اذا لم يتحقق احد الشرطين او كليهما فان تحويل لابلاس للدالة قد يكون موجود او غير موجود كما موضح بالمثال التالي:

مثال:

$$f(t) = t^{-\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{t}} = \infty$$

تكون غير مستمرة بالاجزاء ولكن تحول لابلاس موجود لها:

$$L\left\{t^{-\frac{1}{2}}\right\} = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-st}dt$$

$$st = x \Rightarrow t = \frac{x}{s} \Rightarrow dt = \frac{dx}{s}$$

$$L\left\{t^{-\frac{1}{2}}\right\} = \int_0^\infty (\frac{x}{s})^{-\frac{1}{2}} e^{-s(\frac{x}{s})} \frac{dx}{s}$$

$$= \int_0^\infty \frac{(x)^{-\frac{1}{2}}}{(s)^{\frac{1}{2}}} e^{-x} dx = \frac{1}{(s)^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty x^{\overset{-\frac{1}{2}=n-1\to n=\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}} e^{-x} dx = \frac{1}{\sqrt{s}} \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}.$$

<u>خواص اخرى لتحول لابلاس:</u>

<u>مبرهنة (١):</u>

اذا كانت $L\{f(t)\} = \bar{f}(s)$ فانه لأي عدد ثابت a يكون $L\{e^{at} f(t)\} = \bar{f}(s-a)$.

<u>البرهان:</u>

$$\bar{f}(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

$$s = s-a \Rightarrow \bar{f}(s-a) = \int_0^\infty f(t) e^{-(s-a)t} dt = \int_0^\infty \underbrace{f(t) e^{at}} e^{-st} dt$$

$$= L\{f(t)\, e^{at}\}.$$

<u>امثلة:</u> ١-جد $L\{e^{-2t}\, t^2\}$

$$\bar{f}(s) = L\{f(t)\}$$

$$\bar{f}(s) = L\{f(t)\} = L\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$$

$$L\{e^{-2t} t^2\} = \bar{f}(s-a) = \frac{2}{(s+2)^3}.$$

٢- $L\{e^{3t} \cos at\}$

$$L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2} = \bar{f}(s)$$

$$L\{e^{3t}\cos at\} = \frac{s-3}{(s-3)^2 + a^2}.$$

مبرهنة (2):

اذا كانت الدالة $f(t)$ ومشتقتها مستمرتان لجميع قيم $t \geq 0$ وكان تحول لابلاس للدالة f موجود فان

$$L\{f'(t)\} = s\,L\{f(t)\} - f(0) = s\,\bar{f}(s) - f(0)$$

البرهان:

$$L\{f'(t)\} = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt$$

$u = e^{-st}$ $\qquad dv = f'(t)\,dt$

$du = -se^{-st}dt$ $\qquad v = f(t)$

$$L\{f'(t)\} = \{e^{-st}f(t)\}_0^\infty + \int_0^\infty s\,f(t)e^{-st}dt$$

$$= [0 - f(0)] + sL\{f(t)\}$$

$$= sL\{f(t)\} - f(0) = s\bar{f}(s) - f(0)$$

$$L\{f''(t)\} = L\{[f'(t)]'\} = sL\{f'(t)\} - f'(0)$$

$$= s[L\{f'(t)\}] - f'(0)$$

$$= s[sL\{f(t)\} - f(0)] - f'(0)$$

$$= s^2L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0).$$

$$L\{f'''(t)\} = s^3L\{f(t)\} - s^2f(0) - s\,f'(0) - f''(0).$$

وبصورة عامة

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^nL\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\,f'(0) - s^{n-3}f''(0) \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

مثال: اذا كانت $f(t) = t\cos at$ جد $L\{f(t)\}$.

$$f'(t) = -at\sin at + \cos at$$

$$f''(t) = -a^2 t\cos at - asinat - a\sin at.$$

$$= -a^2 t\cos at - 2a\sin at.$$

$$L\{f''(t)\} = -a^2 L\{t\cos at\} - 2aL\{\sin at\}$$

$$s^2\bar{f}(s) - s\underset{0}{f(0)} - \underset{1}{f'(0)} = -a^2\bar{f}(s) - 2a\frac{a}{a^2+s^2}$$

$$s^2\bar{f}(s) - 1 = -a^2\bar{f}(s) - \frac{2a^2}{a^2+s^2}$$

$$(s^2+a^2)\bar{f}(s) = 1 - \frac{2a^2}{a^2+s^2} \Rightarrow (s^2+a^2)\bar{f}(s) = \frac{s^2-a^2}{a^2+s^2}$$

$$\bar{f}(s) = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2} = L\{f(t)\}.$$

مبرهنة (٣): اذا كانت $f(t)$ تحقق الفرضيتان ١, ٢ وكان $L\{f(t)\} = \bar{f}(s)$ فان
$L\{t\,f(t)\} = \frac{-d}{ds}\bar{f}(s)$.

البرهان:

من تعريف تحول لابلاس

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$\frac{d}{ds}\bar{f}(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)\frac{d}{ds}e^{-st}dt = -\int_0^\infty t\,f(t)e^{-st}dt$$

$$-\frac{d}{ds}\bar{f}(s) = \int_0^\infty t\,f(t)\,e^{-st}dt$$

$$-\frac{d}{ds}\bar{f}(s) = L\{t\,f(t)\}$$

$$L\{t^2\ f(t)\} = L\{t(tf(t))\} = -\frac{d}{ds}L\{t\ f(t)\} = -\frac{d}{ds}(-\frac{d}{ds}\ \bar{f}(s)) = \frac{d^2}{ds^2}\ \bar{f}(s).$$

$$L\{t^3\ f(t)\} = -\ \frac{d^3}{ds^3}\ \bar{f}(s)$$

$$\vdots$$

$$L\{t^n\ f(t)\} = (-1)^n\ \frac{d^n}{ds^n}\ \bar{f}(s)$$

مثال: اوجد

1) $L\{t\ \cos at\}$

$$L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$L\{t\ \cos at\} = -\frac{d}{ds}(\frac{s}{s^2+a^2}) = -[\frac{s^2+a^2-2s^2}{(s^2+a^2)^2}] = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}.$$

2) $L\{t^2\ e^t\}$

$$L\{\ e^t\} = \frac{1}{s-1} = \bar{f}(s)$$

$$L\{t^2\ e^t\} = \frac{d^2}{ds^2}(\frac{1}{s-1}) = \frac{d}{ds}(-\ \frac{1}{(s-1)^2}) = \frac{2(s-1)}{(s-1)^4} = \frac{2}{(s-1)^3}$$

طريقة اخرى:

$$L\{t^2\} = \frac{2}{s^3} \quad , L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$L\{e^t\ t^2\} = \frac{2}{(s-1)^3},\ \ L\{e^{at}\ f(t)\} = \bar{f}(s-a)$$

مبرهنة (4): اذا كانت $f(t)$ تحقق الفرضيتان ١ ,٢وكانت غاية $\frac{f(t)}{t}$ موجودة عندما $t \to 0^+$ وكان $L\{f(t)\} = \bar{f}(s)$ موجود فان $L\{\frac{f(t)}{t}\} = \int_s^\infty \bar{f}(s)ds$.

البرهان:

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$\int_s^\infty \bar{f}(s)\,ds = \int_s^\infty (\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt)ds$$

$$= \int_0^\infty \int_s^\infty f(t)e^{-st}\,ds\,dt$$

$$= \int_0^\infty f(t)(\int_s^\infty e^{-st}\,ds)\,dt$$

$$= \int_0^\infty f(t)(\frac{-1}{t}[e^{-st}]_s^\infty)\,dt$$

$$= \int_0^\infty f(t)(\frac{-1}{t}[0 - e^{-st}])\,dt$$

$$= \int_0^\infty f(t)(\frac{1}{t}[e^{-st}])\,dt$$

$$= \int_0^\infty (\frac{f(t)}{t})e^{-st}\,dt = L\{\frac{f(t)}{t}\}.$$

مثال: جد $1)\ L\{\frac{e^{-3t}\sin 2t}{t}\} \quad 2)\ L\{\frac{\sin t\cos t}{t}\}$

$$1)\ L\{\frac{e^{-3t}\sin 2t}{t}\}$$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{e^{-3t}\sin 2t}{t} = 2\lim_{t\to 0^+} e^{-3t}\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin 2t}{2t} = 2$$

الغاية موجودة

$$L\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2+4}$$

$$L\{e^{-3t}\sin 2t\} = \frac{2}{(s+3)^2+4}, \quad L\{e^{at} f(t)\} = \overline{f}(s-a)$$

$$L\{\frac{e^{-3t}\sin 2t}{t}\} = \int_s^\infty \frac{2}{(s+3)^2+4} ds$$

$$= \int_s^\infty \frac{\frac{1}{2}}{(\frac{s+3}{2})^2+1} ds \ , \quad \int \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1} x \ ,$$

$$= \tan^{-1}(\frac{s+3}{2})]_s^\infty = \overbrace{\tan^{-1}\infty}^{\frac{\pi}{2}} - \tan^{-1}(\frac{s+3}{2})$$

$$= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\frac{s+3}{2}) = \cot^{-1}\frac{s+3}{2}.$$

٢) (H.W)

مبرهنة (5): اذا كانت $f(t)$ تحقق الفرضيتان ١ ,٢وكانت $L\{f(t)\} = \overline{f}(s)$ فان $L\{\int_0^t f(t)dt\} = \frac{\overline{f}(s)}{s}$.

البرهان: نفرض

$$g(t) = \int_0^t f(t)dt \Rightarrow g'(t) = f(t)$$

$$L\{g'(t)\} = L\{f(t)\}$$

$$sL\{g(t)\} - \underbrace{g(0)}_{0=(\int_0^0 f(t)dt)\Rightarrow} = \overline{f}(s)$$

$$sL\{g(t)\} = \overline{f}(s) \Rightarrow L\{g(t)\} = \frac{\overline{f}(s)}{s}$$

$$L\{\int_0^t f(t)dt\} = \frac{\overline{f}(s)}{s}$$

مثال: جد تحول لابلاس

$$1)\ L\{t\int_0^t e^{-2t}\sin t dt\} \quad , L\{t\ f(t)\} = \frac{-d}{ds}\bar{f}(s)$$

$$L\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$$

$$L\{e^{-2t}\sin t\} = \frac{1}{(s+2)^2+1}$$

$$L\{\int_0^t e^{-2t}\sin t dt\} = \frac{1}{s[(s+2)^2+1]}$$

$$L\{t\int_0^t e^{-2t}\sin t dt\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s[(s+2)^2+1]}\right)$$

$$= -\frac{((s+2)^2+1)(-\frac{1}{s^2}) - \frac{1}{s}(2(s+2))}{((s+2)^2+1)^2}$$

$$= \frac{((s+2)^2+1)+(2s^2+4s)}{s^2((s+2)^2+1)^2} = \frac{3s^2+8s+5}{s^2((s+2)^2+1)^2}$$

مثال(H.W): اثبت ان $L\{e^{-t}\int_0^t t\sin 2t dt\} = \frac{4}{((s+1)^2+4)^2}$

مثال : جد $L\{\int_0^t \frac{e^{at}-\cos bt}{t} dt\}$ ثم استنتج $L\{\int_0^t \frac{\sin^2 t}{t} dt\} = \frac{1}{2s}\ln(\frac{\sqrt{s^2+4}}{s})$

الحل:

$$L\{e^{at}-\cos bt\} = \frac{1}{s-a} - \frac{s}{s^2+b^2}$$

$$L\{\frac{e^{at}-\cos bt}{t}\} = \int_s^\infty \left(\frac{1}{s-a} - \frac{s}{s^2+b^2}\right)ds \quad , \ L\{\frac{f(t)}{t}\} = \int_s^\infty \bar{f}(s)ds$$

$$= [\ln(s-a) - \frac{1}{2}\ln(s^2+b^2)]\Big|_s^\infty = \ln\left(\frac{s-a}{\sqrt{s^2+b^2}}\right)_s^\infty = 0 - \ln\left(\frac{s-a}{\sqrt{s^2+b^2}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{s-a}{\sqrt{s^2+b^2}}\right)^{-1} = \ln\left(\frac{\sqrt{s^2+b^2}}{s-a}\right)$$

توضيح

$$\lim_{s\to\infty}\ln\left(\frac{s-a}{\sqrt{s^2+b^2}}\right)=\lim_{s\to\infty}\ln\left(\frac{1-\frac{a}{s}}{\sqrt{1+\frac{b^2}{s^2}}}\right)=\ln(1)=0$$

$$L\{\int_0^t \frac{e^{at}-\cos bt}{t}dt\}=\frac{1}{s}\ln\frac{\sqrt{s^2+b^2}}{s-a},\quad L\{\int_0^t f(t)dt\}=\frac{\bar{f}(s)}{s}$$

بوضع $a=0, b=2$ نحصل على

$$L\{\int_0^t \frac{2\sin^2 t}{t}dt\}=\frac{1}{s}\ln\frac{\sqrt{s^2+4}}{s}\ ,\quad \sin^2 t=\frac{1-cos2t}{2}\to 1-co2t=2\sin^2 t$$

$$L\{\int_0^t \frac{\sin^2 t}{t}dt\}=\frac{1}{2s}\ln\frac{\sqrt{s^2+4}}{s}$$

تمرين: اثبت ان

$$L\{\int_0^t \frac{\sin^2 t}{t}\ dt\}=\frac{1}{2s}\ln\left(\frac{\sqrt{s^2+4}}{s}\right)$$

<u>مبرهنة(٦)</u> : اذا كانت $L\{f(t)\}=\bar{f}(s)$ فان $L\{f(at)\}=\frac{1}{a}\bar{f}(\frac{s}{a})$ حيث ان $a>0$ ثابت.

<u>البرهان:</u>

$$L\{f(at)\}=\int_0^\infty f(at)\,e^{-st}dt$$

$$let\ \ at=x\to t=\frac{x}{a}\to dt=\frac{dx}{a}$$

$$L\{f(at)\}=\int_0^\infty f(x)\,e^{-s\frac{x}{a}}\frac{dx}{a}$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^\infty f(x)\,e^{-\frac{s}{a}x}dx$$

$$=\frac{1}{a}\bar{f}(\frac{s}{a})\ .$$

مثال:

$$L\{\sin 2t\}$$

$$L\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1} = \bar{f}(s).$$

$$L\{\sin 2t\} = \frac{1}{2}\,\bar{f}\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(\frac{s}{2}\right)^2+1} = \frac{2}{s^2+4}.$$

مثال : جد $L\{J_0(t)\}$ ثم استنتج $L\{J_0(at)\}$.

$$J_n(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{t}{2}\right)^{2r+n}}{r!\,\Gamma(r+n+1)}$$

$$J_0(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{t}{2}\right)^{2r}}{r!\,\underbrace{\Gamma(r+1)}_{r!}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r t^{2r}}{2^{2r}(r!)^2}$$

$$L\{J_0(t)\} = L\left\{\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r t^{2r}}{2^{2r}(r!)^2}\right\} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \overbrace{L\{t^{2r}\}}^{\frac{(2r)!}{s^{2r+1}}}}{2^{2r}(r!)^2} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (2r)!}{2^{2r}(r!)^2\, s^{2r+1}}, \quad L\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{2}{2^2 s^3} + \overbrace{\frac{4!}{2^4\ (2!)^2 s^5}}^{4.3.2.1} - \frac{6!}{2^6\ (3!)^2 s^7} + \ldots.$$

$$= \frac{1}{s}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{s^2} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{s^4} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{s^6} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{1}{s^8} - \ldots.\right)$$

$$= \frac{1}{s}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2}\right) + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{1}{s^2}\right)^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{1}{s^2}\right)^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\left(\frac{1}{s^2}\right)^4 - \ldots.\right)$$

بما ان

$$1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \ldots = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

وبالتعويض عن كل x بـ $\frac{1}{s^2}$ نحصل على:

$$\frac{1}{s}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{s^2}}}=\frac{1}{s}\frac{1}{\sqrt{\frac{s^2+1}{s^2}}}$$

$$L\{J_0(t)\}=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}.$$

$$L\{J_0(at)\}=\frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{(\frac{s}{a})^2+1}}=\frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{\frac{s^2+a^2}{a^2}}}.$$

$$=\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}.$$

مثال:جد $L\{erf\sqrt{t})$ ثم جد $L\{erf\sqrt{at})$.

الحل:

$$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-y^2}dy.$$

$$erf(\sqrt{t})=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-y^2}dy.$$

$$y^2=x\Rightarrow y=\sqrt{x}\Rightarrow dy=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$erf(\sqrt{t})=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{t} e^{-x}\frac{1}{\sqrt{x}}dx.$$

$$L\{erf(\sqrt{t})\}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}L\{\int_0^{t} e^{-x}\frac{1}{\sqrt{x}}dx\}.$$

$$L\{\frac{1}{\sqrt{x}}\}=L\{\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\}=L\{x^{-\frac{1}{2}}\}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}.$$

$$L\{e^{-x}\frac{1}{\sqrt{x}}\}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s+1}}\ ,\quad L\{e^{at}f(t)\}=\overline{f}(s-a)$$

$$L\{\int_0^t e^{-x}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{s\sqrt{s+1}},\quad L\{\int_0^t f(t)dt\}=\frac{\overline{f}(s)}{s}$$

$$L\{erf(\sqrt{t})\}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}L\{\int_0^t e^{-x}\frac{1}{\sqrt{x}}dx\}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{s\sqrt{s+1}}.$$

$$=\frac{1}{s\sqrt{s+1}}.$$

$$L\{erf(\sqrt{at})\}=\frac{1}{a}\frac{1}{\frac{s}{a}\sqrt{\frac{s}{a}+1}}=\frac{1}{s\sqrt{\frac{s}{a}+1}}$$

مثال:اثبت ان

$$L\{\sin(\sqrt{t})\}=\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{1}{4s}}.$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$$

$$\sin\sqrt{t}=t^{\frac{1}{2}}-\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3!}+\frac{t^{\frac{5}{2}}}{5!}-\frac{t^{\frac{7}{2}}}{7!}+\ldots$$

$$L\{\sin(\sqrt{t})\}=L\{t^{\frac{1}{2}}-\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3!}+\frac{t^{\frac{5}{2}}}{5!}-\frac{t^{\frac{7}{2}}}{7!}+\ldots\}$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{s^{\frac{3}{2}}}-\frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{3!s^{\frac{5}{2}}}+\frac{\Gamma(\frac{7}{2})}{5!s^{\frac{7}{2}}}-\frac{\Gamma(\frac{9}{2})}{7!s^{\frac{9}{2}}}+\ldots$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{s^{\frac{3}{2}}}-\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}\sqrt{\pi}}{3!s^{\frac{5}{2}}}+\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}\sqrt{\pi}}{5!s^{\frac{7}{2}}}-\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}\sqrt{\pi}}{7!s^{\frac{9}{2}}}+\ldots$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}[1-\frac{3}{2\ 3!s}+\frac{3.5}{4\ 5!s^2}-\frac{3.5.7}{8\ 7!s^3}+\ldots]$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}[1+\frac{(-\frac{1}{4s})}{1!}+\frac{(-\frac{1}{4s})^2}{2!}+\frac{(-\frac{1}{4s})^3}{3!}+\ldots]$$

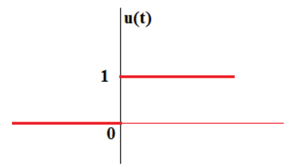
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\, s^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\frac{1}{4s}}$$

تعريف: (دالة الخطوة الواحدة)

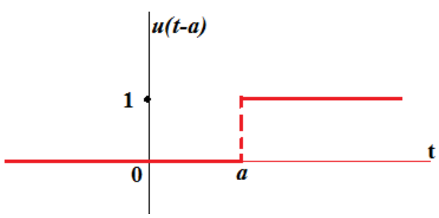
هي الدالة التي قيمها ١ لجميع قيم t الموجبة وقيمتها صفر لجميع قيم t السالبة اي ان

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



ازاحة دالة الخطوة الواحدة:

$$u(t-a) = \begin{cases} 1 & t \geq a \\ 0 & t < a \end{cases}$$



لايجاد تحول لابلاس للدالة $u(t-a)$ نطبق تعريف تحول لابلاس كالاتي:

$$L\{u(t-a)\} = \int_0^{\infty} u(t-a) e^{-st} dt$$

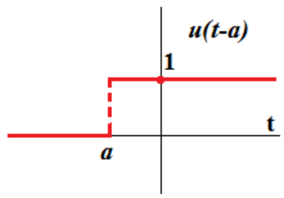
$$= \int_0^{a} u(t-a) e^{-st} dt + \int_a^{\infty} u(t-a) e^{-st} dt$$

$$= 0 + \int_a^{\infty} 1 e^{-st} dt = \left[\frac{-e^{-st}}{s} \right]_a^{\infty}$$

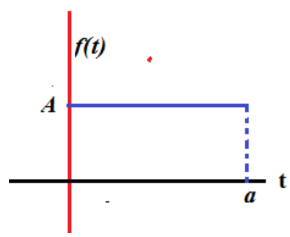
$$L\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s} \quad , s > 0$$

في حالة $a = 0 \quad \Rightarrow L\{u(t)\} = \dfrac{1}{s}$

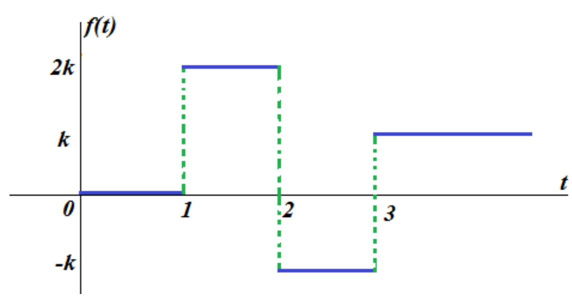
ملاحظة: في حالة $a < 0$ فان $u(t-a) = 1$ عندما $t > 0$ وفي مثل هذه الحالة يكون
$L\{u(t-a)\} = L\{1\} = \dfrac{1}{s}$



ملاحظة:أي دالة يمكن تمثيلها بدلالة الخطوة الواحدة كما موضح في الذبذبة المستطيلة التي قيمتها A فولت وفترتها a ثانية والتي يمكن كتابتها بالشكل: $f(t) = A[u(t) - u(t-a)]$ أي ان $f(t) = A$ دالة ثابتة وتساوي خط مستقيم يوازي المحور t .



مثال: مثل الدالة $f(t)$ الموضحة بالشكل التالي بدلالة دالة الخطوة الواحدة ثم جد تحويل لابلاس لها.

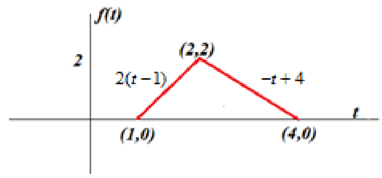


$$f(t) = 0[u(t) - u(t-1)] + 2k[u(t-1) - u(t-2)]$$
$$+ (-k)[u(t-2) - u(t-3)] + ku(t-3)$$

$$f(t) = k[2u(t-1) - 3u(t-2) + 2u(t-3)]$$
$$L\{f(t)\} = k[2L\{u(t-1)\} - 3L\{u(t-2)\} + 2L\{u(t-3)\}]$$
$$= k[2\frac{e^{-s}}{s} - 3\frac{e^{-2s}}{s} + 2\frac{e^{-3s}}{s}]$$

مثال: مثل الدالة التالية بدلالة دالة الخطوة ثم جد تحول لابلاس لها:

لايجاد قيمة الدالة بين $(1,0),(2,2)$ نجد معادلة المستقيم بين نقطتين وكذلك بالنسبة لقيمة الدالة بين النقطتين $(2,2),(4,0)$



$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Rightarrow\frac{y-0}{x-1}=\frac{2-0}{2-1}\Rightarrow y=2x-2$$

$$y=2(t-1)$$

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Rightarrow\frac{y-2}{x-2}=\frac{4-2}{0-2}\Rightarrow y-2=-x+2$$

$$y=-t+4$$

$$f(t)=\begin{cases}2(t-1) & 1\le t<2\\ -t+4 & 2\le t\le 4\end{cases}$$

$$f(t)=2(t-1)\left[u(t-1)-u(t-2)\right]+(4-t)\left[u(t-2)-u(t-4)\right]$$

ملاحظة:

أي دالة اذا ضربت بدالة الخطوة الواحدة ينتج الدالة نفسها $f(t)$ عندما t موجبة وتساوي صفر عندما t سالبة

$$f(t)u(t)=\begin{Bmatrix}f(t) & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{Bmatrix} \text{ و } f(t-a)u(t-a)=\begin{Bmatrix}f(t-a) & t\ge a\\ 0 & t<a\end{Bmatrix}$$

مبرهنة:

اذا كانت $L\{f(t)\}=\bar{f}(s)$ فان لاي قيمة الى $a\ge 0$ يكون $L\{f(t-a).u(t-a)\}=e^{-as}L\{f(t)\}.$

البرهان:

$$L\{f(t-a).u(t-a)\}=\int_0^\infty f(t-a)u(t-a)e^{-st}dt$$

$$=0+\int_a^\infty f(t-a)e^{-st}dt$$

$$Let \quad t=a-p\rightarrow dt=dp$$

$$L\{f(t-a).u(t-a)\}=\int_0^\infty f(p)e^{-s(a+p)}dp$$

$$=e^{-sa}\int_0^\infty f(p)e^{-sp}dp=e^{-sa}L\{f(t)\}.$$

مثال:

جد تحول لابلاس للدالة $L\{(t-2).u(t-2)\}=e^{-sa}L\{t\}=\dfrac{e^{-2s}}{s^2}$

نتيجة: $L\{f(t)u(t-a)\}=e^{-sa}L\{f(t+a)\}$

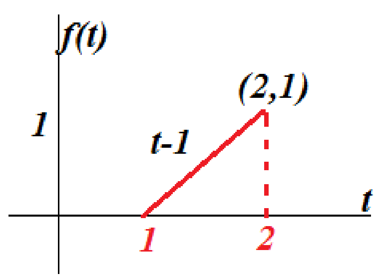
$$f(t)u(t-a)=f(t-a+a)u(t-a)=F(t-a)u(t-a)$$

$$F(t)=f(t+a)$$

$$\therefore\ L\{f(t)u(t-a)\}=L\{F(t-a)u(t-a)\}=e^{-sa}L\{F(t)\}$$

$$=e^{-sa}L\{f(t+a)\}$$

مثال:مثل الدالة الموضحة بالشكل ادناه بدلالة دالة الخطوة الواحدة ثم جد تحول لابلاس لها.



$$f(t) = (t-1)[u(t-1) - u(t-2)]$$
$$L\{f(t)\} = L\{(t-1)u(t-1)\} - L\{(t-1)u(t-2)\}$$
$$= e^{-s}L\{t\} - e^{-2s}L\{t-1+2\} = e^{-s}L\{t\} - e^{-2s}L\{t+1\}$$
$$= e^{-s}\frac{1}{s^2} - e^{-2s}[\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}] = \frac{1}{s^2}[e^{-s} - e^{-2s} - se^{-2s}].$$

مثال:

$$L\{(t^2-4)u(t-2)\} = e^{-2s}L\{(t+2)^2 - 4\} = e^{-2s}L\{t^2 + 4t\}$$
$$= e^{-2s}[\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2}\}$$

تمرين:اوجد تحويل لابلاس لكل ممماياتي:

1) $e^{3t}u(t-2)$

2) $co3t\,u(t-3)$

معكوس تحول لابلاس:Inverse Laplace Transformation

تعريف:اذا كانت $f(t)$ دالة بحيث ان $L\{f(t)\} = \bar{f}(s)$ فيقال للدالة $f(t)$ بانها معكوس تحول لابلاس للدالة $\bar{f}(s)$ وتكتب بالصيغة $f(t) = L^{-1}\{\bar{f}(s)\}$.

امثلة:

$$1)\ L^{-1}\{\frac{k}{s}\} = k \quad , \quad L\{k\} = \frac{k}{s}.$$
$$2)\ L^{-1}\{\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}\} = t^n, \quad L\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}.$$
$$3)\ L^{-1}\{\frac{a}{s^2+a^2}\} = \sin at, \quad L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}.$$
$$4)\ L^{-1}\{\frac{s}{s^2+a^2}\} = \cos at, \quad L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}.$$
$$5)\ L^{-1}\{\frac{1}{s-a}\} = e^{at}, \quad L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}.$$
$$\vdots$$

خواص معكوس تحول لابلاس:

١-الخاصية الخطية: اذا كان $a_1, a_2, a_3, ..., a_m$ ثوابت فان

$$L^{-1}\{a_1\overline{f}_1(s) + a_2\overline{f}_2(s) + ... + a_m\overline{f}_m(s)\} = a_1L^{-1}\{\overline{f}_1(s)\} + a_2L^{-1}\{\overline{f}_2(s)\} + ... + a_mL^{-1}\{\overline{f}_m(s)\}$$

مثال:جد

$$L^{-1}\{\tfrac{s-3}{s^2+4}\}$$

$$L^{-1}\{\tfrac{s-3}{s^2+4}\} = L^{-1}\{\tfrac{s}{s^2+4} - \tfrac{3}{s^2+4}\} = L^{-1}\{\tfrac{s}{s^2+4}\} - \frac{3}{2}L^{-1}\{\tfrac{2}{s^2+4}\}$$

$$= \cos 2t - \frac{3}{2}\sin 2t$$

مثال:احسب

$$L^{-1}\{\tfrac{2-\sqrt{3}\,s}{4s^2-1}\}$$

$$L^{-1}\{\tfrac{2-\sqrt{3}\,s}{4s^2-1}\} = L^{-1}\{\tfrac{2}{4s^2-1}\} - L^{-1}\{\tfrac{\sqrt{3}\,s}{4s^2-1}\}$$

$$= L^{-1}\{\tfrac{\frac{1}{2}}{s^2-\frac{1}{4}}\} - \frac{\sqrt{3}}{4}L^{-1}\{\tfrac{s}{s^2-\frac{1}{4}}\}$$

$$= \sinh\frac{1}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{4}\cosh\frac{1}{2}t.$$

مثال:جد

$$L^{-1}\{\tfrac{1}{s(s-1)}\}$$

$$\tfrac{1}{s(s-1)} = \tfrac{A}{s} + \tfrac{B}{(s-1)} = \tfrac{A(s-1)+Bs}{s(s-1)}$$

$$A(s-1) + Bs = 1$$

$$1 = (A+B)s - A$$

$$-A = 1 \rightarrow A = -1$$

$$A + B = 0 \rightarrow B = 1$$

$$L^{-1}\{\tfrac{1}{s(s-1)}\} = L^{-1}\{\tfrac{-1}{s} + \tfrac{1}{(s-1)}\} = L^{-1}\{\tfrac{-1}{s}\} + L^{-1}\{\tfrac{1}{(s-1)}\}$$

$$= -1 + e^t$$

مثال:جد

$$L^{-1}\{\frac{s^2-1}{s(s^2+1)}\}$$

$$\frac{s^2-1}{s(s^2+1)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+1}=\frac{A(s^2+1)+(Bs+C)s}{s(s^2+1)}$$

$$s^2-1=A(s^2+1)+(Bs+C)s$$

$$s^2-1=(A+B)s^2+Cs+A$$

$$A=-1, C=0$$

$$A+B=1\rightarrow B=2$$

$$L^{-1}\{\frac{s^2-1}{s(s^2+1)}\}=L^{-1}\{\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+1}\}=L^{-1}\{\frac{A}{s}\}+L^{-1}\{\frac{Bs+C}{s^2+1}\}$$

$$=L^{-1}\{\frac{-1}{s}\}+L^{-1}\{\frac{2s}{s^2+1}\}=-1+2\cos t$$

ملاحظة : المبرهنات السابقة لتحول لابلاس يمكن ايجاد المعكوس لها.

٢)اذاكانت $f(t)=L^{-1}\{\bar{f}(s)\}$ فان $L^{-1}\{\bar{f}(s-a)\}=e^{at}L^{-1}\{\bar{f}(s)\}=e^{at}f(t).$.

مثال:

$$1)\ L^{-1}\{\frac{1}{(s-1)^3}\}=\frac{1}{2}e^t L^{-1}\{\frac{2}{s^3}\}=\frac{1}{2}e^t t^2.\ \ (L\{t^n\}=\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}})$$

$$2)\ L^{-1}\{\frac{1}{(s^2-4s+8)}\}=L^{-1}\{\frac{1}{(s^2-4s+4+4)}\}$$

$$=L^{-1}\{\frac{1}{(s-2)^2+4}\}=e^{2t}L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+4}\}=\frac{e^{2t}}{2}L^{-1}\{\frac{2}{(s^2+4}\}$$

$$=\frac{e^{2t}}{2}\sin 2t.$$

$$3)\ L^{-1}\{\frac{3s-2}{(s^2+2s-8)}\}=e^{-t}\{3\cosh 3t-\frac{5}{3}\sinh 3t\}\ \ (H.W).$$

٣) اذاكانت $f(t)=L^{-1}\{\bar{f}(s)\}$ فان $L^{-1}\{\frac{d^n}{ds^n}\bar{f}(s)\}=(-t)^n L^{-1}\{\bar{f}(s)\}=(-t)^n f(t).$

مثال:

$$L^{-1}\{\ln(1+\frac{1}{s^2})\}$$

$$\bar{f}(s)=\ln(1+\frac{1}{s^2})=\ln(\frac{s^2+1}{s^2})$$

$$\bar{f}(s)=\ln(s^2+1)-\ln(s^2)=$$

$$\frac{d\bar{f}(s)}{ds}=\frac{2s}{s^2+1}-\frac{2}{s}$$

$$L^{-1}\{\frac{d\bar{f}(s)}{ds}\}=L^{-1}\{\frac{2s}{s^2+1}-\frac{2}{s}\}=2\cos t-2$$

$$-t\ f(t)\ =2\cos t-2$$

$$f(t)=\frac{2\cos t-2}{-t}$$

مثال:اثبت ان

$$L^{-1}\{\frac{s+1}{(s^2+2s+2)^2}\}=e^{-t}\ \frac{t}{2}\sin t$$

$$L^{-1}\{\frac{s+1}{(s^2+2s+1+1)^2}\}=L^{-1}\{\frac{s+1}{((s+1)^2+1)^2}\}=e^{-t}L^{-1}\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\}$$

$$\bar{f}(s)=\frac{1}{s^2+1}\Rightarrow f(t)=\sin t$$

$$\frac{d\bar{f}(s)}{ds}=\frac{-2s}{(s^2+1)^2}$$

$$L^{-1}\{\frac{d\bar{f}(s)}{ds}\}=-t\ f(t)$$

$$L^{-1}\{\frac{d\bar{f}(s)}{ds}\}=L^{-1}\{\frac{-2s}{(s^2+1)^2}\}$$

$$-t\sin t=L^{-1}\{\frac{-2s}{(s^2+1)^2}\}\Rightarrow L^{-1}\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\}=\frac{t}{2}\sin t$$

$$L^{-1}\{\frac{s+1}{(s^2+2s+2)^2}\}=e^{-t}\ \frac{t}{2}\sin t.$$

٤) اذاكانت $f(t)=L^{-1}\{\bar{f}(s)\}$ فان $L^{-1}\{\int_s^{\infty}\bar{f}(s)ds\}=\frac{f(t)}{t}=\frac{L^{-1}\{\bar{f}(s)\}}{t}$.

مثال:جد

$$L^{-1}\{\underbrace{\frac{s}{(s^2+4)^2}}_{\bar{f}(s)}\}$$

$$L^{-1}\{\bar{f}(s)\} = L^{-1}\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\} = t\,L^{-1}\{\int_s^\infty \bar{f}(s)ds\}$$

$$= t^{-1}\{\int_s^\infty \frac{s}{(s^2+4)^2}ds\}$$

$$= \frac{t}{2}L^{-1}\{\int_s^\infty (s^2+4)^{-2}2s\,ds\}$$

$$= \frac{t}{2}L^{-1}\{\frac{(s^2+4)^{-1}}{-1}\Big|_s^\infty\} = \frac{-t}{2}L^{-1}\{\frac{1}{s^2+4}\Big|_s^\infty\}$$

$$= \frac{t}{2}L^{-1}\{\frac{1}{s^2+4}\} = \frac{t}{4}\sin 2t.$$

٥) اذاكانت $f(t) = L^{-1}\{\bar{f}(s)\}$ فان $\int_0^t f(t)dt = L^{-1}\{\frac{\bar{f}(s)}{s}\}$.

مثال:جد

$$L^{-1}\{\frac{1}{s(s^2-9)}\} = L^{-1}\{\frac{\frac{1}{s^2-9}}{s}\}$$

$$= \int_0^t L^{-1}\{\frac{1}{s^2-9}\}dt$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^t \sinh(3t)\,dt = \frac{1}{9}[\cosh 3t]_0^t$$

$$= \frac{1}{9}[\cosh 3t - \cosh 0]$$

$$= \frac{1}{9}[\cosh 3t - 1]$$

تمارين:

جد قيمة مماياتي

1) $L\{(3+e^{6t})^2\}$

2) $L\{e^{-t}\sin^2 t\}$

3) $L\{cohat \sin at\}$

4) $L\{f(t)\}, where\, f(t)=\begin{cases}\sin t, & 0<t<\pi \\ 0, & t>\pi\end{cases}$

5) $L^{-1}\{\frac{7s+15}{s^2+2}\}$

6) $L^{-1}\{\frac{s}{s^4+s^2+1}\}$

7) $L^{-1}\{\frac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}\}$

8) $L^{-1}\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\}$

الحل:

3) $L\{\cosh at \sin at\} = L\{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\sin at\} = \frac{1}{2}[L\{e^{at}\sin at\} + L\{e^{-at}\sin at\}]$

$\because L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2},\ L\{e^{at} f(t)\} = \bar{f}(s-a)$

$= \frac{1}{2}[\frac{a}{(s-a)^2+a^2} + \frac{a}{(s+a)^2+a^2}]$

$= \frac{a}{2}[\frac{a}{(s^2+2a^2)-2as} + \frac{a}{(s^2+2a^2)+2as}]$

$= \frac{a}{2}[\frac{\{(s^2+2a^2)+2as\}+\{(s^2+2a^2)-2as\}}{\{(s^2+2a^2)-2as\}\{(s^2+2a^2)+2as\}}]$

$= \frac{a}{2}\frac{(2s^2+4a^2)}{(s^2+2a^2)^2-4a^2s^2} = \frac{a(s^2+2a^2)}{s^4+4a^4}$

$$6)L^{-1}\{\frac{s}{s^4+s^2+1}\}$$

$$s^4+s^2+1=s^4+2s^2+1-s^2=(s^2+1)^2-s^2$$

$$=(s^2+1-s)(s^2+1+s)$$

$$\frac{s}{s^4+s^2+1}=\frac{s}{(s^2+1-s)(s^2+1+s)}=\frac{As+B}{(s^2+1-s)}+\frac{Cs+D}{(s^2+1+s)}$$

$$s=(As+B)(s^2+1+s)+(Cs+D)(s^2+1-s)$$

$$=s^3(A+C)+s^2(A+B-C+D)+s(A+B+C-D)+(B+D)$$

$$A+C=0 \qquad ...(1)$$

$$A+B-C+D=0 \qquad ...(2)$$

$$A+B+C-D=1 \qquad ...(3)$$

$$B+D=0 \qquad ...(4)$$

$$A=C=0,\ B=\frac{1}{2},\ D=-\frac{1}{2}$$

$$L^{-1}\{\frac{s}{s^4+s^2+1}\}=L^{-1}\{\frac{1}{2}\frac{1}{(s^2+1-s)}-\frac{1}{2}\frac{1}{(s^2+1+s)}\}=$$

$$=\frac{1}{2}L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+\frac{1}{4}-s)+\frac{3}{4}}\}-\frac{1}{2}L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+\frac{1}{4}+s)+\frac{3}{4}}\}$$

$$=\frac{1}{2}L^{-1}\{\frac{1}{(s-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\}-\frac{1}{2}L^{-1}\{\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\}$$

$$=\frac{1}{2}\ e^{\frac{1}{2}t}L^{-1}\{\frac{1}{s^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\}-\frac{1}{2}\ e^{-\frac{1}{2}t}L^{-1}\{\frac{1}{s^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\}$$

$$=\frac{1}{2}\ e^{\frac{1}{2}t}\ \frac{\sin(\frac{\sqrt{3}}{2})t}{\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{1}{2}\ e^{-\frac{1}{2}t}\ \frac{\sin(\frac{\sqrt{3}}{2})t}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=(\frac{2}{\sqrt{3}})\frac{e^{\frac{1}{2}t}-e^{-\frac{1}{2}t}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t=\frac{2}{\sqrt{3}}\sinh\frac{t}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

$$7)\ L^{-1}\{\frac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}\}$$

$$\frac{d}{ds}[\frac{1}{s^2+4s+5}] = \frac{-(2s+4)}{(s^2+4s+5)^2}$$

$$\frac{s+2}{(s^2+4s+5)^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}[\frac{1}{s^2+4s+5}] = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\bar{f}(s)$$

$$\because L^{-1}\{\bar{f}(s)\} = f(t),\ L^{-1}\{-\frac{d}{ds}\bar{f}(s)\} = tf(t).$$

$$f(t) = L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+4s+5)}\} = L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+4s+4)+1}\}$$

$$= L^{-1}\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\} = e^{-2t}\sin t$$

$$\therefore L^{-1}\{\frac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}\} = \frac{1}{2}tf(t) = \frac{1}{2}te^{-2t}\sin t.$$

$$8)\ L^{-1}\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\},\quad (L^{-1}\{\frac{\bar{f}(s)}{s}\} = \int_0^t f(t)dt)$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+1)}\} = \sin t \Rightarrow L^{-1}\{\frac{1}{s(s^2+1)}\} = \int_0^t \sin t\, dt = 1-\cos t$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\} = \int_0^t (1-\cos t)dt = t-\sin t$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\} = \int_0^t (t-\sin t)dt = \frac{t^2}{2}+\cos t-1.$$

$$9)\ L^{-1}\{\frac{2s^2+10s}{(s^2-2s+5)(s+1)}\}$$

$$\frac{2s^2+10s}{(s^2-2s+5)(s+1)} = \frac{2s^2+10s}{((s-1)^2+4)(s+1)} = \frac{A(s-1)+B}{(s-1)^2+4)} + \frac{C}{s+1}$$

اكمل الحل...