

توزيع مربع كاي: χ^2 - Chi-square distribution

أن مربع كاي χ^2 يعرف على أنه مجموع المربعات لعدد من المتغيرات المستقلة كل منها موزع توزيعاً معتدلاً بمتوسط حسابي يساوي "صفر" وأنحراف يساوي "واحد" ، والصيغة التي تهمننا في هذا التوزيع المعادلة الآتية:

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$$

إذ أن: O يمثل القيمة أو العدد المشاهد (Observed) و E يمثل العدد أو القيمة المتوقعة (Expected) و Σ هي مجموع. أما توزيع χ^2 فإنه يحدد بعد معرفة درجات الحرية (df) والتي تحسب وفق المعادلة:

$$df = k - 1$$

حيث ان k يمثل عدد الفئات أو المجموعات أو المظاهر (Classes).
وبما أن توزيع χ^2 هو توزيع نظري ، فإن هنالك جداول تعطى (أستناداً الى درجات الحرية المعينة) وعلى مستوى 0.05 و 0.01 للحكم على معنوية الفروق بين القيم ، وأن الصفات التي يتم تحليلها بأستعمال هذا الاختبار هي الصفات التي يتم قياسها كنسبة مئوية.
فإذا كان لدينا فئتان (مثلاً المصابة و السليمة مثلاً)، هنا ستكون درجات الحرية "درجة حرية واحدة" فقط (أي أن $df = 2 - 1 = 1$) ، وإذا كان لدينا ثلاث مظاهر أو فئات (مثلاً، كثيرة - ومتوسطة - وقليلة) فإن درجات الحرية تكون 2 فقط ($df = 3 - 1 = 2$) وهكذا.
ملاحظة: قد تكون الأعداد المتوقعة متوفرة لدينا وقد تكون افتراضية (ففي كثير من الأحيان نتوقع حالة معينة بنسبة 50% لذلك يتم اعتماد 0.50 للمتوقعة) في حين يجب أن تتوفر لدينا الأعداد المشاهدة بهدف تطبيق القانون.

مثال 1:

تم الادعاء أن النسبة الحقيقية للاصابة بمرض السل الرئوي بين الاشخاص في قرية معينة هي 10%، فلو أخذنا عينة عشوائية مكونة من 100 شخص ووجد بينهم 32 شخص مصاب ، فهل نقبل ذلك الادعاء.

الحل: أن فرضية العدم هي:

$$H_0 : p = 10 \%$$

$$H_1 : p \neq 10 \%$$

$$O = 32 / 100 = 32 \%$$

$$E = 10 \%$$

يحل المثال وفق الاتي:

المجموع (n)	سليم (n-x)	مصاب (x)	الاعداد
100	68	32	O _i المشاهدة
100	90	10	E _i المتوقعة

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$$

$$\chi^2 = \frac{(32 - 10)^2}{10} + \frac{(68 - 90)^2}{90}$$

$$\chi^2 = 48.4 + 5.38$$

$$\chi^2 = 53.78$$

وبما أن لدينا فئتين فقط (المصابة والسليمة) فإن درجات الحرية "درجة حرية واحدة" وعند الرجوع الى الجداول الخاصة بمربع كاي نجد أن قيمة χ^2 لجدولية هي (3.84) على مستوى معنوية 5% وانها (6.635) لمستوى المعنوية 1%. وبما أن قيمة χ^2 المحسوبة (53.78) تزيد علة قيمة χ^2 الجدولية (6.635) فإن فرضية العدم ترفض على مستوى 1%

مثال 2:

تم الادعاء ان النسبة الحقيقية للطلبة المستفيدين من التطبيق الصيفي في قسم علوم الحياة (30%) ، فلو أختيرت عينة عشوائية مكونة من 24 طالب ووجد بينهم (6) طلبة مستفيدين من التطبيق الصيفي ، فهل يقبل الادعاء.

الحل:

$$H_0 : p = 30 \%$$

$$H_1 : p \neq 30 \%$$

$$E_i = 30 / 24 * 100 = 7.2$$

أي أن النسبة المتوقعة للاستفادة (7.2%) وبالتالي النسبة المتوقعة لغير المسفيدين (16.8%) أي المجموع 24 .

الاعداد	مستفيد	غير مستفيد (n-x)	المجموع (n)
المشاهدة O_i	6	18	24
المتوقعة E_i	7.2	16.8	24

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$$

$$\chi^2 = \frac{(6 - 7.2)^2}{7.2} + \frac{(18 - 16.8)^2}{16.8}$$

$$\chi^2 = 0.20 + 0.09$$

$$\chi^2 = 0.29$$

وبما أن لدينا فئتين فقط (المستفيدين ، غير المستفيدين) فإن درجات الحرية "درجة حرية واحدة" وعند الرجوع الى الجداول الخاصة بمربع كاي نجد أن قيمة χ^2 لجدولية هي (3.84) على مستوى معنوية 5 % وهي أعلى من المحسوبة (0.29) لذلك يتم قبول الفرضية.

مثال 3:

لو علمت أن الحشرات الموجودة في موقع واحد تعود الى ثلاث أنواع وهي (A و B و C) ، وتوزيعها المفترض (1 : 3 : 5) على التوالي . أي أن كل حشرة من النوع (A) تقابلها ثلاث حشرات من النوع (B) و 5 حشرات من النوع (C). فلو حصلنا على عينة مكونة من 180 حشرة ووجدنا بينها (15) حشرة من النوع A و (72) حشرة من النوع B و المتبقي البالغ (93) حشرة من النوع C.

الحل:

هنا لدينا الاعداد المشاهدة وعلينا أن نستخرج الاعداد المتوقعة ثم نطبق القانون.

$$9 = 5 : 3 : 1$$

العدد المتوقع من النوع A هو:

$$E_A = (180) (1/9) = 20$$

العدد المتوقع من النوع B هو:

$$E_B = (180) (3/9) = 60$$

العدد المتوقع من النوع C هو:

$$E_C = (180) (5/9) = 100$$

المجموع	النوع C	النوع B	النوع A	الاعداد
180	93	72	15	المشاهدة O _i
180	100	60	20	المتوقعة E _i

وعليه فإن:

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$$

$$\chi^2 = \frac{(15 - 20)^2}{20} + \frac{(72 - 60)^2}{60} + \frac{(93 - 100)^2}{100}$$

$$\chi^2 = 1.25 + 2.40 + 0.49$$

$$\chi^2 = 4.14$$

وبما أن عدد الفئات هو (3) لذلك درجات الحرية تكون (2) ناتجة من 3-1 ، وعند العودة للجداول مربع كاي نجد أن القيمة الجدولية (5.991) وهي أعلى من المحسوبة (4.14) لذا فرضية العدم يتم قبولها، أي أن توزيع الحشرات (5 : 3 : 1).