طرق حل نماذج البرمجة الخطية:

1- طريقة الرسم البياني The Graphical Method
2- طريقة التبسيط السمبلكس The Simplex Method

1- الطريقة البيانية لحل مسائل البرمجة الخطية Graphic Solution Of LP Problems

تعتبر طريقة الرسم البياني طريقة سهلة وبسيطة وواضحة في معالجة مشاكل البرمجة الخطية وخاصة تلك المشاكل التي لا يزيد فيها عدد المتغيرات عن اثنين فقط والتي تحتوي على عدد بسيط من القيود.

كما تفيد طريقة الرسم البياني كمقدمة لدراسة طرق وأساليب أخرى أكثر تعقيدا في حل مشاكل البرمجة الخطية مثل السمبلكس

مثال (1) في حالة وجود قيدين:

اوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{MAX } Z = 7X_1 + 5X_2$$

$$\text{SUBJECT TO:} \quad 4X_1 + 3X_2 \le 240$$

$$2X_1 + X_2 \le 100$$

$$X_1 , X_2 \ge 0$$

الحل

1– نحول المتباينات إلى معادلات

$$4X_1 + 3X_2 = 240$$

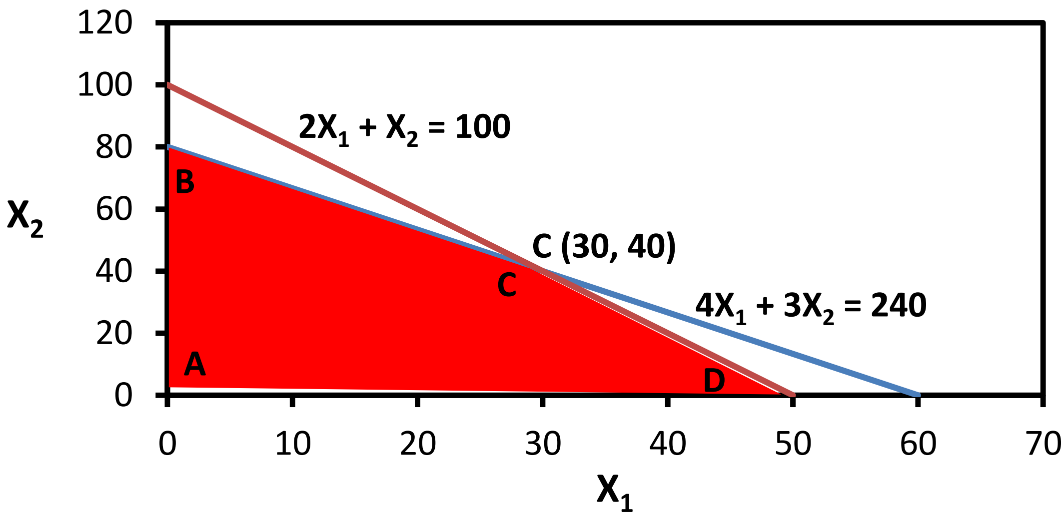
$$2X_1 + X_2 = 100$$

2- نحدد نقطتين على كل مستقيم (نقاط تقاطع كل مستقيم مع المحاور) لغرض رسمه

Straight (1)	
$4X_1 + 3X_2 = 240$	
X_1	X_2
0	80
60	0

Straight (2)	
$2X_1 + X_2 = 100$	
X_1	X_2
0	100
50	0

3- نرسم الرسم البياني ونحدد منطقة الحدود الممكنة



4– نوجد نقاط التقاطع المستقيمين بحل المعادلتين1 و 2 جبريا

$$4X_1 + 3X_2 = 240$$

$$2X_1 + X_2 = 100$$

نقطة التقاطع هي C (30,40)

5– اختبار منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف:

	النقطة	$Max\ Z = 7X_1 + 5X_2$	النتيجة
A	0,0	7(0) + 5(0)	0
B	0,80	7(0) + 5(80)	400
C	30,40	7(30) + 5(40)	410
D	50,0	7(50) + 5(0)	350

نلاحظ من اختبار منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف:

النقطة C تمثل الحل الأمثل

السبب : لأنها أعلى رقم تحقق أكبر ربح

ممكن ونعوض عنها في معادلات القيود لمعرفة الاستغلال الأمثل للموارد المتاحة

القرار الإداري:

يجب إنتاج 30 وحدة من المنتج الأول $X_1 = 30$

وانتاج 40 وحدة من المنتج الثاني $X_2 = 40$

لكي يحقق أكبر ربح ممكن بمقدار 410 دينار $Z = 410$

مثال (2) فى حالة وجود ثلاث قيود:

اوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية التالية:

$$MAX\ Z = X_1 + 2X_2$$

$$\text{SUBJECT TO:} \quad X_1 + X_2 \leq 20$$

$$2X_1 + X_2 \leq 30$$

$$X_1 \leq 25$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل:-

1- نحول المتباينات إلى معادلات

$$X_1 + X_2 = 20$$

$$2X_1 + X_2 = 30$$

$$X_1 = 25$$

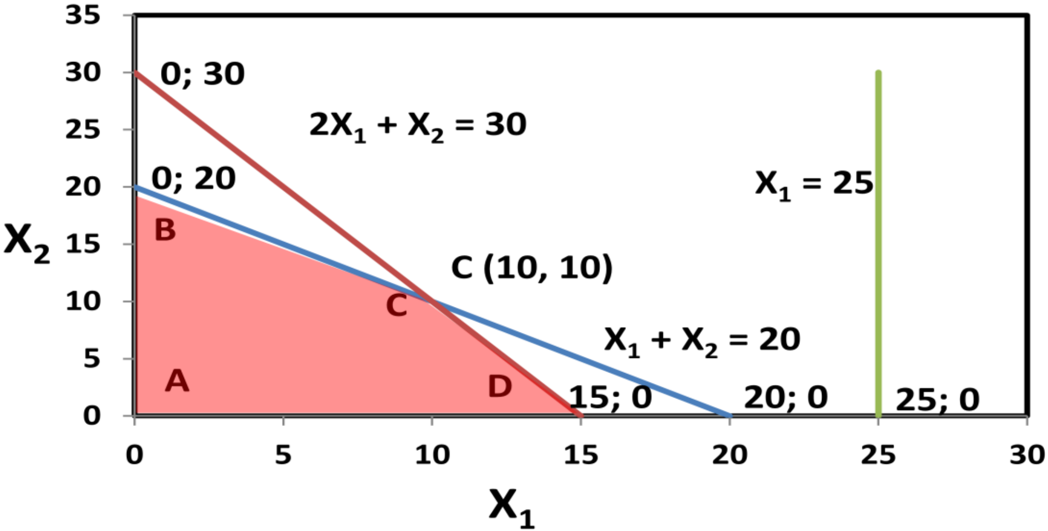
2- نحدد نقطتين على كل مستقيم لغرض رسمه

Straight (1)	
$X_1 + X_2 = 20$	
X_1	X_2
0	20
20	0

Straight (2)	
$2X_1 + X_2 = 30$	
X_1	X_2
0	30
15	0

Straight (3)	
$X_1 = 25$	
X_1	X_2
25	0
25	30

3- نرسم الرسم البياني ونحدد منطقة الحدود الممكنة



4- نوجد نقط التقاطع المستقيمين بحل المعادلتين1 و 2 جبريا

$$X_1 + X_2 = 20$$

$$2X_1 + X_2 = 30$$

نقطة التقاطع C (10,10)

5- اختبار منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف:

	النقطة	Max $Z = X_1 + 2X_2$	النتيجة
A	0,0	$1(0) + 2(0)$	0
B	0,20	$1(0) + 2(20)$	40
C	10,10	$1(10) + 2(10)$	30
D	15,0	$1(15) + 2(0)$	15

نلاحظ من اختبار منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف:
النقطة B تمثل الحل الأمثل
السبب : لأنها أعلى رقم تحقق أكبر ربح
ممكن ونعوض عنها في معادلات القيود لمعرفة الاستغلال الأمثل للموارد المتاحة

القرار الإداري:
يجب إنتاج 0 وحدة من المنتج الأول $X_1 = 0$
وإنتاج 20 وحدة من المنتج الثاني $X_2 = 20$
لكي يحقق أكبر ربح ممكن بمقدار 40 دينار $Z = 40$

مثال 3 : فى حالة وجود أربع قيود

اوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية:

$$MAX\ Z = 12\ X_1 + 14\ X_2$$

$$\text{SUBJECT TO:} \quad 2\ X_1 + 3\ X_2 \leq 24$$

$$2\ X_1 + X_2 \leq 16$$

$$X_1 \leq 7$$

$$X_2 \leq 6$$

$$X_1\ ,\ X_2 \geq 0$$

الحل:-

1- نحول المتباينات إلى معادلات

$$2X_1 + 3\ X_2 = 24$$

$$2X_1 + X_2 = 16$$

$$X_1 = 7$$

$$X_2 = 6$$

2- نحدد نقطتين على كل مستقيم لغرض رسمه

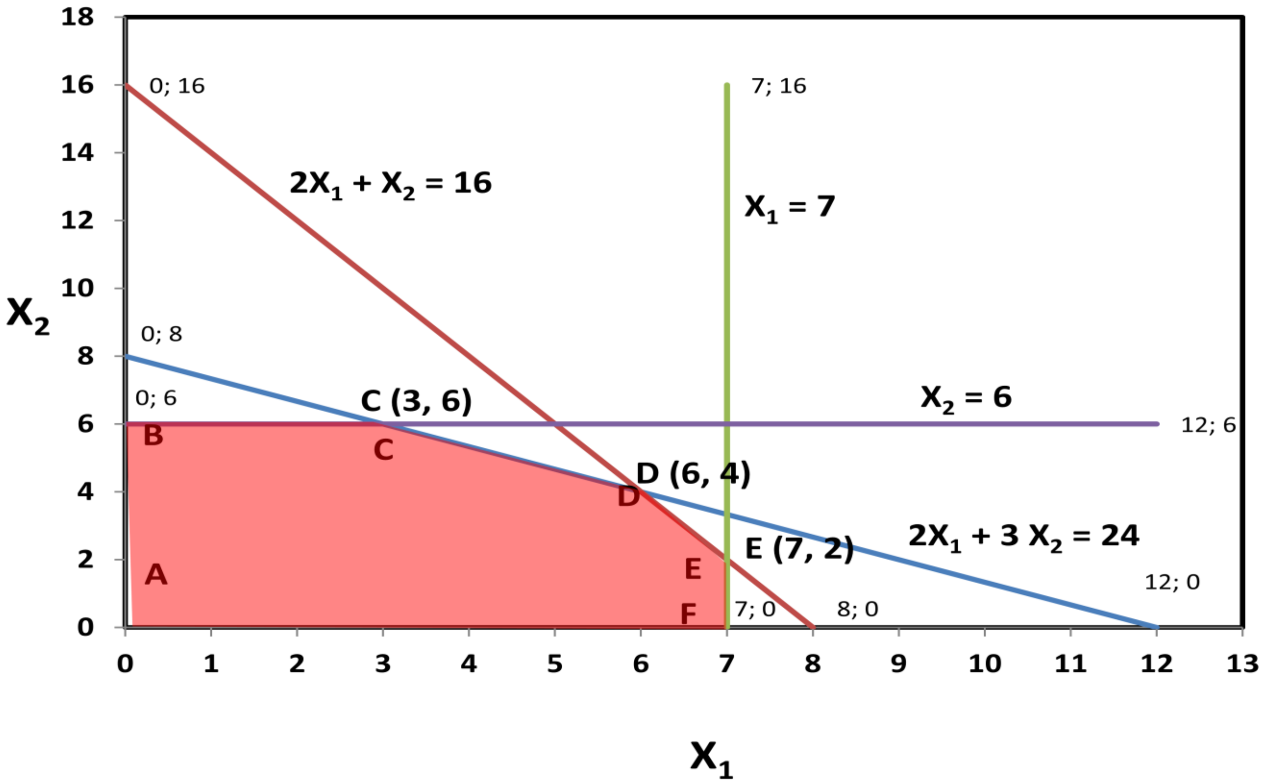
Straight (1)	
$2X_1 + 3\ X_2 = 24$	
X_1	X_2
0	8
12	0

Straight (2)	
$2X_1 + X_2 = 16$	
X_1	X_2
0	16
8	0

Straight (3)	
$X_1 = 7$	
X_1	X_2
7	0
7	16

Straight (4)	
$X_2 = 6$	
X_1	X_2
0	6
12	6

3- نرسم الرسم البياني ونحدد منطقة الحدود الممكنة



4- نوجد نقط التقاطع المستقيمات

معادلة المستقيمات	$2X_1 + 3X_2 = 24$ $X_2 = 6$	$2X_1 + 3X_2 = 24$ $2X_1 + X_2 = 16$	$2X_1 + X_2 = 16$ $X_1 = 7$
نقطة التقاطع	C (3,6)	D (6,4)	E (7,2)

5- اختبار منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف:

	النقطة	$\text{Max } Z = 12X_1 + 14X_2$	النتيجة
A	0,0	12 (0) + 14 (0)	0
B	0,6	12 (0) + 14 (6)	84
C	3,6	12 (3) + 14 (6)	120
D	6,4	12 (6) + 14 (4)	128
E	7,2	12 (7) + 14 (2)	112
F	7,0	12 (7) + 14 (0)	84

نلاحظ من اختبار منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف:

النقطة D تمثل الحل الأمثل

السبب : لأنها أعلى رقم تحقق أكبر ربح

ممكن ونعوض عنها في معادلات القيود لمعرفة الاستغلال الأمثل للموارد المتاحة

القرار الإداري:

يجب إنتاج 6 وحدة من المنتج الأول $X_1 = 6$

وانتاج 4 وحدة من المنتج الثاني $X_2 = 4$

لكي يحقق أكبر ربح ممكن بمقدار 128 دينار $Z = 128$

نموذج برمجة خطية باستخدام الطريقة البيانية فى حالة تقليل التكاليف

مثال 4

اوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية التالية:

$$\text{Min } Z = 5X_1 + 6X_2$$

$$\text{SUBJECT TO:} \quad 2X_1 + X_2 \le 20$$

$$X_1 + 3X_2 \le 30$$

$$X_1 , X_2 \ge 0$$

الحل:-

1- نحول المتباينات إلى معادلات

$$2X_1 + X_2 = 20$$

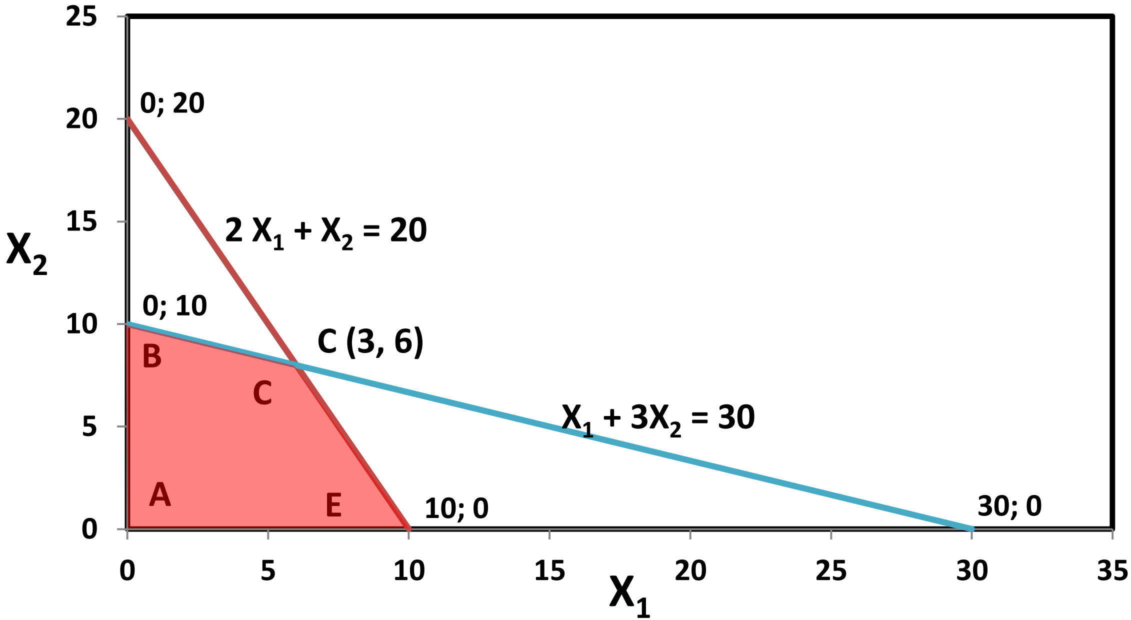
$$X_1 + 3X_2 = 30$$

2- نحدد نقطتين على كل مستقيم لغرض رسمه

Straight (1)	
$2X_1 + X_2 = 20$	
X_1	X_2
0	20
10	0

Straight (2)	
$X_1 + 3X_2 = 30$	
X_1	X_2
0	10
30	0

3- نرسم الرسم البياني ونحدد منطقة الحدود الممكنة



4- نوجد نقط التقاطع المستقيمات : نقطة تقاطع المستقيمين بحل المعادلتين1 و 2 جبريا

$$2X_1 + X_2 = 20$$

$$X_1 + 3X_2 = 30$$

نقطة التقاطع C (6,8)

5- اختبار منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف:

	النقطة	$Min\ Z = 5X_1 + 6X_2$	النتيجة
A	0,0	5(0) + 6(0)	0
B	0,10	5(0) + 6(10)	60
C	6,8	5(6) + 6(8)	78
D	10,0	5(10) + 6(0)	50

نلاحظ من اختبار منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف:
النقطة D تمثل الحل الأمثل
السبب : لأنها أعلى رقم تحقق أقل تكاليف
ممكن ونعوض عنها في معادلات القيود لمعرفة الاستغلال الأمثل للموارد المتاحة

القرار الإداري:
يجب إنتاج 10 وحدة من المنتج الأول $X_1 = 10$
وانتاج 0 وحدة من المنتج الثاني $X_2 = 0$
لكي يحقق اقل تكاليف ممكن بمقدار 50 دينار $Z = 50$

Example 1

Find the optimal solution for the following LP model by using graphical:

Objective function Max $Z = \$10X_1 + \$40X_2$

S.t $\quad X_1 + 2X_2 \leq 100$

$\quad\quad X_1 + 5X_2 \leq 150$

Non negative $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$

Solution:

1- Transfer restrictions to equal as follows

The first straight $\quad X_1 + 2X_2 = 100$

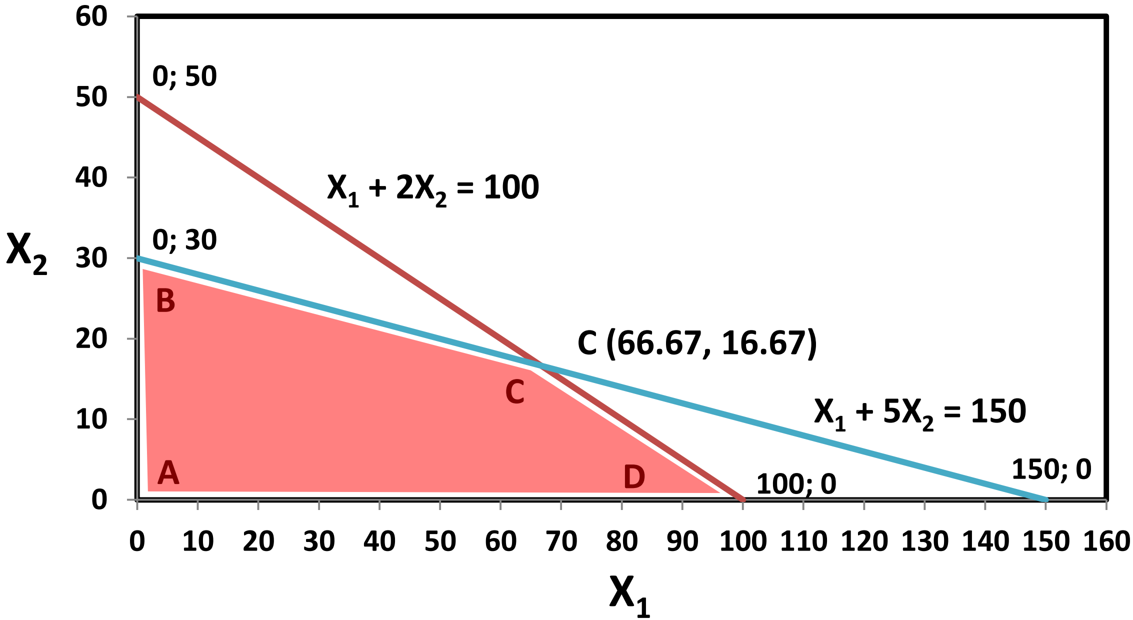
The second straight $\quad X_1 + 5X_2 = 150$

2- Determine of two points for each straight :

Straight (1)	
X_1	X_2
0	50
100	0

Straight (2)	
X_1	X_2
0	30
150	0

3- Draw the first and second straight



4- Point C (66.7,16.7) represent the intersection of the straight 1 and the straight 2. Can be determined by solving the two equations using any method.

X_1=200\3=66.7 and X_2=50\3=16.7

5- The solution is the shaded area (A B C D) shaded and the objective function is tested at these Extreme points, (A B C D)

Point	X_1	X_2	$Z = 10X_1 + 40X_2$
A	0	0	0
B	100	0	1000
C	66.7	16.7	1335
D	0	30	1200

Example 3

Find the optimal solution Min $Z = 5X + 2Y$

S.t. $2X + 5Y \geq 10$

$4X - Y \geq 12$

$X + Y \geq 4$

$X, Y \geq 0$

Solution:

1- Transfer restrictions to equal as follows

The first straight $2X + 5Y = 10$

The second straight $4X - Y = 12$

The third straight $X + Y = 4$

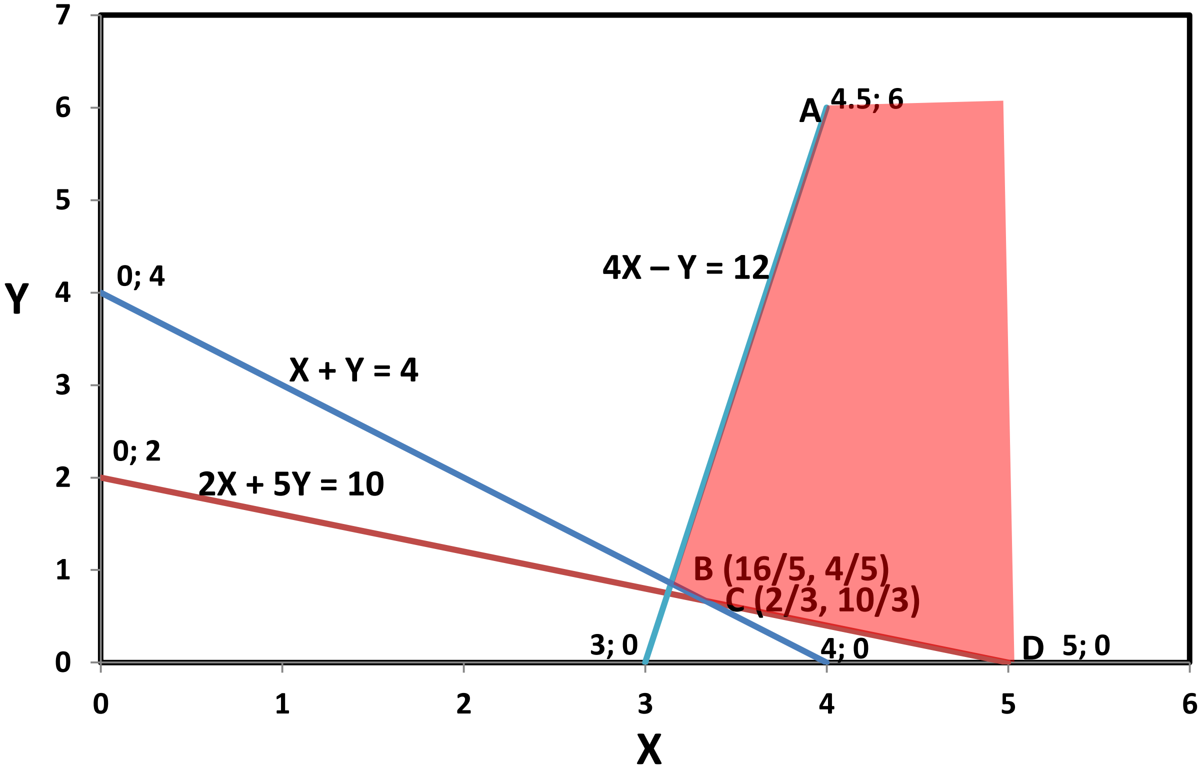
2- Determine two points for each straight :

Straight (1)	
$2X + 5Y = 10$	
X	Y
0	2
5	0

Straight (2)	
$4X - Y = 12$	
X	Y
0	-12
3	0

Straight (3)	
$X + Y = 4$	
X	Y
0	4
4	0

3- Draw the all straights



4- Lines intersections Points

The intersection of straight 2 (X+Y=4) and the straight 3 (4X-Y=12) is point B(16/5,4/5)
The intersection of straight 1 (2X+5Y=10) and the straight 2 (X+Y=4) is point C(2/3,10/3)

5- The solution is the shaded area (A B C) shaded and the objective function is tested at these Extreme points, (A, B, C)

Point	X	Y	Z = 5X + 2Y
B	16/5	4/5	17.6
C	2/3	10/3	10
D	5	0	25

Lowest Z Value at the point C (2/3,10/3), must produce to achieve a Min. cost of $ 10