Al Basrah university
college of Pharmacy

Mathematics and Statistics\ first stage

Dr . Rana Hasan

30/1/ 2021

Indefinite Integral

***Def :** If the function $f(x)$ is a derivative ,then the set of all antiderivatives of f is called the Indefinite Integral of f ,denoted by the symbols $\int f(x)dx$.*

Basic Integralion formulas:

$$1.\int x^n dx = \frac{x^n+1}{n+1} + c\ ,\ n \neq -1\ .$$

Examples:

- $\int 6\ dx = 6x + c$
- $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c.$
- $\int x^{-6} dx = \frac{x^{-5}}{-5} + c.$
- $\int x^{1/2}\ dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + c.$

☺ملاحظة ١ عند التكامل كل دالة جذرية يجب أن تحول إلى دالة اسية

Example:

$$\int \sqrt[5]{x^2}\ dx = \int x^{2/5}\ dx = \frac{5}{7}x^{7/5} + c$$

$$= \frac{5}{7}\sqrt[5]{x^7} + c.$$

$2.\int k.f(x)dx = k.\int f(x)dx$.

Examples:

- $\int 5x^2 dx = 5\frac{x^3}{3} + c.$
- $\int 9\sqrt{x}\,dx = 9\int x^{1/2}\ dx$

  $= 9.\frac{2}{3}x^{3/2} + c$

  $= 6\sqrt{x^3} + c.$

ملاحظة٢ كل دالة في المقام مرفوعة إلى أس نرفعها إلى البسط مع تغير إشارة الأس

Example:

- $\int \frac{8}{x^6}dx = \int 8x^{-6}\,dx = \frac{8}{-5}x^{-5} + c.$
- $\int \frac{25}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int 25\,x^{-2/3}\ dx$

$$= 25\frac{x^{1/3}}{\frac{1}{3}} + c$$

$$= 75\sqrt[3]{x + c}$$

$$3.\int\big(f(x) \mp g(x)\big)dx = \int f(x)dx \mp \int g(x)dx$$

Examples:

- $\int(3x^2 + 6x + 8)dx = 3\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} + 8x + c.$
- $\int(3\sqrt{x} + 6\sqrt[3]{x^2}\,)dx = \int 3x^{1/2}\,dx + \int 6x^{2/3}\,dx$

$$= 3\frac{2}{3}x^{3/2} + 6\,\frac{3}{5}x^{5/3} + c$$

$$= 2\sqrt{x^3} + \frac{18}{5}\sqrt[3]{x^5} + c.$$

ملاحظة٣ لا يوجد حاصل ضرب دالتين في التكامل وإنما نجري عملية توزيع الضرب

Example :

- $\int(3x - 1)(x + 5)dx = \int\big(3x^{2+} + 15x - x - 5\big)dx$

$$= 3\frac{x^3}{3} + 14\frac{x^2}{2} - 5x + c = x^3 + 7x^2 - 5x + c.$$

$$4\,.\int(f(x))^n\,.\,f'(x)dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + c\ \ .$$

Examples:

- $\int (x^2+3)^2 * 2x\,dx = \frac{(x^2+3)^3}{3} + c.$

- $\int (3x^2+8x+5)^6 * (3x+4)\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int (3x^2+8x+5)^6 * (6x+8)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(3x^2+8x+5)^7}{7} + c$$

$$= \frac{1}{14}(3x^2+8x+5)^7 + c.$$

- $\int (3x-3)\sqrt{x^2-2x}\;dx$

$$= \int 3(x-1)(x^2-2x)^{1/2}\;dx$$

$$= \frac{3}{2}\int 3(x^2-2x)^{1/2}.(2x-2)\;dx$$

$$= \frac{3}{2}\frac{(x^2-2x)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{3}{2}.\frac{2}{3}\sqrt{(x^2-2x)^3} + c$$

$$= \sqrt{(x^2-2x)^3} + c.$$

ملاحظة ٤ أذا كانت مشتقة داخل القوسين غير موجودة خارج القوس هناك احتمالان

الاحتمال الأول استخراج عامل مشترك كما في الأمثلة التالية :

Examples:

- $\int \sqrt[7]{2x^9 - 3x^7}\, dx = \int \sqrt[7]{x^7(2x^2 - 3)}\ dx$

$$= \int (2x^2 - 3)^{1/7} (x^7)^{1/7}\ dx$$

$$= \int (2x^2 - 3)^{1/7} (x)^{7/7}\ dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (2x^2 - 3)^{1/7}\ (4x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\ \frac{(2x^2 - 3)^{8/7}}{\frac{8}{7}} + c$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{7}{8}\ (2x^2 - 3)^{8/7}\ + c$$

$$= \frac{7}{32}\sqrt[7]{(2x^2 - 3)^8} + c.$$

- $\int\ (2x^6 - 3x)^4 dx$

$$= \int\ \left(x(2x^5 - 3)\right)^4 dx = \int x^4(2x^5 - 3)^4 dx$$

$$= \frac{1}{10}\int (2x^5 - 3)^4 (10x^4) dx$$

$$= \frac{1}{10}\ \frac{(2x^5 - 3)^5}{5} + c$$

$$= \frac{1}{50}\left(2x^5 - 3\right)^5 + c.$$

الاحتمال الثاني اذا كانت الدالة داخل القوس على شكل $ax^2 + bx + c$

نتبع القاعدة التالية: $\left(\sqrt{\text{الحد الثالث}} \mp \sqrt{\text{الحد الاول}}\right)^2$ **كما في المثال التالي:**

Example:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2 + 16x + 64}} = \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(x+8)^2}} = \int (x+8)^{-2/5}\, dx$$

$$= \frac{(x+8)^{3/5}}{\frac{3}{5}} + c = \frac{5}{3}\sqrt[5]{(x+8)^3} + c.$$

ملاحظة ٥ إذا كانت درجة البسط اكبر أو تساوي درجة المقام نستخدم طرق التحليل والاختصار

Example:

- $\int \frac{x^3+1}{x^2-x+1} dx = \int \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x^2-x+1)} dx$

$$= \int (x+1)dx = \frac{x^2}{2} + x + c$$

ملاحظة٦ إذا كانت درجة البسط اقل من درجة المقام نجزئ الأسس كما في المثال التالي

Examples:

- $$\int \frac{x^5}{(x+1)^7} dx = \int \frac{x^5}{(x+1)^5} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} dx$$

$$= \int \left(\frac{x}{x+1}\right)^5 \cdot \frac{1}{(x+1)^2} dx$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)^6}{6} + c.$$

- $$\int \frac{x^3}{(x+1)^5} dx = \int \frac{x^3}{(x+1)^3} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} dx$$

$$= \int \left(\frac{x}{x+1}\right)^3 \cdot \frac{1}{(x+1)^2} dx$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{x}{x+1}\right)^4 + c$$