الفصل الثامن

معادلات ماكسويل وانتشار الموجات الكهرومغناطيسية في الاوساط المختلفة

تمهيـــد :

لقد تطرقنا في فصول سابقة من هذا الكتاب الى ظواهر فيزيائية لها علاقة بالشحنات الكهربائية المستقرة والتي تسبب وجود مجال كهربائي مستقر او شحنات كهربائية متحركة بسرعة ثابتة (تيار مستمر) والتي يتسبب عنها مجال مغناطيسي مستقر • لقد وجدنا أثناء دراستنا هذه أن :

$$\nabla \times \bar{E} = 0 \quad , \quad \nabla \times \bar{B} = \mu_0 J \qquad (1\text{-}8)$$

وسوف نتطرق في هذا الفصل الى ظواهر فيزيائية لهـا علاقـة بالمجالات الكهربائية والمغناطيسية عندما تكون هذه المجالات متغيرة بالنسبة للزمن وسنجد في دراستنا لهذه الظواهر أن العلاقة (8-1) لا تصح في صيغتها الحاليـة لدراسة هذه المجالات الكهربائية والمغناطيسية • ان دراستنا في هذا الفصل تنقسم الى جزئين الجـزء الاول هو دراسة معادلات ماكسويل ، أما الجزء الثاني فهو استخدام هذه المعادلات لاشتقاق معادلة الموجة ثم حلها لدراسة انتشار الموجات الكهرومغناطيسية المستوية في الاوساط المختلفة •

(2-8) معادلات ماكسويل :- Maxwell's Equations

ينص قانون الحث لفاراداي كما جاء في الفصل السادس من هذا الكتاب أن القوة الدافعة الكهربائية المحتثة في دائرة تساوي التناقص الزمني للفيض المغناطيسي الذي يقطع هذه الدائرة والصيغة الرياضية لهذا القانون هي :

$$\mathcal{E} = -\frac{d\psi}{dt}$$

كما ان القوة الدافعة الكهربائية المحتثة تساوي التكامل الخطي المغلق للمجـال الكهربائي $\bar{E}$ في تلك الدائرة :

$$\mathcal{E} = \oint \bar{E} \cdot d\bar{l}$$

Scanned by CamScanner

ومعنى تغير الفيض المغناطيسي بالنسبة للزمن في قانون الحث لفاراداي هو اما أن تتغير المساحة التي يقطعها المجال المغناطيسي بالنسبة للزمن أو أن تتغير كثافة الفيض المغناطيسي $\bar{B}$ بالنسبة للزمن حيث أن $\psi = \int_s \bar{B}\cdot d\bar{s}$ ، فاذا كانت $\bar{B}$ متغيرة بالنسبة للزمن (وهو موضوع دراستنا في هذا الفصل) فان قانون الحث لفاراداي يكتب كالاتي :

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_s \bar{B}\cdot d\bar{s} = -\int_s \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\cdot d\bar{s}$$

وذلك لان التفاضل بالنسبة للزمن ليست له علاقة بتغير السطح • وبهذا يمكن أن نحصل على العلاقة التالية :

$$\oint \bar{E}\cdot d\bar{l} = -\int_s \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\cdot d\bar{s} \qquad (2-8)$$

وباستعمال مبرهنة ستوك نحصل على :

$$\oint \bar{E}\cdot d\bar{l} = \int_s \nabla\times\bar{E}\cdot d\bar{s} = -\int \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\cdot d\bar{s} \qquad (3-8)$$

وبما أن التكامل السطحي للطرفين متساو نستنتج من ذلك أن :

$$\nabla\times\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \qquad (4-8)$$

وتسمى هذه العلاقة بقانون الحث لفاراداي في صيغته التفاضلية وهي اولى معادلات ماكسويل •

لقد تطرقنا في الفصل الخامس الى أن التكامل الخطي لكثافة الفيض المغناطيسي $\bar{B}$ حول مسار مغلق يساوي حاصل ضرب μ_0 في التيار الذي يحتويه المسار المغلق وهذا هو قانون أمبير وصيغته التكاملية كما يلي :

$$\oint \bar{B}\cdot d\bar{l} = \mu_0 I = \mu_0\int_s \bar{J}\cdot d\bar{s}$$

ويمكن كتابة هذا القانون بشكل آخر بعد استعمال مبرهنة ستوك وهو كما يلي

$$\oint \bar{B}\cdot d\bar{l} = \int_s (\nabla\times\bar{B})\cdot d\bar{s} = \mu_0\int_s \bar{J}\cdot d\bar{s}$$

Scanned by CamScanner

ومن هذا نستنتج أن :

$$\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J}$$

وعندما نأخذ تفرق طرفي المعادلة الاخيرة نحصل على :

$$\nabla \cdot \bar{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\nabla \times \bar{B}) = 0$$

لان تفرق أي دوار يساوي صفرا . وبالرجوع الى معادلة حفظ الشحنة والتي مر ذكرها في البند (4-5) حيث أن : $\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = -\nabla \cdot \bar{J}$
نستنتج من ذلك أن $\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0$. لقد كان ماكسويل اول من أكد أن هذه الحقيقة تصح فقط للمجالات المستقرة وهي لا تصح في حالة المجالات المتغيرة مع الزمن . لذلك أقترح ماكسويل أضافة حد آخر الى قانون أمبير لكي يمكن استعماله في جميع الحالات ولنفرض أن هذا الحد هو x وبذلك نكتب قانون أمبير بالشكل التالي :

$$\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J} + \bar{x} \qquad (5-8)$$

$$\nabla \cdot \bar{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\nabla \times \bar{B} - \bar{x}) = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \bar{x} = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t}$$

لكن

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \bar{D}) = \nabla \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

∴ مما تقدم نستنتج أن:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right) = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \bar{x} \qquad (6-8)$$

$$x = \mu_0 \frac{\partial D}{\partial t}$$

وباستعمال هذه العلاقة الاخيرة في المعادلة (5-8) نحصل على :

$$\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \left(\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right)$$

او ان:

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \qquad (7-8)$$

ان اضافة الحد $\frac{\partial D}{\partial t}$ الذي سمي فيما بعد بكثافة تيار الازاحة يعد الاضافة المهمة

Scanned by CamScanner

التي ساهم بها ماكسويل في دراسة موضوع الكهربائية والمغناطيسية . ومعنى العلاقة الاخيرة هي أن المجال المغناطيسي لا ينشأ فقط من وجود تيار التوصيل الاعتيادي وانما قد ينشأ من وجود مجال كهربائي متغير كما هي الحالة عليه في تغير المجال الكهربائي بين لوحي متسعة ذات لوحين متوازيين في حالة شحن المتسعة ، تفريغها أو ربطها بدائرة تيار متناوب تتغير فيها قيمة المجال الكهربائي بين لوحي المتسعة بصورة مستمرة . والمعادلة (8-7) تعد ثاني معادلات ماكسويل . لقد مر علينا في البند (5-11) أن :

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0$$

وهي المعادلة (5-66) وتعد هذه المعادلة معادلة ماكسويل الثالثة أما المعادلة الرابعة من معادلات ماكسويل فهي المعادلة التالية :

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho_f$$

والتي مر ذكرها في الفصل الثالث حيث تمثل ρ_f كثافة الشحنة الحجمية للشحنات الحرة في ذلك الوسط . وبذلك يمكن تلخيص معادلات ماكسويل كالاتي :

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \qquad (a)$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \qquad (b) \qquad (8\text{-}8)$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \qquad (c)$$

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho_f \qquad (d)$$

مع العلم أن $\bar{B} = \mu \bar{H}$ و $\bar{D} = \epsilon \bar{E}$ وان ϵ و μ هما سماحية الوسط ونفاذية الوسط على التوالي.

(8-3) معادلة الموجة غير المتجانسة لكل من الجهد العددي ϕ والجهد المتجهي $\bar{A}$.

عند التعامل مع مجالات كهربائية ومغناطيسية متغيرة مع الزمن فاننا لا يمكن أن نستعمل العلاقات الخاصة بالمجالات المستقرة وهذا ما أشرنا اليه في البندين (8-1) (8-2) ولا سيما أن $\nabla \times \bar{E}$ لا يساوي صفرا وأن $\nabla \times \bar{B}$ تختلف قيمته في حالة المجالات المتغيرة بالنسبة للزمن مما هو عليه في المجالات المستقرة . وبما أن العلاقة $\nabla \cdot \bar{B} = 0$ تصح في كل الحالات وان تفرق دوار أي متجه يساوي صفرا

Scanned by CamScanner

لذلك وكما اشرنا اليه سابقا في الفصل الخامس يمكن أن نعرف المتجه $\bar{B}$ بدلالة الجهد المتجهي كالاتي :-

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A}$$

وعلى هذا الاساس يمكن أن نعرف المتجه $\bar{E}$ بدلالة كل من الجهد العددي والجهد المتجهي كالاتي :-

$$\bar{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \qquad (9\text{-}8)$$

فاذا كانت $\bar{B}$ ثابتة القيمة فان $\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$ يساوي صفرا او تكون $\bar{E} = -\nabla \phi$

كما هي الحالة عليه في الكهربائية المستقرة ، اما اذا أخذنا دوار طرفي المعادلة (9-8) فاننا نحصل على معادلة ماكسويل الاولى كالاتي :

$$\nabla \times \bar{E} = -\nabla \times (\nabla \phi) - \nabla \times \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \qquad (10\text{-}8)$$

وبما ان $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$ وان $\nabla \times \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \bar{A} = \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$

فان المعادلة (10-8) تأخذ الشكل التالي الذي يمثل معادلة ماكسويل الاولى

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

لذلك فان هذين التعريفين يتفقان مع معادلتي ماكسويل الاولى والثانية والان لنبدأ باشتقاق معادلة الموجة لكل من $\bar{A}$ ، ϕ وذلك باستعمال العلاقتين (9-8) ، (10-8).

في المعادلة الثانية من معادلات ماكسويل فنحصل على :

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{A}) = \mu \bar{j}_f - \epsilon\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \phi + \epsilon\mu \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right) \qquad (11\text{-}8)$$

وباستعمال المتطابقة المتجهية

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{A}) = \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A}$$

فان المعادلة (11-8) تأخذ الشكل التالي :

$$\nabla^2 \bar{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla \cdot \bar{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = -\mu \bar{j}_f \qquad (12\text{-}8)$$

ومن المهم هنا أن نشير الى اننا يمكن ان نختار اي قيمة للمقدار $\nabla \cdot \bar{A}$ بحيث

Scanned by CamScanner

لا يؤثر على قيمة المتجه $\nabla \times \bar{A}$ حيث ان هذا المتجه يساوي $\bar{B}$ ، لذلك فاننـــا سوف نختار العلاقة التالية

$$\nabla \cdot \bar{A} = -\epsilon\mu \frac{\partial \phi}{\partial t} \qquad (13\text{-}8)$$

وتسمى هذه العلاقة بشرط لورنس (Lorentz Condition) وبذلك تاخذ المعادلة (12-8) الشكل التالي :

$$\nabla^2 \bar{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu \bar{j}_f \qquad (14\text{-}8)$$

وتسمى هذه العلاقة وهي معادلة تفاضلية غير متجانسة بمعادلة الموجه الخاصـــة بالجهد المتجهي $\bar{A}$. وفي حالة المجالات التي لا تعتمد على الزمن كحالة التيارات المستمرة تكون $\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = 0$ وتأخذ المعادلة (14-8) الشكل التالي :ـ

$$\nabla^2 \bar{A} = -\mu \bar{j}_f \qquad (15\text{-}8)$$

ولقد أشرنا في الفصل الخامس من هذا الكتاب في حالة التيارات المستمرة يكون .

$$\nabla \times \bar{B} = \mu \bar{j}_f$$

لذلك فان المعادلة (15-8) تأخذ الشكل التالي :

$$\nabla^2 \bar{A} = -\nabla \times \bar{B}$$

وهذا ما أشرنا اليه في الفصل الخامس . وبهذا نحصل على العلاقات المهمة الخاصة بالجهد المتجهي والتي هي:

$$(1). \qquad \nabla \times \bar{A} = \bar{B}$$

$$(2) \qquad \nabla \cdot \bar{A} = -\epsilon\mu \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

وفي حالة التيارات المستمرة

$$\nabla \cdot \bar{A} = 0$$

$$(3) \qquad \nabla^2 \bar{A} = -\nabla \times \bar{B} = -\mu j_f$$

أما بالنسبة للجهد العددي ϕ فاننا يمكن الحصول على معادلة الموجه وذلك باستخدام معادلة ماكسويل الرابعة مع المعادلة (10-8) وباستعمال شرط لورنس نحصل على

Scanned by CamScanner

العلاقة

$$\nabla^2\phi - \epsilon\mu\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_f}{\epsilon} \qquad (16\text{-}8)$$

التي تمثل معادلة الموجة غير المتجانسة الخاصة بالجهد العددي ϕ فاذا كانت ϕ ثابتة ولا تتغير بالنسبة للزمن فان المعادلة (16-8) تأخذ الشكل التالي :

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho_f}{\epsilon}$$

وهي معادلة بوزن التي مر ذكرها في الفصل الثاني.

(4-8) متجه بوينتنك Poynting Vector

نود الان مناقشة انسياب الطاقة الكهرومغناطيسية من خلال سطح مغلق يحيط بحجم معين وعلاقته بالتغير في الطاقة المخزونة في المجالين الكهربائي والمغناطيسي ولنبدأ بمعادلتي الدوار لماكسويل بعد ان نضرب المعادلة الاولى ضربا عدديا في $\bar{H}$ والمعادلة الثانية في $\bar{E}$ فنحصل على :

$$\bar{H}\cdot\nabla\times\bar{E} = -\bar{H}\cdot\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} \qquad (17\text{-}8)$$

$$\bar{E}\cdot(\nabla\times\bar{H}) = \bar{E}\cdot\bar{J} + \bar{E}\cdot\frac{\partial\bar{D}}{\partial t} \qquad (18\text{-}8)$$

بعد طرح المعادلة (18-8) من المعادلة (17-8) نحصل على :

$$\bar{H}\cdot(\nabla\times\bar{E}) - \bar{E}\cdot(\nabla\times\bar{H}) = -\bar{H}\cdot\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} - \bar{E}\cdot\frac{\partial\bar{D}}{\partial t} - \bar{E}\cdot\bar{J} \qquad (19\text{-}8)$$

وباستعمال المتطابقة المتجهية التالية:

$$\nabla\cdot(\bar{E}\times\bar{H}) = \bar{H}\cdot(\nabla\times\bar{E}) - \bar{E}\cdot(\nabla\times\bar{H})$$

مع المعادلة (19-8) نحصل على :

$$\nabla\cdot(\bar{E}\times\bar{H}) = -\bar{H}\cdot\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} - \bar{E}\cdot\frac{\partial\bar{D}}{\partial t} - \bar{E}\cdot\bar{J} \qquad (20\text{-}8)$$

نأخذ التكامل الحجمي للحجم τ لطرفي المعادلة (20-8) والذي يحيطه السطح S . وبعد استعمال مبرهنة كاوس على الطرف الايسر لتحويل التكامل الحجمي الى تكامل سطحي نحصل على:

$$\oint(\bar{E}\times\bar{H})\cdot d\bar{S} = -\int_\tau\left(\bar{E}\cdot\frac{\partial\bar{D}}{\partial t} + \bar{H}\cdot\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}\right)d\tau - \int_\tau(\bar{E}\cdot\bar{J})\,d\tau \qquad (21\text{-}8)$$

Scanned by CamScanner

وهذه العلاقة وجدت من قبل العالم بوينتنك سنة ١٨٨٤ لذلك سميت باسمه (نظرية بوينتنك) . ويسمى حاصل الضرب المتجهي $(\bar{E} \times \bar{H})$ بمتجه بوينتنك وهو يمثل الطاقة في وحدة الزمن (القدرة) التي تنساب من وحدة السطوح في اية نقطة على السطح المغلق وسوف نرمز له بالحرف $\bar{N}$. وبذلك تأخذ المعادلة (21-8) الشكل التالي :

$$\int_s \bar{N} \cdot d\bar{s} = -\int_\tau \left(\bar{E} \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{H} \cdot \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\right) d\tau - \int_\tau (\bar{E} \cdot \bar{j})\, d\tau \qquad (22\text{-}8)$$

يمثل الطرف الايسر من هذه المعادلة الطاقة الكهرومغناطيسية التي تنساب من السطح المغلق الذي يحتوي الحجم τ في وحدة الزمن ويمثل الحد الاول من الطرف الايمن مقدار النقصان في الطاقة الكهرومغناطيسية المخزونة في الحجم τ من ذلك الوسط . أما الحد الثاني من الطرف الايمن من هذه المعادلة فيمكن مناقشته كالاتي :

نفرض أن σ تمثل قابلية التوصيل الكهربائية للوسط و $\bar{E}'$ تمثل شدة المجال للقوة الدافعة الكهربائية التي تجهز النظام بالطاقة :

$$\bar{j} = \sigma(\bar{E} + \bar{E}')$$

$$\bar{E} = \frac{\bar{j}}{\sigma} - \bar{E}' \qquad (23\text{-}8)$$

وبهذا يأخذ الحد الثاني من الطرف الايمن من المعادلة (22-8) الشكل التالي :

$$\int_\tau (\bar{E} \cdot \bar{j})\, d\tau = \int_\tau \frac{j^2}{\sigma} d\tau - \int_\tau (\bar{E}' \cdot \bar{j})\, d\tau \qquad (24\text{-}8)$$

الحد الاول من الطرف الايمن من المعادلة (24-8) يمثل القدرة المفقودة على شكل حرارة بسبب مقاومة الوسط . أما الحد الثاني فيمثل القدرة التي تجهزها القوة الدافعة الكهربائية للوسط للتعويض عن الجزء المفقود على شكل حرارة اي التعويض عن الفقدان الذي يحصل في الطاقة الكهرومغناطيسية المخزونة في الوسط والجزء المتبقي من هذه القدرة ينساب خارج السطح S الذي يحتوي الحجم τ والممثل بالطرف الايسر من المعادلة (22-8) :

$$\int_s \bar{N} \cdot d\bar{s} = \int_s \bar{E} \times \bar{H} \cdot d\bar{s}$$

366

Scanned by CamScanner

واخيرا اذا كان الوسط متجانسا خطيا ومتماثل الصفات اي ان $D=\epsilon E$ و $B=\mu H$ فان المعادلة (22-8) تأخذ الشكل التالي :

$$\int_s \bar{N}\cdot d\bar{s} + \int_\tau \frac{j^2}{\sigma} d\tau + \frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \left(\frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2\right) d\tau = \int_\tau (\bar{E}'\cdot\bar{j})\, d\tau \qquad (25\text{-}8)$$

(5-8) الصيغة العقدية لمتجه بوينتنك

ان كتابة الموجه الكهرومغناطيسية وكما سنرى قريبا على شكل دالة اسية عقدية ليس معناه أن كلا من E^- او H^- هما مقداران عقديان وانما تكتب بهذه الصيغة لسهولة التكامل وهي :

$$e^{\pm i\omega t} = \cos\omega t \pm i \sin\omega t \qquad (26\text{-}8)$$

حيث أن $i=\sqrt{-1}$. معنى هذا أن الدالة التي تمثل الموجـة الكهرومغناطيسية المستوية يمكن ان تمثل بدالة جيب تمام او بدالة جيب اي أن الموجة يمكن ان تمثل بالمقدار الحقيقي لهذه الدالة الاسية بغض النظر عن العامل i . ولنعطي مثالا لتلك الموجة الكهرومغناطيسية الجيبية المستوية التي تنتشر في الفراغ .

ان كلا من المتجهين E^-, H^- لهذه الموجـة وكما سـنرى قريبـا يمثلان بالمعادلتين التاليتين :

$$\bar{E}_x = \bar{i}\, E_{ox} \sin(\omega t - kz) \qquad (27\text{-}8)$$

$$\bar{H}_y = \bar{j}\, H_{oy} \sin(\omega t - kz) \qquad (28\text{-}8)$$

حيث ان i^-, j^- يمثلان وحدة المتجه في الاتجاهين x, y على التوالي وان K مقدار ثابت يسـمى بالمـدد الموجـي. ولحساب متجـه بوينتنك (N^-) نضرب كلا من E^-, H^- ضربا متجهيا لنحصل على :

$$\bar{N} = \bar{k}\, E_{ox} H_{oy} \sin^2(\omega t - kz) \qquad (29\text{-}8)$$

ولحساب معدل متجه بوينتنك ($\overline{N}$) فاننا نأخذ المعدل الزمني للمعادلة (29-8) لدورة واحدة (T) لان الدالة تعيد نفسها في كل دورة وبذلك نحصل على :

Scanned by CamScanner

$$N_{av.} = \frac{1}{2} E_{ox} H_{oy} \quad (30\text{-}8)$$

لقد حصلنا على هذه النتيجة باستعمال الدوال المثلثية للموجة الكهرومغناطيسية المستوية والان لنرى ماذا يحصل لو اننا استعملنا الدالة الاسية العقدية لكل من المتجهين $\bar{E}$, $\bar{H}$ حيث أنهما يمثلان بالشكل التالي :

$$\bar{E}_x = \bar{i}\, E_{ox}\, e^{i(\omega t - kz)} \quad (31\text{-}8)$$

$$\bar{H}_y = \bar{j}\, H_{oy}\, e^{i(\omega t - kz)} \quad (32\text{-}8)$$

ولنحسب الان الناتج الحقيقي للضرب المتجهي لكل من $\bar{E}_x$ و $\bar{H}_y$.

$$Re(\bar{E}_x \times \bar{H}_y) = \bar{k}\, Re(E_{ox} H_{oy})\, e^{2i(\omega t - kz)}$$

$$= \bar{k}\,(E_{ox} H_{oy}) \cos 2(\omega t - kz)$$

وعندما نأخذ المعدل الزمني للمقدار الاخير فأن الناتج لا يساوي المعدل الزمني لمتجه بوينتنك الذي حصلنا عليه من المعادلة (30-8) وذلك لان المعدل الزمني للمقدار $\cos 2(\omega t - kz)$ يساوي صفرا . والان لنحاول حساب ناتج حاصل الضرب $(\bar{E}_x \times \bar{H}_y^*)$ حيث تمثل $\bar{H}_y^*$ المرافق للمتجه $\bar{H}_y$ فنجد أن :

$$\bar{E}_x \times \bar{H}_y^* = \bar{k}\, E_{ox} H_{oy} \quad (34\text{-}8)$$

وان معدل هذا الناتج يساوي $E_{ox} H_{oy}$ وهو لا يساوي معدل متجه بوينتنك الذي حصلنا عليه من المعادلة (30-8) الا اذا ضربنا الناتج بالعامل (1/2) وبذلك نستنتج أن المعدل الزمني لمتجه بوينتنك يمكن أن يكتب بالشكل التالي :

$$\bar{N}_{av.} = \frac{1}{2} Re(\bar{E} \times \bar{H}^*) \quad (35\text{-}8)$$

ويفضل استعمال هذه الصيغة لايجاد المعدل الزمني لمتجه بوينتنك في بعض الاحيان .

(6-8) الاستقطاب Polarization

قبل البدء بدراسة انتشار الموجات الكهرومغناطيسية المستوية في الاوساط

Scanned by CamScanner

المختلفة نود أن نعطي فكرة عن استقطاب الموجات الكهرومغناطيسية المستوية ٠ ان الاستقطاب الخطي Linear Polarization ويسمى احيانا بالاستقطاب المستوي (Plane Polari zation) يعد ابسط انواع الاستقطاب للموجات الكهرومغناطيسية المستوية ويكون فيه كل من E^{-} و H^{-} متعامدين على بعضهما البعض، والمستوي الذي يقع فيه المتجهان H^{-}, E^{-} يكون عموديا على اتجاه انتشار الموجه فاذا اخترنا الاتجاه z ليكون اتجاه انتشار الموجه الكهرومغناطيسية المستوية وكان المتجه E^{-} يشير الى الاتجاه x فان H^{-} يشير الى الاتجاه y ٠ وسوف نعتمد في دراستنا للاستقطاب الصيغة الجيبية للموجه الكهرومغناطيسية المستوية وذلك لسهولة التعامل معها وبصورة خاصة عندما نرسم هذه الموجه ٠ ان ابسط صيغة للموجه المستقطبة خطيا هي كالاتي :

$$\bar{E} = \bar{i} E_{ox} \cos(\omega t - Kz) \tag{36-8}$$

$$\bar{H} = \bar{j} H_{oy} \cos(\omega t - Kz) \tag{37-8}$$

حيث ان $E_{ox} H_{oy}$ هي مقادير ثابتة تمثل سعة كل من المتجهين E^{-} H^{-} في الاتجاهين y, x على التوالي كما يمكن ان يتكون المجال الكهربائي لهذا النوع من الاستقطاب من مركبتين احداهما في الاتجاه x والاخرى في الاتجاه y الا انهما في الطور نفسه لذلك فان المجال المغناطيسي يتكون أيضا من مركبتين الاولى في الاتجاه y والثانية في الاتجاه x ٠ وتكون مركبات المجالين الكهربائي والمغناطيسي كالاتي :

$$\bar{E} = \bar{i} E_{ox} \cos(\omega t - Kz - \alpha) + \bar{j} E_{oy} \cos(\omega t - Kz - \alpha)$$

$$\bar{E} = (\bar{i} E_{ox} + \bar{j} E_{oy}) \cos(\omega t - Kz - \alpha) \tag{38-8}$$

$$\bar{H} = \bar{j} H_{oy} \cos(\omega t - Kz - \alpha) - \bar{i} H_{ox} \cos(\omega t - Kz - \alpha)$$

$$\bar{H} = (\bar{j} H_{oy} - \bar{i} H_{ox}) \cos(\omega t - Kz - \alpha) \tag{39-8}$$

حيث تمثل α في هاتين المعادلتين زاوية الطور لكل من المجالين الكهربائي والمغناطيسي وهي مقدار ثابت ٠ ولكي نرسم هذه الدالة نفرض أن الزاوية α

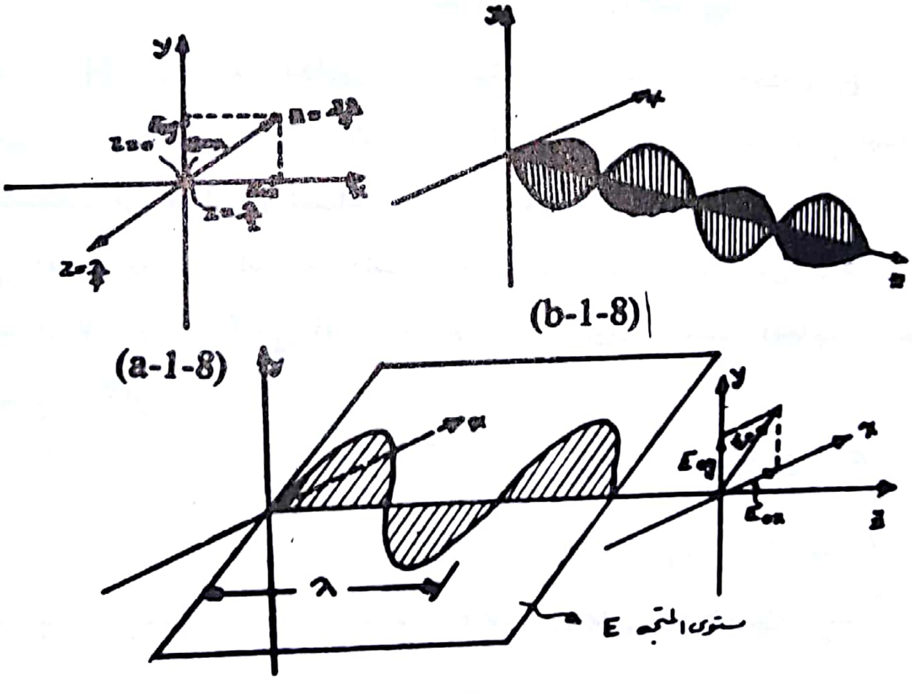
Scanned by CamScanner

تساوي $\pi/2$ وان الزمن $t = nT$ فنحصل على الشكل (1-8). أن سعة المتجه $\vec{E}$ لهذه الموجة المستقطبة خطيا تكون:

$$E_o = \sqrt{E_{ox}^2 + E_{oy}^2}$$

وهي تميل عن المحور x بزاوية مقدارها θ حيث أن $\theta = \tan^{-1}\frac{E_{oy}}{E_{ox}}$

كما في الشكل (a-1-8). ويمثل الشكل (b-1-8) تغير كل من المركبتين E_x ، E_y مع المحور z كما يوضح الشكل (c-1-8) تغير المحصلة $\vec{E}$ من المحور z في مستوى الاستقطاب (Plane of Polarization) الذي يمثل المستوى الذي يحتوي اتجاه المحصلة $\vec{E}$ والمحور z . ولتوضيح العلاقة بين الشكلين (a-1-8) و (c-1-8) عندما تحرك المستوي xy بالاتجاه Z بمسافة مقدارها $z = 2\pi/k$



(c-1-8)

الشكل (1-8)

Scanned by CamScanner

(اي انه يتحرك بمسافة مقدارها طول موجه واحدة λ) فنجد أن لكل قيمة من قيم z ترسم نهاية السهم $\bar{E}$ نقطة من نقاط الخط المستقيم (ab) ولهذا السبب يسمى هذا النوع من الاستقطاب بالاستقطاب الخطي . ولان المتجه E^- يتحرك في مستوي الاستقطاب الذي يميل بزاوية مقدارها θ مع المستوي xz لذلك يسمى هذا النوع من الاستقطاب بعض الاحيان بالاستقطاب المستوي (Plane Polarization) ومن الجدير بالذكر هنا اننا يمكن ان نرسم هذه الدالة بدلالة H^- فنحصل على نفس النتائج التي حصلنا عليها بالنسبة الى المتجه E^- والفرق الوحيد بين الحالتين هو أن اتجاه محصلة H^- يكون عموديا على اتجاه محصلة E^- وان مستوي الاستقطاب للمتجه H^- يكون عموديا على مستوي الاستقطاب للمتجه E^- ولنرى الان ماذا يحصل لو جعلنا فرقا في الطور بين المركبتين E_x ، E_y وبهذا تأخذ المحصلة الصيغة التالية:

$$\bar{E} = \bar{i} E_{ox} \cos(\omega t - kz - \alpha) + \bar{j} E_{oy} \cos(\omega t - kz - \beta) \quad (40\text{-}8)$$

وفي هذه الحالة تأخذ المحصلة H^- شكلا مشابها للمعادلة (40-8) لذلك فلا حاجة لكتابتها وسوف نناقش المعادلة الخاصة بالمحصلة E^- فقط . ولدراسة هذه الحالة نفرض أن $\alpha = \beta + \pi/4$ وان $\beta = \pi/2$ ولتكن $t = 4T$ وبهذا تأخذ المعادلة (40-8) الشكل التالي :

$$\bar{E} = \bar{i} E_{ox} \cos(kz + \tfrac{3}{4}\pi) + \bar{j} E_{oy} \cos(kz + \tfrac{\pi}{2}) \quad (41\text{-}8)$$

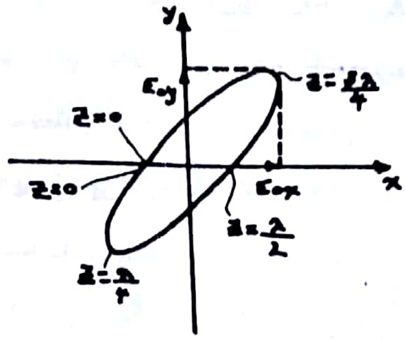
$$\bar{E} = -\bar{i} E_{ox} \sin(kz + \tfrac{\pi}{4}) - \bar{j} E_{oy} \sin kz \quad (42\text{-}8)$$

وهذه المعادلة هي معادلة قطع ناقص Ellipse لذلك يسمى هذا النوع من الاستقطاب بالاستقطاب البيضوي . الشكل (a-2-8) يوضح المحل الهندسي للمتجه E^- لجميع القيم الممكنة للمقدار kz . كما يوضح الشكل (b-2-8) المركبتين E_x ، E_y وتغيرهما بالاتجاه z . ويوضح الشكل (c-2-8) تغير المحصلة E^- مع المحور z حيث أن نهاية السهم ترسم قطعا ناقصا في كل دورة كاملة اي عندما تتقدم الموجه مسافة مقدارها $z = 2\pi/k = \lambda$. ومن الجدير بالذكر هنا أنه

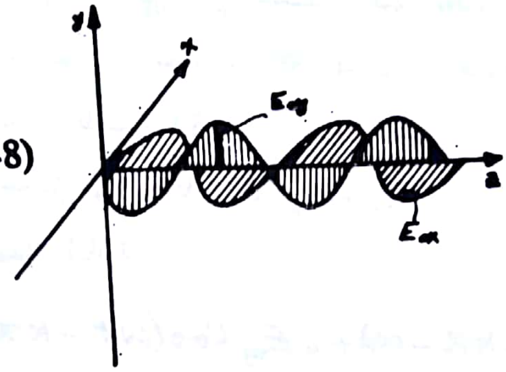
Scanned by CamScanner

اذا كانت $\alpha = \beta + \pi/2$ فان محوري القطع الناقص يتجهان باتجاه المحورين

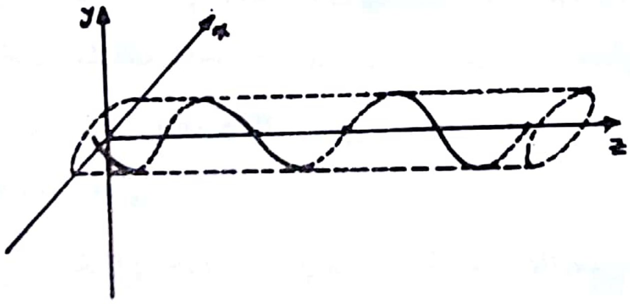
(a-2-8)



(b-2-8)



(c-2-8)



الشكل (2-8)

y, x فاذا كانت $E_{ox} > E_{oy}$ فان المحور الكبير يتجه باتجاه محور X اما اذا كانت $E_{oy} > E_{ox}$ فان المحور الكبير يتجه باتجاه المحور y .

وهناك حالة خاصة من الاستقطاب الابيضوي والذي تكون فيه $\alpha = \beta + \pi/2$

Scanned by CamScanner

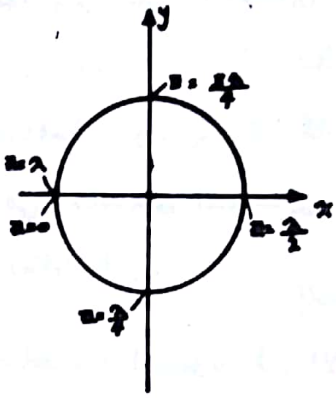
وان $E_{ox} = E_{oy} = E_o$ في هذه الحالة يأخذ المتجه E الشكل التالي :

$$\bar{E} = \bar{i} E_o \cos(\omega t - Kz - \alpha) + \bar{j} E_o \cos(\omega t - Kz + \pi/2 - \alpha) \quad (42\text{-}8)$$

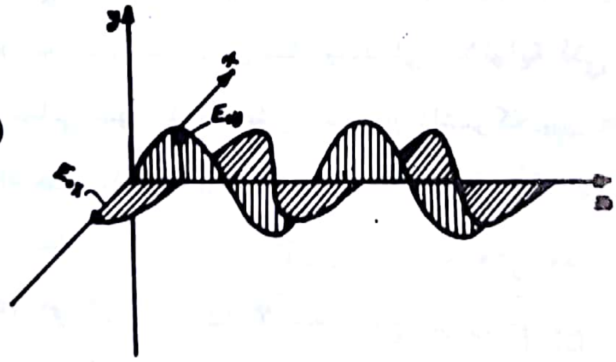
$$\bar{E} = E_o\left[\bar{i} \cos(\omega t - Kz - \alpha) + \bar{j} \cos(\omega t - Kz + \pi/2 - \alpha)\right.$$

$$\bar{E} = E_o\left[\bar{i} \cos(\omega t - Kz - \alpha) + \bar{j} \sin(\omega t - Kz - \alpha)\right] \quad (43\text{-}8)$$

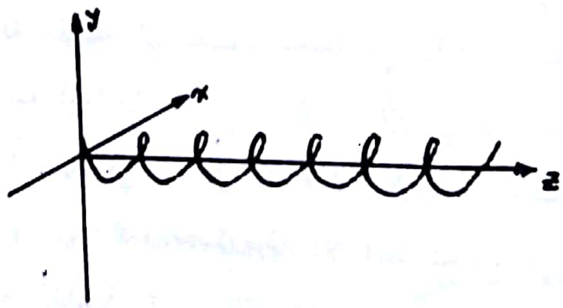
(a-3-8)



(b-3-8)



(c-3-8)



الشكل (3-8)

Scanned by CamScanner

وواضح أن المعادلة (43-8) تمثل معادلة دائرة نصف قطرها E_o لذلك يسمى هذا النوع من الاستقطاب بالاستقطاب الدائري • الشكل (a-3-8) يمثل المحل الهندسي للمتجه $\bar{E}$ لجميع القيم الممكنة لدورة كاملة لـ kz أما الشكل (b-3-8) فيمثل تغير كل من E_y, E_x مع المحور (z) • عندما تنتقل جبهة الموجة مسافة مقدارها λ فان نهاية المتجه $\bar{E}$ ترسم دائرة نصف قطرها E_o وبهذا يكون مسار هذه النقطة حلزونيا نصف قطره E_o ودرجته λ كما في الشكل (c-3-8) .

أن أي موجه كهرومغناطيسية مستوية لا بد وان تقع في نوع من الانواع الثلاثة سابقة الذكر حيث يمكن تمثيلها بمركبتين متعامدتين للمجال الكهربائي $\bar{E}$ فاذا كانت المركبتان في نفس الطور سمي الاستقطاب خطيا أو مستويا أما اذا كان بينهما فرقا في الطور سمي الاستقطاب بيضويا واذا كان فرق الطور بين المركبتين يساوي $\pi/2$ وكانت السعتان في الاتجاهين المتعامدين للمتجه $\bar{E}$ متساويتين فان نوع الاستقطاب هذا يسمى استقطابا دائريا •

(7-8) انتشار الموجات الكهرومغناطيسية المستوية في الاوساط غير المحدودة

Propagation of plane electromagnetic waves in infinite media.

سوف نتطرق في هذا البند الى دراسة انتشار الموجات الكهرومغناطيسية في الاوساط المختلفة وسنفرض هنا أن الوسط يمتد الى اللانهاية لكي نتفادى الانعكاسات والانكسارات التي تعاني منها الموجة على السطوح المشتركة بين الاوساط المختلفة • كما أننا سنعتبر الوسط دائما متجانسا خطيا متماثلا اي أن كلا من μ, ϵ ثابتة القيمة حيث تصح العلاقتين $\bar{B} = \mu \bar{H}$, $\bar{D} = \epsilon \bar{E}$ وفي هذه الدراسة سنعتبر ان الموجه احادية التردد اي أن قيمة ω لا تتغير مع الزمن او مع الاحداثيات zyx .

ولغرض دراسة انتشار الموجات الكهرومغناطيسية المستوية في وسط ما يجب أن نبدأ باستخراج معادلة الموجه ثم نقوم بحلها في ذلك الوسط • وبالرغم من أستخراجنا معادلة الموجه الخاصة بكل من $\bar{A}$ و ϕ في بند سابق من هذا الفصل والتي يمكن الاستفادة منها في تفاعل المجالات الكهرومغناطيسية مع المادة او في دراسة الاشعاع من الهوائيات *Antennas* الا اننا نحتاج في هذه الدراسة الى استخراج معادلة الموجه الخاصة بكل من $\bar{H}, \bar{E}$ والتي يمكن الحصول عليها باستعمال معادلات ماكسويل. ويمكن الحصول على معادلة الموجه الخاصة بالمجال الكهربائي $\bar{E}$

Scanned by CamScanner

وذلك بأن نأخذ دوار طرفي معادلة ماكسويل فنحصل على :

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{E}) = -\nabla \times \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \bar{B}) \qquad (44\text{-}8)$$

وعندما نأخذ بنظر الاعتبار المتطابقة المتجهية التالية:

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{E}) = -\nabla^2 \bar{E} + \nabla(\nabla \cdot \bar{E})$$

فان المعادلة (44-8) تأخذ الشكل التالي:

$$\nabla^2 \bar{E} - \nabla(\nabla \cdot \bar{E}) = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \bar{B}) = \mu \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \bar{H}) \qquad (45\text{-}8)$$

وباستعمال معادلة ماكسويل التالية :

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J}_f + \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

فان المعادلة (45-8) تأخذ الشكل التالي:

$$\nabla^2 \bar{E} - \nabla(\nabla \cdot \bar{E}) = \mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{J}_f + \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}\right) \qquad (46\text{-}8)$$

وباستعمال معادلة ماكسويل الرابعة :

$$\nabla \cdot \bar{E} = \rho_f / \epsilon$$

فان المعادلة (46-8) تصبح :

$$\nabla^2 \bar{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = \nabla\left(\frac{\rho_f}{\epsilon}\right) + \mu \frac{\partial \bar{J}_f}{\partial t} \qquad (47\text{-}8)$$

وتسمى هذه المعادلة معادلة الموجه للمتجه $\bar{E}$ في وسط متجانس خطي متماثل الصفات ويمكن كتابة معادلة الموجه للمتجه $\bar{E}$ بعد استعمال العلاقة $\bar{J}_f = \sigma \bar{E}$ بالشكل التالي :

$$\nabla^2 \bar{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \nabla\left(\frac{\rho_f}{\epsilon}\right) \qquad (48\text{-}8)$$

وبطريقة مماثلة يمكن الحصول على معادلة الموجه الخاصة بالمتجه $\bar{H}$ وهي كالاتي :

$$\nabla^2 \bar{H} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = 0 \qquad (49\text{-}8)$$

Scanned by CamScanner

(8-8) حل معادلة الموجه في الاوساط غير المحدودة

قبل البدء في حل معادلة الموجه في الاوساط غير المحدودة المختلفة لا بد من أن نؤكد الملاحظات التالية :

أولا : لا توجد هناك حدود معينة للترديد لاستعمال معادلات ماكسويل لكن تطبيق هذه المعادلات يتم عمليا على ترددات تمتد من ترددات موجات الراديو الطويلة ($f = 10^4\ Hz$) الى الترددات الخاصة باشعة γ (كاما) ذات الطاقة العالية($f = 10^{24} Hz$).

ثانيا : سوف نعتمد في معالجاتنا الرياضية الدالة الاسية $e^{i\omega t}$ لكل مركبات المجال كمعامل تغير زمني ومعنى هذا أن تاثير العامل $\partial/\partial t$ يكون مساويا الى $i\omega$ على اعتبار أن تردد المصدر يبقى ثابت القيمة بالنسبة

الى الزمن أو بالنسبة الى المحاور كما ذكرنا سابقا •

ثالثا : سوف نستعمل المتجه $\vec{H}$ في جميع معادلاتنا الرياضية بدلا من المتجه $\vec{B}$ وذلك لارتباط كثير من المصطلحات بالمتجه $\vec{H}$ فمثلا وجدنا أن متجه بوينتنك $\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H}$ وكما سنرى مستقبلا أن $Z = E/H$ وهي الممانعة المميزة للموجه •

رابعا : في جميع الاوساط التي سنناقشها نفترض أنها خالية من الشحنات الحرة أي أن $\rho_f = 0$ وبهذا تأخذ معادلة الموجه الشكل الاتي :

$$\nabla^2 \bar{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = 0 \qquad (50\text{-}8)$$

خامسا : سوف نعتبر أن الموجه الكهرومغناطيسية تنتشر بالاتجاه Z فقط أي أن المتجه $\vec{E}$ او المتجه $\vec{H}$ لا يعتمدان على كل من المحورين y, x • ومما تقدم نجد أن معادلة ماكسويل الرابعة تأخذ الشكل التالي :

أي أن

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \qquad (51\text{-}8)$$

وعندما نأخذ الملاحظة الخامسة بنظر الاعتبار نجد أن $\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$ ، $\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$

Scanned by CamScanner

وبهذا فان المعادلة (51-8) تأخذ الشكل التالي :

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \qquad (52\text{-}8)$$

وهذا معناه أما أن تكون $\bar{E}_z$ ثابتة القيمة وهذا غير ممكن لاننا نتعامل مع مجالات متغيرة القيمة بالنسبة للزمن وكذلك بالنسبة للمحاور او أن تكون $E_z = 0$ وهذه هي الحالة الصحيحة أي أن المجال الكهربائي $\bar{E}$ له مركبتان الاولى E_x في الاتجاه x والثانية E_y في الاتجاه y وهذا يصح على $\bar{H}$ أيضا لنفس السبب .
لذلك فان الموجه المستوية التي تنتشر في الاتجاه Z يكون لها مركبتان لكل من $\bar{H}, \bar{E}$ في الاتجاهين y, x على التوالي العموديين على اتجاه انتشار الموجه اذن فهي موجه كهرومغناطيسية مستعرضة في الوسط المتجانس، المتماثل الصفات، الخطي .
ان الاوساط غير المحدودة المختلفة التي سوف نناقش انتشار الموجات الكهرومغناطيسية المستوية فيها هي : الفراغ ، الوسط العازل ، الوسط الموصل ، الوسط جيد التوصيل وأخيرا الغاز المتأين .

(أ) انتشار الموجات الكهرومغناطيسية المستوية في الفراغ :

اذا كان الوسط الذي تنتقل فيه الموجه الكهرومغناطيسية المستوية هو الفراغ فان $\mu = \mu_0$ ، $\epsilon = \epsilon_0$ ، $\bar{j} = 0$ وعند الاخذ بنظر الاعتبار الملاحظات السابقة فان معادلة الموجه تأخذ الشكل التالي :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 E_x = 0 \qquad (53\text{-}8)$$

هذا بالنسبة الى المركبة E_x ويمكن الحصول على معادلة أخرى للموجه مشابهة للمعادلة (53-8) خاصة بالمركبة E_y ولتسهيل مهمتنا سوف نفرض أن للمجال الكهربائي مركبة واحدة في الاتجاه x هي E_x وبعبارة أخرى يمكن ان ندور المحاور y, x حول المحور z حتى ينطبق المتجه $\bar{E}$ بالاتجاه x ، ومن حل المعادلة التفاضلية (53-8) ينتج ان

$$\bar{E}_x = \bar{i}\, E_{0x}\, e^{\gamma z} \qquad (54\text{-}8)$$

وباستعمال هذا الحل (54-8) في المعادلة (53-8) نحصل على :

$$\gamma^2 + \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 = 0$$

$$\gamma = \pm i \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \pm \frac{i\omega}{c} = \pm i k \qquad (55\text{-}8)$$

Scanned by CamScanner

وتسمى γ عامل الانتشار ، k العدد الموجي أما c التي تساوي $1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ فهي سرعة الموجات الكهرومغناطيسية في الفراغ وتساوي تقريبا 3×10^8 m/sec وبما أن قيمة كل من ω, ϵ, c هي قيم حقيقية فان قيمة γ تكون خيالية صرفة ومعنى هذا أن المعادلة (54-8) تمثل دالة جيبية للمتجه E_x يعتمد اما على sin KZ او على cos KZ ويفضل كتابة المعادلة (54-8) بدلالة العدد الموجي وعندما نأخذ بنظر الاعتبار عامل تغير الزمن للمتجه $\bar{E}$ يمكننا كتابة المعادلة (54-8) بالشكل التالي :

$$\bar{E}_x = \bar{i}\, E_{ox}\, e^{i(\omega t \pm kz)} \qquad (56\text{-}8)$$

ان هذا الحل يجب أن يحقق جميع معادلات ماكسويل لان معادلة الموجة التي يحققها هذا الحل قد أشتقت باستعمال معادلات ماكسويل ، ومن الجدير بالذكر ان الاشارتين الموجبة والسالبة اللتين تتقدمان الثابت k في المعادلة (56-8) تعنيان أن الموجة ممكن أن تنتشر في الاتجاهين z و -z على التوالي . وللحصول على العلاقة الخاصة بالمتجه H فاننا لا نحتاج الى حل معادلة الموجة الخاصة بالمتجة $\bar{H}$ وانما باستعمال احدى معادلات ماكسويل التي تربط بين كل من $\bar{H}, \bar{E}$ وعلى سبيل المثال عندما نستعمل معادلة ماكسويل الاولى آخذين بنظر الاعتبار أن للمتجه $\bar{E}$ مركبة واحدة هي المركبة E_x نجد أن للمتجه $\nabla\times\bar{E}$ مركبة واحدة في الاتجاه y هي $\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)_y$

وبتعويض هذه القيمة لدوار المتجه $\bar{E}$ في المعادلة الاولى من معادلات ماكسويل نجد أن :

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)_y = -i\omega\mu_0 H_y \qquad (57\text{-}8)$$

وعندما نأخذ بنظر الاعتبار انتشار الموجه بالاتجاه z فقط نحصل على:

$$-ikE_x = -i\omega\mu_0 H_y$$

$$H_y = \frac{K}{\mu_0\omega} E_x$$

أو أن

$$H_y = \frac{K}{\mu_0\omega} E_{ox}\, e^{i(\omega t \pm kz)}$$

$$H_y = H_{oy}\, e^{i(\omega t \pm kz)}$$

حيث أن

$$H_{oy} = \frac{K}{\mu_0\omega} E_{ox} \qquad H_{oy} = \frac{1}{Z_0} E_{ox}$$

Scanned by CamScanner

ونسمي Z_o بالممانعة المميزة للموجات الكهرومغناطيسية في الفراغ وهي تساوي

$$Z_o = \frac{\mu_o \omega}{K} = C\mu_o = \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} = 120\pi = 376.6\,\Omega \quad (59\text{-}8)$$

ومما تقدم نستنتج ان الموجه الكهرومغناطيسية المستوية التي تنتشر في الفـــــراغ يكون فيهـــا المتجهان $\vec{E}$, $\vec{H}$ عموديين على بعضهما البعض وهما في نفس الطـــور ويقعان في مستو عمودي على اتجاه انتشار الموجه ، كما أن اتجاه متجه بوينتنك $(\vec{E} \times \vec{H})$ يكون في الاتجاه z الذي يمثل اتجاه انتشار الموجه كما في الشـــكل (4-8) .

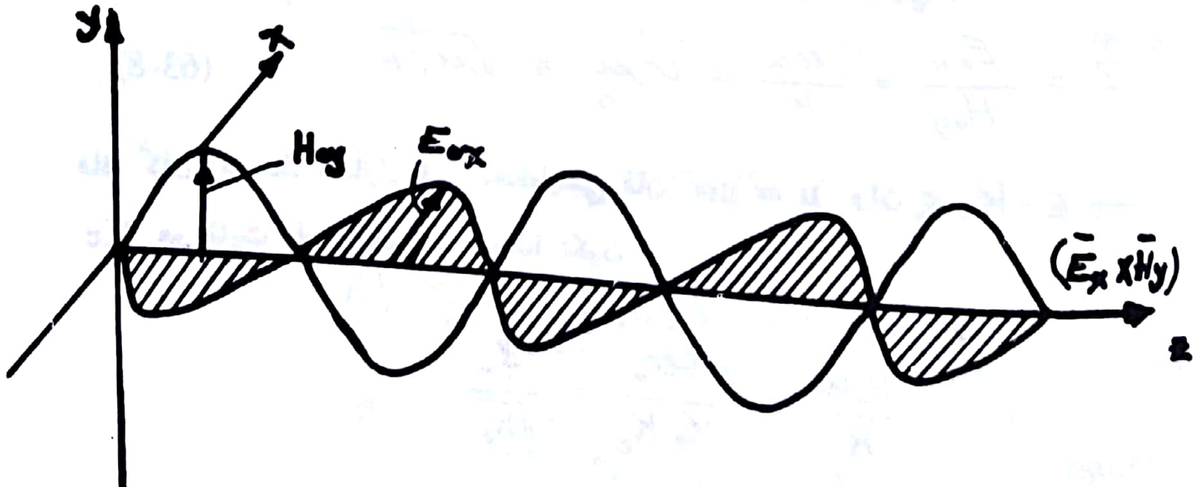
وعندما تنتشر الموجه الكهرومغناطيسية في الفراغ نجد أن :

(1) العدد الموجي $= K = \omega\sqrt{\epsilon_o \mu_o} = \omega / c$

(2) سرعة الموجه $= c = 3 \times 10^8 \ m/S$

(3) الممانعة المميزة $= Z_o = \dfrac{\mu_o \omega}{K} = \mu_o c$

$$= \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} = 120\pi\,\Omega$$



الشكل (4-8)

(ب) انتشار الموجات الكهرومغناطيسية المستوية في وسط عازل :

عندما تنتشر الموجه في وسط عازل فان معادلة الموجه تأخذ الشكل التالي :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \epsilon\mu\omega^2 E_x = 0 \qquad (60\text{-}8)$$

ونجد في هذه العلاقة أنها تشبه معادلة الموجه الخاصة بالفراغ والفرق بين الحالتين أن ϵ_o تأخذ القيمة ϵ وμ_o تأخذ القيمة μ . وحل هذه المعادلة مشابه الى حل معادلة الموجه الخاصة بالفراغ باستبدال كل من ϵ_o، μ_o بالمقدارين ϵ، μ وبهذا يكون حل هذه المعادلة كما يأتي :

$$\bar{E}_x = \bar{i}\, E_{ox}\, e^{i(\omega t \pm Kz)}. \qquad (61\text{-}8)$$

حيث أن العدد الموجي $K = \omega\sqrt{\epsilon\mu} = \frac{\omega}{v}$ وان $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ وهي سرعة الموجه الكهرومغناطيسية المستوية في الوسط العازل اما المعادلة الخاصة بالمتجه H فتأخذ الشكل التالي :

$$\bar{H}_y = \bar{j}\, \frac{E_{ox}}{Z}\, e^{i(\omega t \pm Kz)} = \bar{j}\, H_{oy}\, e^{i(\omega t \pm Kz)} \qquad (62\text{-}8)$$

حيث أن Z هي ممانعة الموجه في الوسط العازل وقيمها تساوي :

$$Z = \frac{E_{ox}}{H_{oy}} = \frac{\mu\omega}{K} = v\mu_o = \sqrt{\mu/\epsilon} \qquad (63\text{-}8)$$

فاذا كان الوسط العازل غير مغناطيسي فان $\mu = \mu_o$ وان $\epsilon = K_e\epsilon_o$ حيث K_e هو ثابت العزل للوسط وبهذا تكون :

(1) $$K = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{\epsilon_o\mu_o K_e} = \frac{\omega}{c}\sqrt{K_e}$$

(2) $$Z = \frac{\mu_o\omega}{K} = \frac{\mu_o}{\epsilon_o K_e} = \frac{Z_o}{\sqrt{K_e}}$$

(3) $$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_o\mu_o K_e}} = \frac{c}{\sqrt{K_e}}$$

Scanned by CamScanner

وعليه يأخذ معامل الانكسار القيمة التالية :

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{K_e} \qquad (4)$$

ومن ملاحظة المعادلتين (8-61), (8-62) نستنتج ان كلا من E_x و H_y هما في نفس الطور وان اتجاه متجه بوينتنك سوف يكون باتجاه انتشار الموجه اي بالاتجاه Z .

(ج) انتشار الموجات الكهرومغناطيسية المستوية في وسط موصل :

ان معادلة الموجة في وسط موصل تأخذ الشكل التالي :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \qquad (64\text{-}8)$$

حيث يمثل الحد الثاني في هذه المعادلة تيار الازاحة بينما يمثل الحد الثالث تيار التوصيل وعندما نأخذ بنظر الاعتبار التغير الزمني للمتجه $\bar{E}$ الذي يعتمد على الدالة $e^{i\omega t}$ فان المعادلة (8-64) تأخذ الشكل التالي :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \epsilon\mu\omega^2 E_x - i\mu\sigma E_x = 0 \qquad (65\text{-}8)$$

ولو جربنا الحل (8-66)

$$E_x = E_{0x}\, e^{i(\omega t - Kz)} \qquad (66\text{-}8)$$

نجد أن :

$$-K^2 + \epsilon\mu\omega^2 - i\mu\sigma\omega = 0 \qquad (67\text{-}8)$$

$$K^2 = \epsilon\mu\omega^2\left(1 - \frac{i\sigma}{\epsilon\omega}\right) = \frac{K_e K_m}{\lambda_0^2}\left(1 - \frac{i\sigma}{\epsilon\omega}\right) \qquad (68\text{-}8)$$

حيث يمثل λ_0 الطول الموجي الزاوي وقيمته تساوي :

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_0}{2\pi} = \frac{c}{\omega} \qquad (69\text{-}8)$$

وتمثل الكمية $\frac{i\omega\epsilon}{\sigma}$ في المعادلة (9-68) النسبة بين كثافة تيار الازاحة

Scanned by CamScanner

$\partial D/\partial t$ الى كثافة تيار التوصيل $J_f = \sigma E$ وسوف نسمي القيمة المطلقة لهذه النسبة بالمقدار Q الذي يسمى بنوعية الوسط حيث ان :

$$Q = \left| \frac{\partial D}{\partial t} / J_f \right| = \frac{\epsilon \omega}{\sigma} \qquad (70\text{-}8)$$

وتكون قيمة Q للمواد العازلة مساوية الى اللانهاية بينما تكون قيمتها صغيرة للمواد الموصلة الاعتيادية . ونجد من العلاقة (68-9) أن قيمة العدد الموجي تكون عقدية كالاتي :

$$K = K_r - i K_i \qquad (71\text{-}8)$$

حيث ان كلا من K_r و K_i عددان حقيقيان موجبان . وعندما نأخذ بنظر الاعتبار المعادلتين (68-8) ، (71-8) نجد أن :

$$K_r = \frac{1}{\bar{\lambda}_0}\left(\frac{K_e K_m}{2}\right)^{1/2}\left\{\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{1/2}+1\right\}^{1/2} \qquad (72\text{-}8)$$

$$K_i = \frac{1}{\bar{\lambda}_0}\left(\frac{K_e K_m}{2}\right)^{1/2}\left\{\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{1/2}-1\right\}^{1/2} \qquad (73\text{-}8)$$

$$K = \left(\frac{K_e K_m}{\bar{\lambda}_0}\right)^{1/2}\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{1/4} e^{-i\theta} \qquad (74\text{-}8)$$

حيث أن θ هي زاوية الطور :

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{K_i}{K_r}\right) \qquad (75\text{-}8)$$

ويمثل الجزء الحقيقي من العدد الموجي K_r مقلوب الطول الموجي الزاوي اي

$$K_r = \frac{1}{\bar{\lambda}} = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad (76\text{-}8)$$

كما يمثل الجزء الخيالي من العدد الموجي K_i مقلوب الكمية δ اي

$$K_i = \frac{1}{\delta} \qquad (77\text{-}8)$$

حيث تمثل δ المسافة التي اذا ما قطعتها الموجه في ذلك الوسط فان سعتها تتناقص الى $1/e$ من قيمتها الاصلية . ويسمى المقدار δ بمسافة الاضمحلال (attenuation distance) وعند انتشار الموجه في هذا الوسط فان قيمة كل

من العدد الموجي ، سرعة الموجه ، الممانعة المميزة للموجه ومعامل الانكسار تكـون كالاتي :

$$(1) \quad K = K_r - i K_i$$

حيث ان قيمة كل من k_i, k_r كما في المعادلتين (8-72) و (8-73) على التوالي :

$$(2) \quad v = \frac{\omega}{K_r} = C\left\{ \frac{K_e K_m}{2}\left[\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{1/2}+1\right]\right\}^{-1/2} \qquad (78\text{-}8)$$

$$(3) \quad n = \frac{c}{v} = \frac{c}{\omega}K_r = \lambda\!\!\!^{-} K_r = \frac{\lambda_0}{\lambda} \qquad (79\text{-}8)$$

$$(4) \quad Z = \frac{\mu\omega}{K} = \left(\frac{\mu}{\epsilon}\right)^{1/2} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{1/4}} e^{i\theta} \qquad (80\text{-}8)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{K_i}{K_r}\right)$$

ويمثل θ فرق الطور الذي يتقدم فيه $\bar{E_x}$ على $\bar{H_y}$ وبهذا يمكن كتابة كل من $\bar{E_x}$ و $\bar{H_y}$ كالاتي :

$$\bar{E}_x = \bar{i}\, E_{0x}\, e^{i(\omega t - K_r z) - K_i z} \qquad (81\text{-}8)$$

$$\bar{H}_y = \bar{j}\, H_{0y}\, e^{i(\omega t - K_r z - \theta) - K_i z} \qquad (82\text{-}8)$$

$$\frac{E_0}{H_0} = |Z| = \left(\frac{\mu}{\epsilon}\right)^{1/2}\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{-1/4} \qquad (83\text{-}8)$$

ونلاحظ أن العلاقتين (8-81) .(8-82) تمثلان موجه مضمحلة معامل الاضمحلال فيها هو $e^{-K_i z}$. وبالرغم من وجود فرق الطور بين كل من E_x و H_y واحتواء كل منهما على معامل الاضمحلال الا أن متجه بوينتنك هو باتجاه انتشار الموجه وهو الاتجاه z .

(د) انتشار الموجات الكهرومغناطيسية المستوية في وسط جيد التوصيل : ان المقصود بالوسط جيد التوصيل هو الوسط الذي يكون فيه التيار بصورة رئيسية ناشيء من حركة الشحنات الطليقة وهو يتبع قانون امبير اي ان $\bar{J}_f = \sigma \bar{E}$ وان نسبة كثافة تيار الازاحة الى كثافة تيار التوصيل (اي النسبة Q) تكون صغيرة جدا

ومعنى هذا أن النسبة $\frac{\omega \epsilon}{\sigma}$ تكون صغيرة جدا اي أن المادة قد تكون جيدة

التوصيل لترددات معينة بينما تصبح غير جيدة التوصيل لترددات أخرى أعلى من الاولى.ومن الجدير بالذكر هنا انه لا توجد قيمة محددة للسماحية الكهربائية ϵ للمواد جيدة التوصيل ولكن هناك مؤشرات عملية تفيد بأن السماحية للمواد جيدة التوصيل مساوية لسماحية الفـراغ ϵ_o ولكتابة معادلة الموجة الخاصة بانتشار الموجه الكهرومغناطيسية المستوية داخل وسط جيدالتوصيلفاننا يجب أن ناخذ بنظر الاعتبـار ان $\frac{\partial D}{\partial t} << \sigma E$ في معـادلة الموجـه (30-8) اي أن المقـدار

$\mu \epsilon \omega^2$ مهمل نسبة الى المقـدار $\sigma \mu \omega$ وبهذا تأخذ معادلة الموجـه في الوسط جيد التوصيل الشكل التالي :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - i \mu \sigma \omega E_x = 0 \qquad (84\text{-}8)$$

ان الحل المناسب للمعادلة التفاضلية (84-8) هو :

$$\bar{E}_x = \bar{i} E_{ox} e^{i(\omega t \pm Kx)} \qquad (85\text{-}8)$$

وعندما نستعمل الحل (85-8) في المعادلة التفاضلية (84-8) نحصل على :

$$K^2 = -i \mu \sigma \omega \qquad (86\text{-}8)$$

وبما أن :

$$\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$$

لذلك نجد من المعادلة (86-8) أن :

$$K = \left(\frac{\mu \sigma \omega}{2}\right)^{1/2} (1 - i) \qquad (87\text{-}8)$$

ومعنى هذا أن العدد الموجي K يكون عقديا وهو يساوي

$$K = K_r - i K_i$$

وان قيمة الحد الحقيقي k_r تساوي الحد الخيالي k_i وان قيمة كل منهما تساوي :

Scanned by CamScanner

$$K_r = \left(\frac{\mu\sigma\omega}{2}\right)^{1/2} \qquad (88\text{-}8)$$

وان

$$K_i = \left(\frac{\mu\sigma\omega}{2}\right)^{1/2} \qquad (89\text{-}8)$$

$$\delta = \frac{1}{K_i} = \left(\frac{2}{\mu\sigma\omega}\right)^{1/2} \qquad (90\text{-}8)$$

$$\lambda' = \frac{1}{K_r} = \left(\frac{2}{\mu\sigma\omega}\right)^{1/2} \qquad (91\text{-}8)$$

اي أن

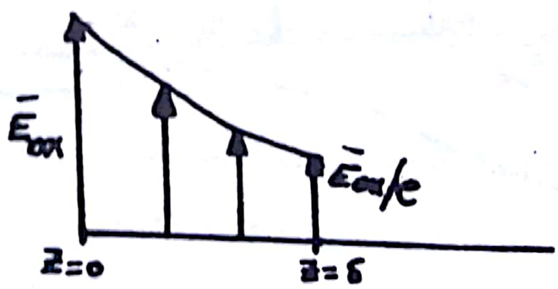
$$\delta = \lambda'$$

ويسمى المقدار δ هنا بالعمق السطحي Skin depth أو عمق الاختراق *Penetration depth* وهو يساوي طول الموجه الزاوي . ويعرف بالمسافة التي اذا ما قطعتها الموجه داخل مادة جيدة التوصيل فان سعتها تهبط الى $1/e$ من قيمتها الاصلية عند سطح تلك المادة كما في الشكل (5-8) وعندما تنتشر الموجه في وسط جيد التوصيل فان قيمة كل من العدد الموجي ، سرعة الموجه ، الممانعة المميزة للموجه ومعامل الانكسار هي كالاتي :

$$(1) \qquad K = K_r - iK_i = \left(\frac{\mu\sigma\omega}{2}\right)^{1/2}(1-i) = \frac{1}{\delta}(1-i) \qquad (92\text{-}8)$$

حيث أن

$$\delta = \lambda' = \left(\frac{2}{\mu\sigma\omega}\right)^{1/2}$$



الشكل (5-8)

Scanned by CamScanner

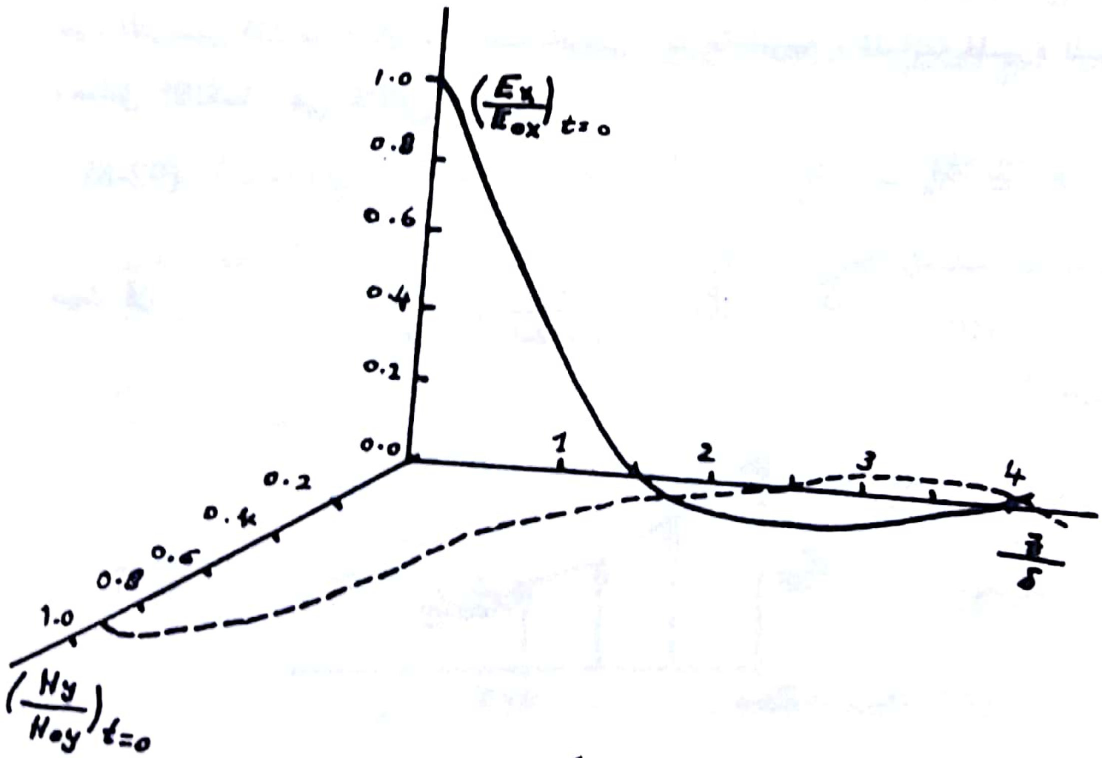
$$(2) \quad v = \frac{\omega}{K_t} = \omega \delta = \left(\frac{2\omega}{\mu a}\right)^{1/2} \qquad (93\text{-}8)$$

$$(3) \quad Z = \frac{\mu\omega}{K} = \left(\frac{\mu\omega}{a}\right)^{1/2} e^{i\pi/4} \qquad (94\text{-}8)$$

ومما تقدم نستنتج أن المتجه H^{-} يتخلف عن المتجه E^{-} بزاوية مقدارها $\pi/4$ عند انتشار الموجه الكهرومغناطيسية المستوية في مادة جيدة التوصيل والسبب في ذلك يعود الى أن التيار المتسبب عن المتجه H^{-} في هذه الحالة هو تيار التوصيل وليس تيار الازاحة كما هي الحالة عليه في الاوساط غير الموصلة . وهكذا يمكن كتابة المعادلة الخاصة بكل من H^{-}, E^{-} للموجه الكهرومغناطيسية المستوية المنتشرة في وسط جيد التوصيل كالاتي :

$$\bar{E}_x = \bar{i}\, E_{ox}\, e^{i(\omega t - z/\delta) - z/\delta} \qquad (95\text{-}8)$$

$$\bar{H}_y = \bar{j}\, H_{oy}\, e^{i(\omega t - z/\delta - \pi/4) - z/\delta} \qquad (96\text{-}8)$$



الشكل (6-8)

حيث أن $H_{oy} = \left(\frac{a}{\mu\omega}\right)^{1/2} E_{ox}$ ، الشكل (6-8) يوضح كيفية تغير كل

Scanned by CamScanner

من E_x و H_y مع المحور z في الزمن $t = 0$ حيث رسمت كل من الدالتين لكل من E_x^- و H_y^- كدالة جيب تمام كالاتي :

$$\frac{E_x}{E_{0x}} = e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta)$$

$$\frac{H_y}{H_{0y}} = e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta - \pi/4)$$

ونود ان نؤكد هنا أن العمق السطحي δ يقل كلما زادت قيمة قابلية التوصيل للمادة σ او معامل نفوذيتها μ · كما أن δ تقل قيمتها كلما زاد تردد الموجه الكهرومغناطيسية ω وذلك لان δ تتناسب عكسيا مع الجذر التربيعي لحاصل ضرب هذه المقادير الثلاثة · كما ان سعة كلا من المجالين H^-, E^- لا تنعدم عند هذا العمق من المادة وانما تهبط قيمتها الى $1/e$ من القيمة الاصلية · ان قيمة δ التي حسبت في هذا البند تصلح فقط للسطوح المستوية او السطوح المنحنية التي يكون نصف قطر تكورها كبيرا اذا ما قورن بالعامل δ · ويعد العامل δ من العوامل المهمة للمادة الموصلة لانه لتردد معين يعتمد على قابلية توصيل المادة σ ومعامل نفوذيتها μ التي تعتبر من الصفات المميزة للمادة الموصلة · ان المواد جيدة التوصيل تعد معتمة (غير شفافة) بالنسبة لموجات الضوء المرئي الا اذا كانت على شكل اغشية رقيقة وذلك لتوصيليتها العالية من ناحية وللتردد العالي الخاص بالموجات الضوئية · والملحق (4) يعطينا فكرة من العامل δ لمواد موصلة مختلفة ولاربعة قيم مختلفة من التردد ·

(هـ) انتشار الموجات الكهرومغناطيسية المستوية في الغازات المتاينة :

تعد الغازات عالية التاين جيدة التوصيل الكهربائي ونود تحت هذا العنوان دراسة انتشار الموجات الكهرومغناطيسية المستوية في الغازات المتأينة والتي تسمى بعض الاحيان بالبلازما · ولقد اعطى هذه التسمية للغازات المتاينة كل من تونكس ولانكماير(L.Tonks & I.Langmuir)وذلك عام ١٩٢٩م وسوف نفترض في هذه الدراسة أن ضغط الغاز المتأين واطىء لتفادي الخسارة في الطاقة الناتجة من تصادم الايونات واعتبارها مهملة · وبهذا نجد ان مفهوم التوصيل في الغازات المتأينة يختلف كليا من مفهوم التوصيل في المعادن وذلك لان الكترونات التوصيل في المعادن تعاني من اصطدامات كثيرة مع الشبكة البلورية · وقبل البدء في حل

Scanned by CamScanner

معادلة الموجة في هذا الوسط من الغازات المتأينة نود أن نعطي فكـرة عن مفهـوم قابلية التوصيل في تلك الغازات • لنتصـور ان موجـه كهرومغناطيسية مستوية تنتشر في الاتجاه z فيها المجال الكهربائي $\bar{E}$ مستقطب في الاتجاه x وبذلك يأخذ المجال المغناطيسي $\bar{H}$ الاتجاه y • ولنفرض أن أيونا شحنتـه Q وكتلته m وسرعته u موجود في نقطة أصل المحاور المتعامدة x, y, z تعرض لتأثير هـذه الموجه ، فـأن قـوة لورنس المسلطة على الايون بتأثير المجالين الكهربائي والمغناطيسي هي :

$$\bar{F} = Q\left[\bar{i}\, E_x + \bar{v} \times \bar{j}\, \mu H_y\right] \qquad (97\text{-}8)$$

حيث تمثل كل من dz/dt, dx/dt مركبتي السرعة $\bar{u}$ في الاتجاهين z, x على التوالي اما التعجيل الذي يكتسبه الايون بتأثير هذه القوة فهو :

$$(1) \quad \bar{a}_x = \bar{i}\, \frac{Q}{m}\left(E_x - \mu H_y \frac{dz}{dt}\right)$$

$$= \bar{i}\, \frac{Q E_x}{m}\left(1 - \frac{1}{c}\frac{dz}{dt}\right) \qquad (98\text{-}8)$$

حيث اننا اعتبرنا في هذه الحالة كما هي الحالة عليه في الفراغ ان $c = E_x/\mu H_y$.

$$(2) \quad \bar{a}_y = 0$$

لانه لا توجد قوة مؤثرة في الايون في الاتجاه y.

$$(3) \quad \bar{a}_z = \bar{k}\, Q\, \frac{E_x}{mc}\, \frac{dx}{dt} \qquad (99\text{-}8)$$

ومن البديهي أن dz/dt وهي سرعة الايون في الاتجاه z تكون اصغر بكثير

من سرعة الضوء c وهذا ما سوف نتطرق له في أحد الامثلة المحلولة في نهاية هذا الفصل لذلك فان المعادلة (98-8) تؤول الى :

$$\bar{a}_x = \bar{i}\, \frac{Q}{m}\, E_x \qquad (100\text{-}8)$$

وسوف نستعمل هنا الدوال المثلثية (الجيب والجيب تمام) بدلا من الدالة الاسية المعقدية للتعبير عن المتجه $\bar{E_x}$ وذلك تسهيلا لمهمتنا في معالجة بعض الصـيغ

Scanned by CamScanner

الرياضية . لذلك نفرض أن الدالة التي تمثل المتجه E_x هي كالاتي :

$$\bar{E}_x = \bar{i}\, E_{ox} \cos \omega t \qquad (101\text{-}8)$$

وقد أهملنا العامل kz في طور هذه الدالة لان كلا من x, u, a_x تعتمد على t فقط ومن المعادلتين (8-100), (8-101) نحصل على :

$$\bar{a}_x = \bar{i}\, \frac{Q}{m} E_{ox} \cos \omega t \qquad (102\text{-}8)$$

ومن هذه العلاقة يمكن الحصول على العلاقتين الخاصتين بالسرعة في الاتجاه x أي dx/dt وعلى الازاحة x وذلك باجراء عملية التكامل على العلاقة الاخيرة :

$$\bar{u}_x = \bar{i}\, \frac{dx}{dt} = \bar{i}\, \frac{Q}{m\omega} E_o \sin \omega t \qquad (103\text{-}8)$$

$$\bar{x} = -\bar{i}\, \frac{Q}{m\omega^2} E_o \cos \omega t \qquad (104\text{-}8)$$

ولقد أهملنا ثابتي التكامل في المعادلتين الاخيرتين وذلك لاننا افترضنا أن كلا من موقع الايون وسرعته في الزمن t = o هما صفرا . والان لنحسب كلا من سرعة الايون بالاتجاه z وهي dz/dt وكذلك الازاحة z وذلك لمقارنتها بالسرعة بالاتجاه x وهي dx/dt والازاحة x لذا نستخرج قيمة $\bar{a}_z$ من العلاقتين (8-99) (8-103)

وبذلك نحصل على :

$$\bar{a}_z = \frac{d^2 z}{dt^2}\, \bar{k} = \bar{k}\, \frac{Q^2 E_{ox}}{2\omega m^2 c} \sin 2\omega t \qquad (105\text{-}8)$$

تكامل طرفي المعادلة (8-105) للحصول على : $u_z = \dfrac{dz}{dt}$

$$\bar{u}_z = \bar{k}\, \frac{dz}{dt} = \bar{k}\, \frac{Q^2 E_{ox}^2}{4\omega^2 m^2 c} \cos 2\omega t \qquad (106\text{-}8)$$

$$\bar{z} = -\bar{k}\, \frac{Q^2 E_{ox}^2}{8\omega^3 m^2 c} \sin 2\omega t \qquad (107\text{-}8)$$

ولحساب قابلية توصيل البلازمه σ نستعمل العلاقة التالية : $\sigma \bar{E}_x = \bar{j}_f$

حيث تمثل هنا j_f ما يسمى بكثافة تيار الحمل للايونات (Convectien Current density) وبالتعويض من قيمة j_f بما يساويها نحصل على :

$$\alpha E_x = j_f = \sum_i N_i Q_i \frac{dx}{dt} \qquad (108\text{-}8)$$

حيث تمثل N_i عدد الايونات في المتر المكعب Q_i شحنة الايون وقد اعتمدنا هنا المقدار dx/dt وهي سرعة انجراف الايونات في الاتجاه x لان dz/dt وهي سرعه انجراف الايونات بالاتجاه z تهمل اذا ما قورنت بالمقدار dx/dt (انظر المثال (6) في نهاية الفصل) وبالتعويض من قيمة dx/dt بما يساويها من المعادلة (103-8) فان المعادلة (108-8) تؤول الى الشكل التالي :

$$\alpha E_{ox} \cos \omega t = \sum_i \frac{N_i Q_i^2}{\omega m_i} E_{ox} \sin \omega t \qquad (109\text{-}8)$$

ويمكن ان تكتب المعادلة (109-8) بالشكل التالي :

$$\alpha E_{ox} \cos \omega t = \sum_i \frac{N_i Q_i^2}{\omega m_i} E_{ox} \cos(\omega t - \pi/2)$$

او ان (110-8)

$$R_e\left[\alpha E_o e^{i\omega t}\right] = R_e\left[\sum_i \frac{N_i Q_i^2}{\omega m_i} e^{i(\omega t - \pi/2)}\right]$$

اذ تمثل R_e الجزء الحقيقي من الدالة الاسية المعقدية . ومن هذه العلاقة وبعد التعويض عن المقدار $e^{-i\pi/2}$ بالمقدار $-i$ نجد أن :

$$\alpha = -i \frac{N_i Q_i^2}{\omega m_i} \qquad (111\text{-}8)$$

وبما أن كتلة الايونات الموجبة كبيرة بالنسبة للالكترونات بينما تكون شحنة الايون أما مساوية الى شحنة الالكترون أو تزيد بضع مرات عن شحنته لذلك فان المقدار Q/m يكون كبيرا بالنسبة للالكترون مما هو عليه للايونات الموجبة . لذلك فاننا سوف نعتمد تأثير الالكترونات فقط في حساب قابلية التوصيل في المعادلة (111-8) باعتباره الجزء المؤثر في حساب قابلية التوصيل للغاز المتاين وبذلك تاخذ المعادلة (111-8) الصيغة التالية :

$$\alpha = -i \frac{N_e Q_e^2}{\omega m_e} \qquad (112\text{-}8)$$

ومعنى قابلية التوصيل الخيالية السالبة هو انها تكافيء ممانعة حثية خالصة .

مما تقدم نجد أن تيار العمل الالكتروني يتأخر عن المجال الكهربائي E_x بزاوية طور مقدارها $\pi/2$ وهو تيار حثي النوعية • وبما ان كثافة تيار الازاحة $\frac{\partial D}{\partial t} = i\omega \epsilon_0 E_x$ (استعملنا سماحية الفراغ ϵ_0 لكون كثافة الغاز المتأين واطئة)

نجد من هذه العلاقة ان تيار الازاحة يتقدم المجال الكهربائي E_x بزاوية طور مقدارها $\pi/2$ أي أن تيار العمل الالكتروني يكون معاكسا في الاتجاه لتيار الازاحة فيكون فرق الطور بينهما يساوي π. ومعنى هذا أن التيار الكلي يكون في حالة وجود الغاز المتأين اقل مما هو عليه في حالة عدم وجوده لذلك ففي حالة وجود الغاز المتأين فان كثافة التيار الكلية تأخذ الصيغة التالية :

$$j_t = j\omega\epsilon_0 E_x - j\frac{N_e Q_e^2}{\omega m_e} E_x$$

$$= j\omega\epsilon_0 E\left\{1 - \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{N_e Q_e^2}{\epsilon_0 m_e}\right)\right\}$$

$$= j\omega\epsilon_0 E\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \qquad (113\text{-}8)$$

حيث أن الكمية $\omega_p = \left(\frac{N_e Q_e^2}{\epsilon_0 m_e}\right)^{1/2}$ تسمى التردد الزاوي للبلازما والتردد الزاوي للالكترونات هو :

$$f_p = 8.98\,(N_e)^{1/2} \qquad (114\text{-}8)$$

وسوف نلاحظ فيما يلي أهمية التردد الزاوي وتأثيره على انتشار الموجات الكهرومغناطيسية في الغاز المتأين • ولدراسة ذلك نرجع الى معادلة الموجه (50-8) وبعد أن نعوض قيمة σ من المعادلة (112-8) فان معادلة الموجه تأخذ الشكل التالي :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = \epsilon_0\mu_0\omega^2 - \frac{\mu_0 N_e Q_e^2}{m_e} \qquad (115\text{-}8)$$

حيث اعتمدنا سماحية ونفاذية الفراغ للغاز المتأين ويمكن ان تكتب المعادلة (115-8) بالشكل التالي :

Scanned by CamScanner

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 \left(1 - \frac{N_e Q_e^2}{\omega^2 \epsilon_0 m_e}\right) E_x$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) E_x \qquad (116\text{-}8)$$

والحل للمعادلة التفاضلية هذه هو التالي :

$$\bar{E}_x = \bar{i}\, E_{ox}\, e^{i(\omega t \pm Kx)} \qquad (117\text{-}8)$$

وعند استعمال المعادلة (117-8) في المعادلة (116-8) نجد ان :

$$K = \frac{1}{\lambda_0}\left[1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\right]^{1/2}$$

ونلاحظ من العلاقة الاخيرة أن العدد الموجي يكون حقيقيا اذا كان $\omega_p < \omega$ أي أن تردد الموجه اكبر من تردد البلازما وبهذا نحصل على موجه كهرومغناطيسية مستوية تنتشر بدون اضمحلال في الاتجاه z . وفي هذا الوسط نجد أن قيمة كل من العدد الموجي ، سرعة الموجه ، الممانعة المميزة للوسط معامل الانكسار كالاتي :

$$(1) \qquad K = \frac{1}{\lambda_0}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{1/2} \qquad (118\text{-}8)$$

$$(2) \qquad v = \frac{\omega}{K} = \frac{c}{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{1/2}} \qquad (119\text{-}8)$$

$$(3) \qquad Z = \frac{\mu\omega}{K} = \left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0}\right)^{1/2} \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{1/2}} \qquad (120\text{-}8)$$

$$(4) \qquad n = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{1/2} \qquad (121\text{-}8)$$

ومما تقدم نجد أن كلا من $E^{\cdot}$, $H^{\cdot}$ هما بنفس الطور وان $H^{\cdot}$ تأخذ الشكل التالي :

$$\bar{H}_y = \bar{j}\left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{1/2} E_{ox}\, e^{i(\omega t - Kx)} \qquad (122\text{-}8)$$

ان سرعة طور الموجه الكهرومغناطيسية في الغاز المتاين تكون اكبر من سرعة طور الموجه في الفراغ كما اننا نجد من الشكل (7-8) الذي يوضح قيمة كل من n و 1/n

Scanned by CamScanner

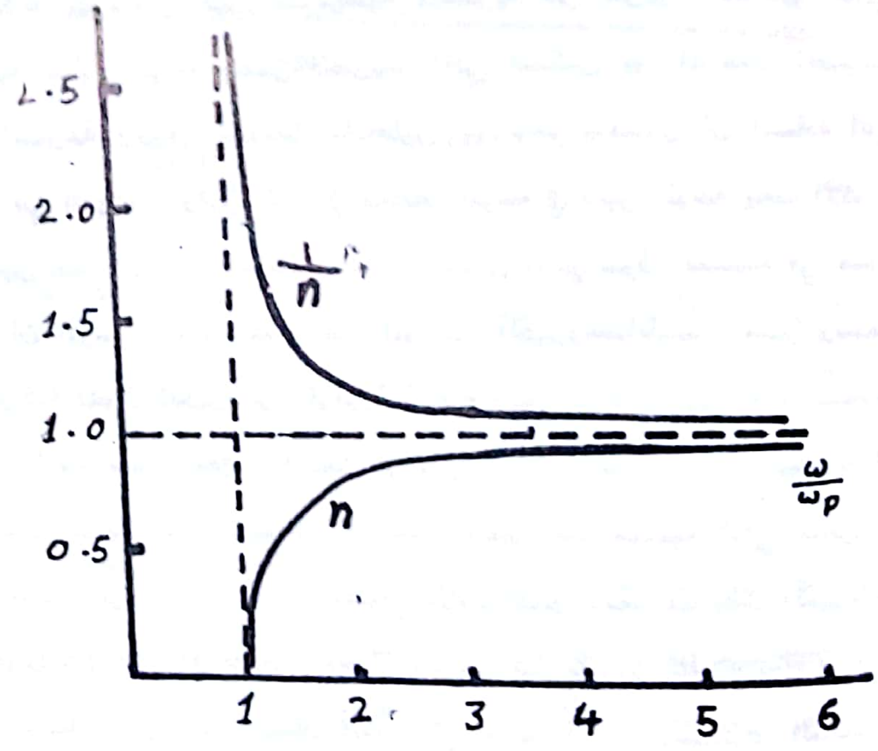
مع المقدار $\omega/\omega p$ ، ان قيمة n تقترب من الواحد عندما تكبر قيمة $\omega/\omega p$

ومعنى هذا انه اذا كانت قيمة ω اكبر بكثير من ωp فان قيمة n تقترب من الواحد اي ان الموجه لا تتاثر بوجود الغاز المتاين . ونلاحظ من العلاقة (8-118) انه اذا كانت $\omega < \omega p$ فان قيمة K تكون خيالية وبذلك تكون العلاقة الخاصة بالمتجه $\bar{E}_x$ كالاتي :

$$\bar{E}_x = i E_{ox} e^{i(\omega t - Kz)}$$

وتاخذ العلاقة الخاصة بـ $\bar{H}_y$ الشكل التالي:

$$\bar{H}_y = i H_{oy} e^{i(\omega t - Kz)}$$



الشكل (7-8)

ومعنى هذا انه لا توجد موجه حيث انه في المعادلتين الدخيرتين لا وجود للمتغير z في طور كل من $\bar{E}_x$ و $\bar{H}_y$ وان سعة كل من $\bar{E}_x$ و $\bar{H}_y$ تتناقص اسيا بزيادة z . وخلاصة القول أن الموجه الكهرومغناطيسية المستوية اذا انتقلت خلال غاز متاين فهناك حالتان (١) اذا كانت $\omega p < \omega$ فان الموجه الكهرومغناطيسية تمر بدون اضمحلال خلال الغاز المتاين (٢) اما اذا كانت $\omega p > \omega$ فلا يكون هناك

Scanned by CamScanner

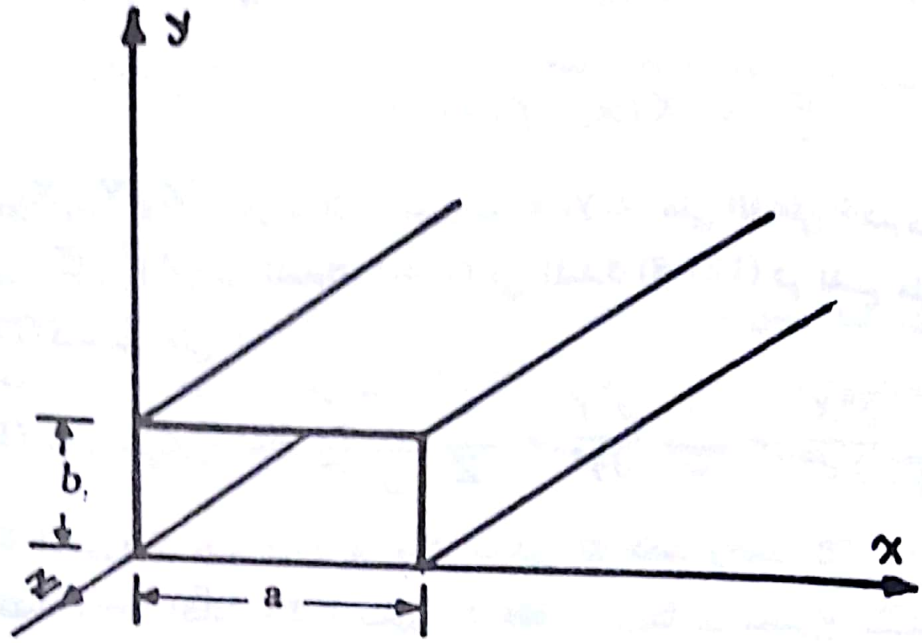
وجود للموجه الكهرومغناطيسية ٠

(9-8) حل معادلة الموجه في دليل الموجه

ناقشنا في البند السابق انتشار الموجات الكهرومغناطيسية في عدة اوساط مختلفة وجدنا فيها الوسط دائما حيزا غير محدود ٠ وسوف نناقش في هذا البند انتشار الموجات الكهرومغناطيسية المستوية داخل دليل الموجه باعتباره حيزا محدودا في أبعاده ٠ هناك أنواع مختلفة من دليل الموجه وسوف نركز دراستنا هنا على انتشار الموجات الكهرومغناطيسية المستوية في دليل الموجه مستطيل المقطع وذلك لان شكل الموجات الكهرومغناطيسية المنتشرة خلاله يكون بسيطا كما أن هذا النوع من دليل الموجه هو الشائع في الاستعمال ، وهو عبارة عن أنبوب معدني مستطيل المقطع تنتشر خلاله الموجات الكهرومغناطيسية المستوية عن طريق انعكاسها على الجدران الداخلية لدليل الموجه بنفس الطريقة التي تنعكس بها الموجات الصوتية داخل الانابيب الفارغة وسوف نستعمل المعاملين ϵ_o , μ_o باعتبار أن المادة التي تملأ دليل الموجه هي الهواء ٠ وقبل البدء في معالجة الموجه في دليل الموجه يجب الاشارة الى نقطتين مهمتين هما :(١) ان شرط الحدود الاساس الذي سوف نعتمده في عملنا الحالي باعتبار أن الوسط الذي تنتقل فيه الموجه الكهرومغناطيسية هو وسط محدود هو ان مركبة المجال الكهربائي الموازية لسطح دليل الموجه (E_t) تكون مساوية الى الصفر وذلك لاننا سوف نعتبر قابلية توصيل مادة دليل الموجه مساوية الى اللانهاية (2) هناك نوعان من الانماط للموجات الكهرومغناطيسية التي يمكن أن تنتشر داخل دليل الموجه مستطيل المقطع الاول هو نمط الموجات الكهربائية المستعرضة Transverse electric mode ويرمز لها بالرمز TE-mode وفي هذا النوع من الموجات يكون فيه المجال الكهربائي موجودا في المستوى العمودي على اتجاه انتشار الموجه فاذا فرضنا ان الموجه تنتشر في الاتجاه (z) فان مركبتي المجال الكهربائي في هذا النوع من الموجات يكون في المستوى xy اي أن $E_z = 0$ والنوع الثاني هو نمط الموجات المغناطيسية المستعرضة Transverse magnetic mode ويرمز له بالرمز TH-Mode, ويكون فيها المجال المغناطيسي وانما في المستوى xy أي أن $H_z = 0$ ٠ ولنلاحظ الان الشكل (8-8) الذي يوضح دليل الموجه مستطيل المقطع وابعاده b, a والذي يمتد بالاتجاه z وهو اتجاه انتشار

Scanned by CamScanner

الموجه الكهرومغناطيسية ٠ وسوف نختار نقطة الاصل في احدى زوايا دليل الموجه بحيث يقع مقطع دليل الموجه في الربع الاول من المستوى xy وبما أن الوسط



الشكل (8-8)

الذي يملأ دليل الموجه هو الهواء كما ذكرنا سابقا لذلك فان معادلة الموجه تأخذ الصيغة التالية :

$$\nabla^2 \bar{F}_i = -\epsilon_o \mu_o \omega^2 \bar{F}_i \qquad (123\text{-}8)$$

حيث يعني الحرف F_i أي مركبة من مركبات كل من المتجهات E^-, H^-, D^-, B^- كما أن الحرف i يشير الى أي من المحاور الثلاثة z, y, x ٠ عند حل معادلة الموجه في الحيز غير المحدود ذكرنا ان F_i تعني E_x حيث أن المجال الكهربائي له مركبة واحدة فقط واستخرجنا المركبة الوحيدة للمتجه H^- وهي H_y من العلاقة $H_y = \frac{E_x}{Z}$

أما في هذه الحالة ولوجود شروط حدود خاصة وانماط خاصة بالموجه الكهرومغناطيسية لذلك علينا أن نعين نوع النمط اولا ثم شرط الحدود والعلاقات التي تربط بين مركبات كل من المجالين الكهربائي والمغناطيسي لكي نحدد ماذا تعني F_i في معادلة الموجه ٠ وفي البدء لندرس معادلة الموجه (123-8) وباتباع نفس

Scanned by CamScanner

الطريقة التي اتبعت في حل معادلة لابلاس في الفصل الثاني من هذا الكتاب لحل المعادلة التفاضلية (8-123) وهي طريقة فصل المتغيرات Separation of variables لنفرض أن

$$F_i = X(x)\, Y(y)\, Z(z) \qquad (124\text{-}8)$$

حيث أن $Z_{(z)} Y_{(y)} X_{(x)}$ هي دوال للمتغيرات z, y, x على التوالي . نعوض من قيم كل من $\bar{F}_i$ و $\nabla^2 \bar{F}_i$ من المعادلة (8-124) في المعادلة (8-123) ثم نقسم على المعادلة (8-124) فنحصل على :

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -\epsilon_0 \mu_0 \omega^2 \qquad (125\text{-}8)$$

نجد من المعادلة الاخيرة أن الحد الاول هو دالة للمتغير x فقط والحد الثاني دالة للمتغير y فقط والحد الثالث دالة للمتغير z فقط . وبما ان مجموع هذه الحدود الثلاثة مقدار ثابت اذن يجب ان يكون كل حد من هذه الحدود الثلاثة مساويا الى مقدار ثابت وكالاتي :

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = K_x^2 \qquad (a)$$

$$\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = K_y^2 \qquad (b) \qquad (126\text{-}8)$$

$$\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = K_z^2 \qquad (c)$$

ومن المعادلتين (8-125) و (8-126) نجد أن :

$$K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = -\epsilon_0 \mu_0 \omega^2 = -K^2 \qquad (127\text{-}8)$$

لنفرض ولتسهيل عملنا أن :

$$K_x^2 + K_y^2 = -K_c^2 \qquad (128\text{-}8)$$

حيث أن K_c مقدار ثابت وبهذا يكون :

$$K_z^2 = K_c^2 - K^2 \longrightarrow K_z = \pm\sqrt{K_c^2 - K^2} \qquad (129\text{-}8)$$

Scanned by CamScanner

ونلاحظ من هذه العلاقة أنه اذا كان $K^2 > K_c^2$ فان K_z يكون خيالي اي ان :

$$K_z = \pm i\sqrt{K^2 - K_c^2} = \pm i\beta_g \qquad (130\text{-}8)$$

حيث أن قيمة β_g حقيقية لاننـا فرضنا أن $K^2 > K_c^2$ ويسمى β_g بمعامل الانتشار في دليل الموجه وبهذا نجد أن الحل الاتي يحقق المعادلة (c-126-8) وهو :

$$Z = e^{K_z z} = e^{\pm i\beta_g z} \qquad (131\text{-}8)$$

وهذا الحل يمثل موجه منتشرة في الاتجاه $\pm z$ وقبل ان نجد الحل الخاص الذي يحقق العلاقتين:(a-126-8) , (b-126-8)لاكمال حل معادلة الموجه علينا معرفة العلاقة بين مركبات المجال المختلفة للموجه الكهرومغناطيسية وكذلك نمط الموجه ولنبدأ بالنمط TE.

(أ) النمط الكهربائي TE-Mode:

في هذا النوع من الموجات الكهرومغناطيسية يكون المجال الكهربائي مستعرضا أي ان $E_z = 0$ ومن المعادلة (131-8) نجد أن المشتقة $(\partial/\partial z)$ تعني K_z . وبهـــذا فان معادلتي الدوار لماكسويل تأخذان الشكل التالي

$$-K_z E_y = -i\mu_0\omega H_x \quad (a) \qquad \frac{\partial H_z}{\partial y} - K_z H_y = i\epsilon_0\omega E_x \quad (d)$$

$$K_z E_x = -i\mu_0\omega H_y \quad (b) \qquad K_z H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = i\epsilon_0\omega E_y \quad (e)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i\mu_0\omega H_z \quad (c) \qquad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0 \quad (f)$$

(132-8)

وبحل المعادلتين a و e آنيا وكذلك b و d نحصل على ما يلي :

$$E_x = -\frac{i\mu_0\omega}{K_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (a)$$

$$E_y = \frac{i\mu_0\omega}{K_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (b) \qquad (133\text{-}8)$$

$$H_x = \frac{K_z}{K_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (c)$$

$$H_y = \frac{K_z}{K_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (d)$$

Scanned by CamScanner

ومن هذه المعادلة الاخيرة نجد ان جميع مركبات المجال E_x و E_y و H_x و H_y تعتمد على المركبة H_z لذلك نعوض عن F_i في معادلة الموجه المركبة H_z وعند حل معادلة الموجه الخاصة بالمركبة H_z يمكن معرفة العلاقات الخاصة بجميع المركبات الاخرى باستعمال المعادلة (8-133) . وعندما نأخذ بنظر الاعتبار المعادلة (8-131) تأخذ معادلة الموجه (8-124) الشكل التالي :

$$H_z = X Y e^{\pm i \beta_g z}$$

(8-134)

ان كلا من الدالتين X , Y هما دالتان لا علاقة لاحداها بالاخرى وكل منهما يجب أن تحقق معادلة الموجه على انفراد اي أنهما يحققان المعادلتين (8-126-a) (8-126-b) على التوالي . ان كلا من هاتين المعادلتين تمثلان معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية وتتضمن كلا منهما حلين يحققان المعادلتين المشار اليهما اعلاه . ان الحل المناسب لكل من هاتين الدالتين هو دالة الجيب والجيب تمام كالاتي :

$$X = A_m \sin(i K_x X) + B_m \cos(i K_x X) \qquad (8\text{-}135)$$

$$Y = C_n \sin(i K_y Y) + D_n \cos(i K_y Y) \qquad (8\text{-}136)$$

حيث تمثل كل من A_m , B_m , C_n , D_n ثوابت يمكن الحصول على قيمتها بعد معرفة شروط الحدود . ان شروط الحدود التي يمكن تطبيقها هنا هي ان كل مركبة للمتجه E موازية لسطح دليل الموجه على جدار دليل الموجه تكون مساوية الى الصفر . ان شرطي الحدود هما كالاتي : (1) تكون E_y مساوية الى الصفر عندما تكون $x = o$, $x = a$ ومن العلاقة (8-133-b) نجد أن $\frac{\partial H_z}{\partial x}$ في هاتين النقطتين يجب أن تكون مساوية الى الصفر أي ان :

$$\left[\frac{\partial H_z}{\partial x}\right]_{x=0} = 0 \quad ㄥ \quad \left[\frac{\partial H_z}{\partial x}\right]_{x=a} = 0 \qquad (8\text{-}137)$$

(2) تكون Ex مساوية الى الصفر عندما تكون $y = o$, $y = b$.ومن العلاقة (8-133-a) نجد أن $\frac{\partial H_z}{\partial y}$ في هاتين النقطتين يجب ان تكون مساوية الى

Scanned by CamScanner

الصفر اي ان :

$$\left[\frac{\partial H_z}{\partial y}\right]_{y=0} = 0 \quad \text{و} \quad \left[\frac{\partial H_z}{\partial y}\right]_{y=b} = 0 \qquad (138\text{-}8)$$

ولتحقيق شرطي الحدود الفاصلة (8-137)، (8-138) ومن ملاحظة المعادلتين (8-135) و (8-136) يجب أن يكون :

$$i K_x = \frac{m\pi}{a} \quad (a) \qquad A_m = 0 \quad (c)$$

(139-8)

$$i K_y = \frac{n\pi}{b} \quad (b) \qquad C_n = 0 \quad (d)$$

حيث أن كلا من m n هي اعداد موجبه صحيحة تأخذ القيم 3, 2, 1, 0 ....

وبهذا تأخذ المعادلتان (8-135) ، (8-136) الشكل التالي :

$$X = B_m \cos\frac{m\pi}{a}x \qquad (140\text{-}8)$$

$$Y = D_n \cos\frac{n\pi}{b}y \qquad (141\text{-}8)$$

وبتعويض هاتين القيمتين في المعادلة (8-134) نحصل على:

$$\bar{H}_z = \bar{k} H_{oz} \cos\frac{m\pi}{a}x \cos\frac{n\pi}{b}y\, e^{\pm i\beta_g z} \qquad (142\text{-}8)$$

وباستعمال المعادلة(8-133) يمكننا الحصول على جميع مركبات المجالين H^-, E^- للموجه الكهرومغناطيسية ذات النمط TE .

(ب) النمط المغناطيسي المستعرض TM_Mode:

في هذا النوع من الموجات الكهرومغناطيسية يقع المجال المغناطيسي في المستوى (xy) اي أن $H_z = 0$ وباستعمال الطريقة نفسها التي اتبعت في النمط TE نجد ان جميع مركبات المجال تعتمد على E_z وبتطبيق شروط الحدود الفاصلة بهذا النمط نجد أن أن :

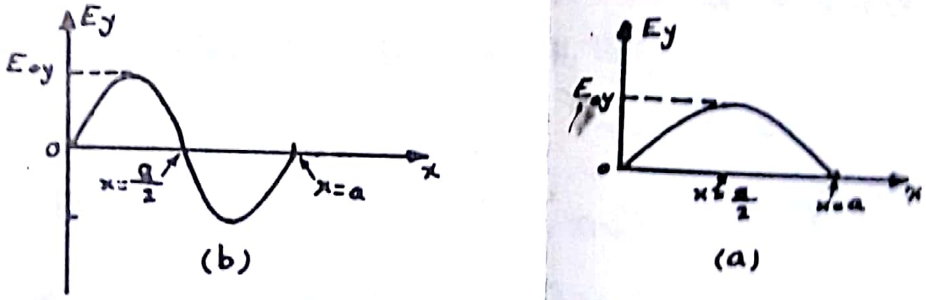
$$\bar{E}_z = \bar{k} E_{oz} \sin\frac{m\pi}{a}x \sin\frac{n\pi}{b}y\, e^{\pm i\beta_g z} \qquad (143\text{-}8)$$

وباستعمال العلاقات التي تربط بين E_z وبقية مركبات المجال يمكن الحصول على

Scanned by CamScanner

جميع المعادلات الخاصة بمركبات المجال للموجه الكهرومغناطيسية ذات النمط TM اما m و n التي ظهرت في المعادلات السابقة فهي تعني عدد انصاف طول الموجه في البعدين b, a على التوالي فاذا كانت $m = 1$ فان قيمة E_y (الشكل (a-9-8)) تتغير من صفر عند $(x = o)$ ثم تأخذ قيمتها العظمى عندما تكون $(x = a/2)$ بعدها تعود الى الصفر عندما تكون $(x = a)$. أما اذا كانت $m = 2$

فان E_y تتغير قيمتها كما في الشكل (b-9-8) حيث تأخذ القيمة صفر عند $x = o, x = a/2, x = a$ وتأخذ قيمتها العظمى عندما تكون $x = a/4$, $x = \frac{3a}{4}$.



الشكل (9-8)

ومن الجدير بالذكر هنا أن النمطين انفي الذكر يسميان TMmn, TEmn للدلالة على عدد انصاف الاطوال الموجبة التي تحدث في البعدين b, a . لقد ذكرنا في المعادلة (129-8) أن قيمة kz تكون خيالية (وبهذا تنتشر الموجه الكهرومغناطيسية فقط عندما تكون $K^2 > K_c^2$) وان قيمة K تساوي $2\pi/\lambda_o$ حيث أن λ_o هو طول الموجه الكهرومغناطيسية في الفراغ وبذلك يمكننا ان نكتب ما يلي :

$$K_c = \omega_c \sqrt{\epsilon_o \mu_o} = \frac{\omega_c}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_c} \qquad (144\text{-}8)$$

وتسمى λ_c طول موجه القطع والسبب في ذلك أن أي تردد أقل من ω_c الذي

Scanned by CamScanner

يسمى بتردد القطع تكون kz حقيقية ولا تكون هناك موجه كهرومغناطيسية لان المعامل $\exp.(\pm K_z z)$ يصبح معامل اضمحلال يؤدي الى تلاشي الموجه . وبالطريقة نفسها يمكننا كتابة العلاقة التالية :

$$\lambda_g = 2\pi / \beta_g \qquad (145\text{-}8)$$

وتسمى λ_g طول الموجه داخل دليل الموجه وبهذا يمكننا أن نكتب المعادلة(8-129) كالاتي :

$$-\beta_g^2 = K_c^2 - K^2 \qquad (146\text{-}8)$$

او أن

$$\frac{1}{\lambda_o^2} = \frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2} \qquad (147\text{-}8)$$

ومن هذه العلاقة نجد ان طول الموجه داخل دليل الموجه λ_g يكون دائما اكبـــر من طول الموجه في الفراغ λ_o كما أننا يمكن أن نكتب العلاقة التالية الخاصـــة بالمعامل K_c كالاتي :

$$-K_c^2 = K_x^2 + K_y^2$$

$$\therefore K_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \qquad (148\text{-}8)$$

ومن العلاقتين(8-146) ، (8-148) نجد أن :

$$\beta_g = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]} \qquad (149\text{-}8)$$

(8-10) امثلة محلولة :ـ

المثـــال (١) :ـ

متسعة ذات لوحين متوازيين مساحة كل منهما A والمسافة بينهما d ملئت بمادة عازلة ثابت عزلها K_e ، ربطت هــذه المتسعة على التـــوالي مع مقاومة R شحنت المتسعة بحيث كان فرق الجهد بين لوحيها V_o ثم فرغت خــلال المقاومة . أوجد تيار الازاحة في المادة العازلة في أي زمن t بعد البدء بتفريغ المتسعة .

Scanned by CamScanner

الحـــل :ـ

نكتب معادلة الدائرة في هــذه الحالــة وكما معروف لــدى الطالب بالشكل التالي :

$$R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{c}=0$$

$$\frac{dQ}{Q}=-\frac{1}{Rc}\,dt$$

وعندما نأخذ بنظر الاعتبار ان $Q_\circ CV_\circ$ في الزمن $t=0$ وعندما نكامل هذه المعادلة نحصل على:

$$Q=CV_\circ\, e^{-t/Rc}$$

وان

$$I=\frac{dQ}{dt}=-\frac{V_\circ}{R}\,e^{-t/Rc}$$

حيث ان I يمثل التيار العابر في الدائرة في اي زمن t ، والان لنستعمل المعادلة الخاصة بالشحنة لايجاد تيار الازاحة حيث أنه في هذه الحالة:

$$D=\frac{CV_\circ}{S}\,e^{-t/Rc}=\frac{\epsilon_\circ K_\circ V_\circ}{d}\,e^{-t/Rc}$$

كثافة تيار الازاحة

$$\frac{\partial D}{\partial t}=\frac{CV_\circ}{S}\left(-\frac{1}{Rc}\,e^{-t/Rc}\right)=-\frac{V_\circ}{SR}\,e^{-t/Rc}$$

تيار الازاحة

$$S\,\frac{\partial D}{\partial t}=-\frac{V_\circ}{R}\,e^{-t/Rc}$$

ويكون مساويا الى التيار العابر بالدائرة كما جاء اعلاه .

المثـــال (2) :ـ

اشتق معادلة الاستمرارية التي تعبر عن قانون حفظ الشحنة والتي تنص على أن :

$$\nabla\cdot\bar{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

وذلك باستعمال معادلات ماكسويل .

$\nabla\cdot\nabla\times H=\nabla\cdot\left(J+\frac{\partial D}{\partial t}\right)$

$\nabla\cdot J+\frac{\partial D}{\partial t}=0$

$\nabla\cdot J+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot D=0$ $\quad \nabla\cdot D=\rho$

$\nabla\cdot J+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$

Scanned by CamScanner

الحـــل :ـ

نأخذ التفرق لمعادلة ماكسويل الثانية لنحصل على :

$$\nabla\cdot(\nabla\times\bar{H}) = \nabla\cdot\left(\bar{J} + \frac{\partial\bar{D}}{\partial t}\right)$$

وبما ان تفرق أي دوار يساوي صفرا .

$$\nabla\cdot\bar{J} + \nabla\cdot\frac{\partial\bar{D}}{\partial t} = 0$$

ويمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل التالي :

$$\nabla\cdot\bar{J} + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\bar{D} = 0$$

لان كل من المشتقتين الخاصة بالزمن والخاصة بالمحاور قائمة لذاتها وباستعمال معادلة ماكسويل الثانية .

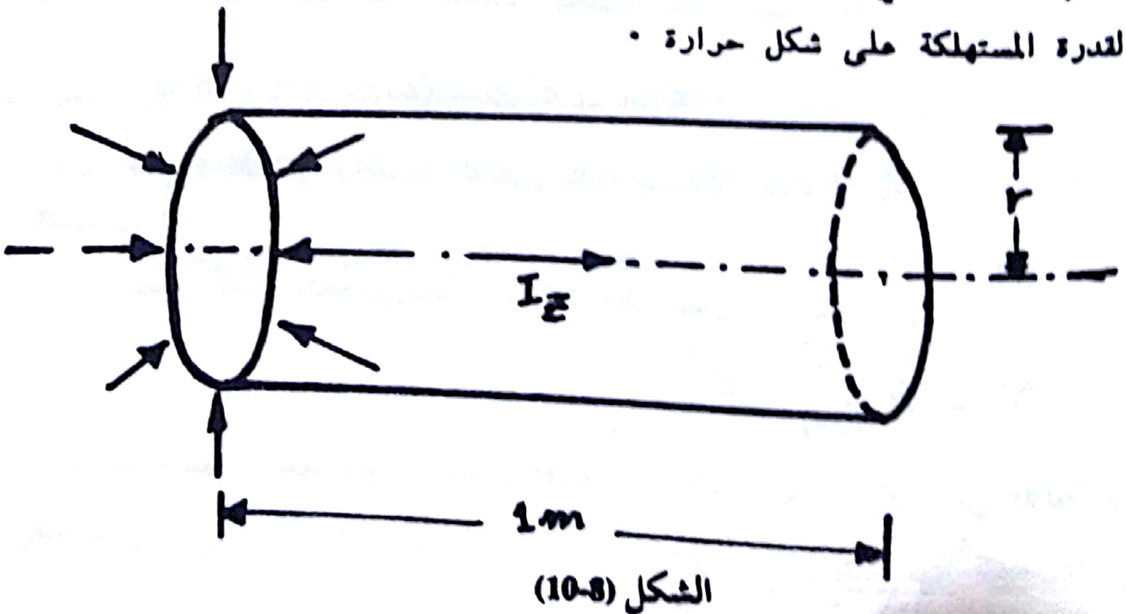
$$\nabla\cdot\bar{D} = \rho$$

نحصل على :

$$\nabla\cdot\bar{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

المثـال (3) :ـ

سلك مقطعه دائري يحمل تيارا كهربائيا مستمرا مقداره I_z نصف قطـره r ، طوله l ومقاومته R احسب مقدار واتجاه متجه بوينتنك في هذه الحالة . احسب القدرة التي تزود بها وحدة الطول من هـذا السلك واثبت انهـا تساوي القدرة المستهلكة على شكل حرارة .



الشكل (10-8)

Scanned by CamScanner

الحـــل :ـ

نلاحظ الشكل (8-10) الذي يمثل وحدة الطول من هذا السلك، ان فرق الجهد لوحدة الطول من هذا السلك هو :

$$\frac{V}{\ell} = E_x = I_x \frac{R}{\ell} = I_x R_o$$

حيث تمثل R_o المقاومة لوحدة الطول من هذا السلك كما أن المجال المغناطيسي على سطح السلك او أي نقطة خارجة هو :

$$H_\varphi = \frac{I_x}{2\pi r}$$

أن متجه بوينتنك يساوي $N = E \times H$ وفي هذه الحالة يكون باتجاه نصف القطر متجها الى محور السلك اي بالاتجاه $(-r)$ ومقداره يساوي :

$$N = -E_x H_\varphi = -\frac{R I_x^2}{2\pi r}$$

ولحساب القدرة الكلية التي تزودها وحدة الطول من السلك نجد حاصل ضرب متجه بوينتنك في المساحة السطحية لوحدة الطول من السلك .

$$P = 2\pi r(-N_r) = I_x^2 R$$

وكما هو واضح فان الناتج يساوي الحرارة المتولدة في وحدة الطول من السلك .

المثـــال (4) :ـ

موجه كهرومغناطيسية مستقطبة بيضويا يتغير فيها المجال الكهربائي كالاتي :

$$\bar{E} = \bar{i} E_o \sin(\omega t - Kx) + \bar{j} E_o \sin(\omega t - Kx + \pi/4)$$

أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى لمتجه بوينتنك لهذه الموجه .

الحـــل :ـ

يمكن كتابة متجه بوينتنك بدلالة المجال الكهربائي كالاتي :

$$\bar{N} = \bar{h}\sqrt{\frac{\epsilon_o}{\mu_o}}\, E^2$$

وبما أن للمجال الكهربائي مركبتين الاولى في الاتجاه x والثانية في الاتجاه y فأن :

$$E^2 = E_x^2 + E_y^2$$

Scanned by CamScanner

$$\bar{N} = \bar{k}\sqrt{\frac{\epsilon_o}{\mu_o}}\, E_o^2\left[\sin^2\theta + \sin^2\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

حيث ان θ اختيرت تساوي الطور $(\omega t-kz)$ لسهولة العمل • ولاجل ايجاد قيمة θ التي تجعل متجه بوينتنك يأخذ قيمته الصغرى والعظمى باعتبارها المتغير الذي يعتمد عليه متجه بوينتنك نفاضل المعادلة الاخيرة ونجعل الناتج مساويا الى صفر وبذلك نحصل على :

$$2\sin\theta\cos\theta + 2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

او ان

$$\sin 2\theta + \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\sin 2\theta = -\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

وهذا معناه ان $4\theta + \frac{\pi}{2}$ يجب ان تساوي صفرا •

(1) $\theta_1 = -\pi/8$

(2) $\theta_2 = \frac{3\pi}{8}$

$$\bar{N}_{min} = \bar{k}\sqrt{\frac{\epsilon_o}{\mu_o}}\, E_o^2\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right] = 0.3\sqrt{\frac{\epsilon_o}{\mu_o}}\, E_o^2\,\bar{k}$$

$$\bar{N}_{max} = \bar{k}\sqrt{\frac{\epsilon_o}{\mu_o}}\, E_o^2\left[\sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8}\right] = 1.7\sqrt{\frac{\epsilon_o}{\mu_o}}\, E_o^2\,\bar{k}$$

المثـال (5) :ـ

موجه كهرومغناطيسية مستوية جيبيه تنتشر في الهواء احسب كثافـة الطاقـة الكهربائية وكثافة الطاقة المغناطيسية لهذه الموجه واثبت انهما متساويتان •

الحـل :ـ

$$\bar{E} = \bar{i}\, E_o \sin(\omega t - Kz)$$

$$\bar{H} = \bar{j}\, H_o \sin(\omega t - Kz)$$

حيث ان $H_o = \frac{E_o}{Z_o}$ ، Z_o هي الممانعـة المميزة للموجـه في الهـواء وهي

Scanned by CamScanner

تساوي $\sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}}$.

(1) كثافة الطاقة الكهربائية:

$$\frac{1}{2}\epsilon_o E^2 = \frac{1}{2}\epsilon_o E_o^2 \sin^2(\omega t - Kz)$$

(2) كثافة الطاقة المغناطيسية :

$$\frac{1}{2}\mu_o H^2 = \frac{1}{2}\mu_o H_o^2 \sin^2(\omega t - Kz)$$

$$= \frac{1}{2}\mu_o \frac{E_o^2}{Z_o^2} \sin^2(\omega t - Kz)$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon_o E_o^2 \sin^2(\omega t - Kz)$$

∴ كثافة الطاقة الكهربائية = كثافة الطاقة المغناطيسية .

المثال (6) :ـ

أحسب نسبة سرعة الالكترون $(dz/dt)_{max}$ في سحابة الكترونية الى سرعة موجه كهرومغناطيسية جيبية في الفراغ c ثم احسب هذه النسبة لشعاع ليزر ينقل قدرة كثافتها $10^{16}\ Watt/m^2$ اذا كان تردد هذه الموجه $f = 10^{16}\ Hz$.

الحـــل :ـ

في البند (8-8) وجدنا أن :

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_{max} = \frac{Q_e^2 E_o^2}{4\omega^2 m_e C}$$

$$\frac{1}{c}\left(\frac{dz}{dt}\right)_{max} = \frac{Q_e^2 E_o^2}{4\omega^2 m_e C^2} = \frac{2.17 \times 10^3 E_o^2}{f^2}$$

$$= 1.63 \times 10^6 N_{av.} / f^2$$

Scanned by CamScanner

حيث يمثل المقدار Nav معدل متجه بوينتنك لهذه الموجه وان:

$$N_{av} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\, E_0^{2}$$

وتكون هذه النسبة لشعاع الليزر كالاتي :

$$\frac{1}{C}\left(\frac{dx}{dt}\right)_{max} = 10^{-8}$$

تمارين

(1) متسعة ذات لوحين متوازيين دائريين نصف قطر كل منهما a ربطت بمصدر متغير للقوة الدافعة الكهربائية بحيث كانت الشحنة عليهما تتغير حسب العلاقة $Q = Q_0 \sin \omega t$ الا أن Q_0 مقدار ثابت · أهمل تأثير الحافات للمتسعة أثبت ان المجال المغناطيسي بين صفيحتي المتسعة وعلى بعد r من محورهما المشترك هو :

$$H = \frac{Q_0 r \omega}{2\pi a^2} \cos \omega t$$

(2)(أ) اثبت أن العلاقة التالية تصح لموجه جيبية مستوية تنتشر في الفراغ $N_{av} = 2.16 \times 10^{-3} E_{eff}$ حيث تمثل N_{av} معدل القيمة لمتجه بوينتنك و E_{eff} القيمة الفعالة لشدة المجال الكهربائي ·(ب) احسب قيمة كل من E_0،H_0 لشعاع ليزر ينقل قدرة مقدارها 10×10^9 watt مع العلم ان قطر شعاع الليزر هو مليمتر واحد باستعمال العلاقة في الفرع (أ) ·

(الجواب : $E_0 = 1.1 \times 10^{9}$ V/m

$H_0 = 2.9 \times 10^{6}$ A/m

(3) موجه كهرومغناطيسية تنتقل في مادة عازلة أثبت أن معدل القيمة لمتجه بوينتنك يساوي حاصل ضرب v_p سرعة الموجة في ذلك الوسط في معدل كثافة الطاقة للموجه الكهرومغناطيسية ·

(4) عندما تنتشر موجه كهرومغناطيسية مستوية في وسط موصل اثبت ان نسبة كثافة الطاقة الكهربائية الى الطاقة المغناطيسية لهذه الموجه هي $\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ ·

Scanned by CamScanner

حيث أن Q هي نوعية الوسط وتساوي $\left|\frac{\partial D/\partial t}{J_f}\right|$.

(5) موجه كهرومغناطيسية مستوية تنتقل في الفراغ ترددها $f = 10^{10}\ Hz$

المجال الكهربائي لهذه الموجه يتبع العلاقة التالية :

$$E = i E_0 e^{i(\omega t - Kz)}$$

(أ) احسب كلا من العدد الموجي K وطول الموجه λ ، ثم استخرج العلاقة الخاصة بالمتجه H (ب) احسب كلا من $\nabla \times \bar{E}$ ، $-\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$

وقارن بين الناتجين .

(الجواب :

$$H = j \frac{KE_0}{\mu\omega} e^{i(\omega t - Kz)} \quad ، \lambda = 3\ cm \quad ، K = 209\ m^{-1}$$

(6) احسب كثافة الطاقة الكهربائية وكثافة الطاقة المغناطيسية للموجه الكهرومغناطيسية في التمرين (5) ثم أثبت أن مجموع كثافة الطاقة الكهربائية والمغناطيسية عندما يضرب في سرعة الموجه (c) في الفراغ فان الناتج يساوي معدل متجه بوينتنك Nav لهذه الموجه .

(7) موجه كهرومغناطيسية جيبية مستوية تنتشر في مادة عازلة ثابت عزلها Ke = 2 . فاذا كان التردد الزاوي لهذه الموجه هو $\omega = 3 \times 10^{7}\ rad/s$

احسب كلا من الممانعة المميزة لهذه الموجه ، عددها الموجي K وسرعة الموجه في هذا الوسط العازل .

(الجواب :

$$v = 2.1 \times 10^{8}\ m/s \quad ، K = 0.14\ m^{-1} \quad ، Z = 84\pi\ \Omega$$

(8) استعمل $\epsilon = \epsilon_0$ ، $\mu = \mu_0$ ، $\sigma = 5\ mho/m$

لماء البحر وسطا موصلا ما هي سرعة الموجه الكهرومغناطيسية v ومسافة الاضمحلال δ في هذا الوسط للترددات التالية :

$$f_4 = 10^{15}\ Hz \quad ، f_3 = 10^{10}\ Hz \quad ، f_2 = 10^{7}\ Hz \quad ، f_1 = 10^{3}\ Hz$$

(9) اثبت أن وحدة قياس العمق السطحي δ في المواد جيدة التوصيل هي المتر .

Scanned by CamScanner

(10) في المواد جيدة التوصيل أثبت أن قيمة العمق السطحي δ تكون صغيرة اذا ما قورنت مع طول الموجه λ .

(11) عندما تنتشر موجه كهرومغناطيسية مستوية في وسط جيد التوصيل أثبت أن نسبة كثافة الطاقة الكهربائية الى كثافة الطاقة المغناطيسية يساوي $\omega \epsilon_0 / \sigma$ لذا أي أن معظم طاقة الموجه يكون على شكل طاقة مغناطيسية .

(12) في الاوساط جيدة التوصيل اذا انتشرت موجه كهرومغناطيسية مستوية أثبت أن :

$$N_{av.} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{2\mu\omega}\right) e^{-\frac{2}{\delta}z} E_0^2$$

(13) موجه كهرومغناطيسية مستوية تنتشر في وسط جيد التوصيل قابلية توصيله $\sigma = 6 \times 10^7\ mho/m$ اذا كان تردد هذه الموجه $f = 10^6\ Hz$
احسب كلا من نوعية المادة Q ، العمق السطحي δ ، طول الموجه λ وسرعتها v والممانعة المميزة Z. $|Z| = 3.6 \times 10^{-4}\ \Omega$

(الجواب :
$\lambda = 0.4 \times 10^{-3}\ m$ ؛ $Q = 9.6 \times 10^{-13}$ ؛ $\delta = 6.4 \times 10^{-5}\ m$

(14) لقد أثبتنا في الفصل الخامس من هذا الكتاب أن الشحنة الكهربائية في الوسط الموصل تضمحل حسب العلاقة الاسية التالية: $\rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon_0}t}$
أثبت أن عامل نوعية الوسط δ يساوي تقريبا 1/3 اذا هبطت النسبة ρ/ρ_0 الى 1% في زمن قدره ربع مدة الذبذبة .

(15) أثبت أن العلاقة الخاصة بقابلية التوصيل للغاز المتأين هي مكافئة لممانعة حثية خالصة لهذا الوسط .

(16) اذا علمت أن عدد الالكترونات في المتر المكعب Ne يساوي $10^{11}\ elec./m^3$ في طبقة الغلاف الجوي الايوني احسب تردد البلازما f_p لهذا الوسط ، هل يسمح هذا الوسط بمرور موجه كهرومغناطيسية ترددها $f = 10^7\ Hz$ خلاله .

(الجواب . $f_p = 2.8 \times 10^6\ Hz$ نعم .

Scanned by CamScanner

(17) استعمل كلا من المعادلتين (8-133) ، (8-142) لايجاد مركبات المجالين H ، E للموجه الكهرومغناطيسية ذات النمط TE_{mn} .

(18) استعمل العلاقات الخاصة بمركبات المجالين H E للنمط TE_{mn} التي حصلت عليها في التمرين (17) لايجاد مركبات المجال للنمط TE_{10} .

(19) دليل موجه مربع المقطع ضلعه 10cm يملأه الهواء ما هو أوطأ تردد ممكن ان ينتشر في هذا الدليل للنمط TE_{10} . احسب طول موجة القطع لهذا الدليل . احسب طول موجة دليل الموجه λ_g اذا نقل هذا الدليل موجه كهرومغناطيسية ترددها $f_o = 2\times10^9\ Hz$.

(الجواب : $f_c = 1.5\times10^9\ Hz$ ، $\lambda_g = 22.67\ cm$ ، $\lambda_c = 20\ cm$.

(20) اذا كان الوسط الذي يملأ دليل الموجه في التمرين (19) هو مادة عازلة ثابت عزلها ($Ke = 2$) ما هو تردد القطع في هذه الحالة للنمط TE_{10} احسب طول موجة دليل الموجه λ_g اذا استعمل هذا الدليل لنقل موجه كهرومغناطيسية ترددها $f_o = 2\times10^9\ Hz$

(الجواب : $f_c = 1.05\times10^9\ Hz$ ، $\lambda_g = 12.35\ cm$

(21) استعمل معادلتي الدوار لماكسويل أثبت ان جميع مركبات المجالين $\bar{H}$ ، $\bar{E}$ تعتمد على المركبة E_z للنمط Tmn . استعمل هذه العلاقات مع المادة (8-143) لايجاد جميع العلاقات الخاصة بمركبات المجالين E H لهذا النمط .

(22) لماذا لا يمكن ان يأخذ اي من m او n في النمط TMmn القيمة صفر وضح ذلك .

(23) اثبت ان الممانعة المميزة للموجه المنتشرة داخل دليل الموجه للنمطين TEmn TMmn هي كما يلي :

$$Z_{TE} = Z_o \frac{\lambda_g}{\lambda_o} \qquad Z_{TM} = Z_o \frac{\lambda_o}{\lambda_g}$$

اذ أن Z_o هي الممانعة المميزة للموجه في الفراغ ومقدارها يساوي 120π .

(24) اثبت ان اوطأ تردد قطع هو تردد القطع الخاص بالنمط TE_{10} في دليل الموجه مستطيل المقطع .

Scanned by CamScanner