# Chapter Fourالفصل الرابع
## معادلات ماكسويل وانتشار الموجات الكهرومغناطيسية في الاوساط المختلفة

## (الواجبات البيتية)

---

**الواجب البيتى (1):** **موجة كهرومغناطيسية مستوية تنتقل في الفراغ ترددها $(f = 10^{10}\,Hz)$ وان المجال الكهربائي لهذه الموجة يتبع العلاقة التالية : $\bar{E} = \hat{x}E_{ox}\,e^{i(wt-kz)}$**

**(1) أحسب العدد الموجي K وطول الموجة $\lambda$ ، ثم استخرج العلاقة الخاصة بالمتجه $\bar{H}$.**

**(2) جد كلاً من $\nabla \times \bar{E}$ و $-\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$ وقارن بين الناتجين.**

**الحل:**

(أ)

$$K = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = 2\pi\,\frac{10^{10}}{3\times10^{10}} = \frac{2\pi}{3} = 2.093\ \text{cm}^{-1}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi}{2\pi/3} = 3\ \text{cm}$$

للحصول على $\bar{H}$ نستخدم معادلة ماكسويل الاولى $(\bar{B} = \mu_0 \bar{H})$

$$\nabla\times\bar{E} = -\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} = -\mu_0\frac{\partial\bar{H}}{\partial t} \quad ---(1)$$

$\boxed{\bar{E} = \hat{x}E_x}$

$$\nabla\times\bar{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\hat{y}\,\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\hat{y}\,iKE_x = -\hat{y}\,iKE \quad ---(2)$$

التغير الزمني للموجة هو $e^{i\omega t}$

$$\therefore \frac{\partial\bar{H}}{\partial t} = i\omega\,\bar{H} \quad ---(3)$$

نعوض 2 و 3 في 1 نحصل:

$$\cancel{-}\hat{y}\,\cancel{i}KE = \cancel{-}\,\cancel{i}\mu_0\omega\,\bar{H}$$

$$\therefore \bar{H} = \hat{y}\,\frac{K}{\mu_0\omega}\,E = \hat{y}\,\frac{KE_{ox}}{\mu_0\omega}\,e^{i(\omega t-Kz)} \quad ---(4)$$

(ب)

$$\nabla\times\bar{E} = -\hat{y}\,iKE \quad \text{and} \quad -\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} = -i\mu_0\omega\bar{H} \quad ---(5)$$

نعوض 4 في 5 نحصل:

$$-\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} = -\hat{y}\,i\,\cancel{\mu_0\omega}\,\frac{KE_{ox}}{\cancel{\mu_0\omega}}\,e^{i(\omega t-Kz)}$$

$$\boxed{-\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} = -\hat{y}\,iKE = \nabla\times\bar{E}}$$

النتيجة متطابقة

**الواجب البيتي (2): ما هي المواصفات المشتركة لأنتشار الموجة الكهرومغناطيسية في جميع الاوساط والتي تم التأكيد عليها قبل حل معادلة الموجة في هذه الاوساط؟**

**الحل:**

1- ان مدى الترددات لاستعمال معادلات ماكسويل (معادلة الموجة) يتم عملياً على ترددات تمتد من موجات الراديو الطويلة $(f = 10^{4}\ Hz)$ الى الترددات الخاصة بأشعة كاما $(f = 10^{24}\ Hz)$.

2- ان التغير الزمني لكل مركبات المجال هو $e^{i\omega t}$ وعليه فان تأثير العامل $\frac{\partial}{\partial t}$ هو $i\omega$ على اعتبار ان تردد المصدر ثابت القيمة بالنسبة للزمن.

3- سوف تستعمل العلاقة $\bar{B} = \mu \bar{H}$ في جميع الاوساط وكذلك $\bar{D} = \epsilon \bar{E}$ ومتجه بوينتنك $N = \bar{E} \times \bar{H}^*$ وكذلك الممانعة المميزة للموجة هي $Z = E/H$.

4- نفترض أن $\rho_f = 0$ في جميع الاوساط (اي خالية من الشحنات الحرة) وبذلك تأخذ معادلة الموجة الشكل التالي:

$$\nabla^2 \bar{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = 0$$

5- المحور $z$ يمثل اتجاه انتشار الموجة الكهرومغناطيسية في جميع الحالات اي ان $\bar{E}$ و $\bar{H}$ لا يعتمدان على $x$ و $y$ وعليه فان معادلة ماكسويل الرابعة تأخذ الشكل التالي:

$$\nabla \cdot \bar{E} = \rho_f/\epsilon = 0$$

$$\underbrace{\cancel{\frac{\partial E_x}{\partial x}}}_{=0} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial E_y}{\partial y}}}_{=0} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

**الواجب البيتي (3): باستخدام معادلة المجال الكهربائي التالية:** $\bar{E} = -\nabla\emptyset - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$

**ادناه اشتق بالتفصيل الصيغة الرياضية لمعادلة الموجة للجهد الاتجاهي $\bar{A}$ . علما بأن $\emptyset$ تمثل الجهد العددي.**

**الحل:**

ومن قانون ماكسويل الثاني نجد ان

$$\nabla \times \bar{B} = \mu\left(\bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right) \quad (2)$$

وبما أن $\bar{B}$ هو

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A} \quad (3)$$

بتعويض (1) و(3) في (2) واستخدام العلاقة $\bar{D} = \epsilon \bar{E}$ فان المعادلة (2) تصبح:

واستخدام $\bar{D} = \epsilon \bar{E}$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{A} = \mu \bar{j} + \mu\epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A} = \mu \bar{j} - \mu\epsilon \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2}$$

علماً بان: $\nabla \times \nabla \times \bar{A} = \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A}$

$$\nabla^2 \bar{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} - \nabla\left((\nabla \cdot \bar{A}) + \mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = -\mu \bar{j} \quad (4)$$

باستخدام شرط لورنتز $\nabla \cdot \bar{A} = -\epsilon\mu \frac{\partial \phi}{\partial t}$

$$\nabla^2 \bar{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} - \nabla\Big(\underbrace{-\mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t}}_{=0}\Big) = -\mu \bar{j}$$

$$\boxed{\therefore\ \nabla^2 \bar{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu \bar{j}}$$

**الواجب البيتي (4): عرف متجه بوينتك ثم أشتق الصيغة الرياضية لهذا المتجه.**

**الحل:**

متجه بوينتنك يمثل الطاقة في وحدة الزمن التي تنساب من وحدة السطوح في أية نقطة من السطح المغلق.

نطرح معادلة ماكسويل الاولى (بعد ضرب طرفيها بـ $\bar{H}$) من معادلة ماكسويل الثانية (بعد ضرب طرفيها بـ $\bar{E}$) ضرباً عددياً

$$\bar{H}\cdot\nabla\times\bar{E} = -\bar{H}\cdot\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} \quad \text{—(1)}$$

$$\bar{E}\cdot\nabla\times\bar{H} = \bar{E}\cdot\bar{j} + \bar{E}\cdot\frac{\partial\bar{D}}{\partial t} \quad \text{—(2)}$$

نطرح (2) من (1)

$$\bar{H}\cdot\nabla\times\bar{E} - \bar{E}\cdot\nabla\times\bar{H} = -\bar{H}\cdot\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} - \bar{E}\cdot\bar{j} - \bar{E}\cdot\frac{\partial\bar{D}}{\partial t} \quad \text{—(3)}$$

باستخدام المتطابقة الاتجاهية

$$\nabla\cdot(\bar{E}\times\bar{H}) = \bar{H}\cdot(\nabla\times\bar{E}) - \bar{E}\cdot(\nabla\times\bar{H}) \quad \text{—(4)}$$

نعوض (4) في (3)

$$\nabla\cdot(\bar{E}\times\bar{H}) = -\bar{H}\cdot\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} - \bar{E}\cdot\bar{j} - \bar{E}\cdot\frac{\partial\bar{D}}{\partial t}$$

نأخذ التكامل الحجمي لطرفي المعادلة الاخيرة والتي يحيط بالسطح S

$$\int_\tau \nabla\cdot(\bar{E}\times\bar{H})\,d\tau = -\int_\tau\left(\bar{E}\cdot\frac{\partial\bar{D}}{\partial t} + \bar{H}\cdot\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}\right)d\tau - \int_\tau \bar{E}\cdot\bar{j}\,d\tau \quad \text{—(5)}$$

باستعمال مبرهنة كاوس على الطرف الايسر للمعادلة (5)

$$\int_\tau \nabla\cdot(\bar{E}\times\bar{H})\,d\tau = \int_s (\bar{E}\times\bar{H})\cdot d\bar{s}$$

ان الحد الثاني في الطرف الايمن للمعادلة (5) يمكن مناقشته

نفرض ان $\sigma$ تمثل قابلية التوصيل الكهربائي للوسط وان $\bar{E}'$ يمثل شدة المجال للـ ق. د. ك التي تجهز النظام بالطاقة

$$\bar{j} = \sigma(\bar{E} + \bar{E}')$$

$$\therefore \bar{E} = \frac{\bar{j}}{\sigma} - \bar{E}'$$

$$\therefore \int_\tau \bar{E}\cdot\bar{j}\,d\tau = \int_\tau \frac{j^2}{\sigma}\,d\tau - \int_\tau (\bar{E}'\cdot\bar{j})\,d\tau$$

يمثل القدرة التي تجهزها الـ ق. د. ك للوسط

يمثل القدرة المتحولة الى شكل حراري

اذا كان الوسط متجانس ومتماثل خطياً فأن: $\bar{D} = \epsilon\bar{E}$ و $\bar{B} = \mu\bar{H}$ وعليه

$$\int_s(\bar{E}\times\bar{H})\cdot d\bar{s} + \int_\tau \frac{j^2}{\sigma}\,d\tau + \frac{\partial}{\partial t}\int_\tau\left[\frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2\right]d\tau = \int_\tau(\bar{E}'\cdot\bar{j})\,d\tau$$

**<u>الواجب البيتي (5):</u> موجة كهرومغناطيسية مستوية جيبية الشكل تنتشر في الهواء، جد كثافتي الطاقة الكهربائية والمغناطيسية لهذه الموجة وأثبت بأنهما متساويتان.**

**الحل:**

$$\bar{E} = \hat{i}\, E_0 \sin(\omega t - kz)$$

$$\bar{H} = \hat{j}\, H_0 \sin(\omega t - kz)$$

كثافة الطاقة الكهربائية

$$\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 \sin^2(\omega t - kz)$$

وكثافة الطاقة المغناطيسية

$$\frac{1}{2}\mu_0 H^2 = \frac{1}{2}\mu_0 H_0^2 \sin^2(\omega t - kz)$$

$$H_0 = \frac{E_0}{Z_0}$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 \frac{E_0^2}{Z_0^2} \sin^2(\omega t - kz)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

$Z_0$ - الممانعة المميزة للموجة في الفراغ

$$= \frac{1}{2}\cancel{\mu_0} \frac{E_0^2}{\frac{\cancel{\mu_0}^2}{\epsilon_0^2}} \sin^2(\omega t - kz)$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon_0^{1} E_0^2 \sin^2(\omega t - kz)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\mu_0 H^2$$

كثافة الطاقة الكهربائية = كثافة الطاقة المغناطيسية

**الواجب البيتي (6):** موجة كهرومغناطيسية مستوية جيبية الشكل تنتشر في مادة عازلة ثابت عزلها $K_e = 2$. فأذا كانت قيمة التردد الزاوي لهذه الموجة تساوي $w = 3 \times 10^7\ rad/sec$. أحسب ما يلي: (1) الممانعة المميزة لهذه الموجة $Z$ (2) عددها الموجي $K$ (3) سرعة الموجة في هذا الوسط العازل $v$.

**الحل:**

$K_e = 2$

$w = 3 \times 10^7\ rad/sec$

(1) الممانعة المميزة للموجة في الوسط العازل.

(1) $$Z = \frac{\mu_o w}{K} = \frac{Z_o}{\sqrt{K_e}} = \frac{120\pi\ \Omega}{\sqrt{2}} = 84.85\pi\ \Omega$$

$$= 266.57\ \Omega$$

(2) $$K = \frac{w}{v} = \frac{w}{c}\sqrt{K_e} = \frac{3\times10^7}{3\times10^8}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{10} = 0.1414\ m^{-1}$$

$$= 14.14\ cm^{-1}$$

(3) $$V = \frac{w}{k} = \frac{c}{\sqrt{K_e}} = \frac{3\times10^8\ m/sec}{\sqrt{2}} = 2.12\times10^8\ m/sec$$