(5-4) انتشار الموجات الكهرومغناطيسية المستوية فى الاوساط غير المحدودة

سوف نتطرق في هذا البند الى دراسة انتشار الموجات الكهرومغناطيسية في الاوساط المختلفة وسنفرض هنا أن الوسط يمتد الى اللانهاية لكي نتفادى الانعكاسات والانكسارات التي تعاني منها الموجة على السطوح المشتركة بين الاوساط المختلفة . كما أننا سنعتبر الوسط دائما متجانسا خطيا متماثلا أي أن كلا من ϵ, μ ثابتة القيمة حيث تصبح العلاقتين $\bar{D} = \epsilon \bar{E}$ ، $\bar{B} = \mu \bar{H}$ وفي هذه الدراسة سنعتبر ان الموجه احادية التردد اي أن قيمة ω لا تتغير مع الزمن او مع الاحداثيات zyx .

ولفرض دراسة انتشار الموجات الكهرومغناطيسية المستوية في وسط ما يجب ان نبدأ باستخراج معادلة الموجه ثم نقوم بحلها في ذلك الوسط . وبالرغم من استخراجنا معادلة الموجه الخاصة بكل من $\bar{A}$ و ϕ في بند سابق من هذا الفصل والتي يمكن الاستفادة منها في تفاعل المجالات الكهرومغناطيسية مع المادة او في دراسة الاشعاع من الهوائيات Antennas الا اننا نحتاج في هذه الدراسة الى استخراج معادلة الموجه الخاصة بكل من $\bar{E}, \bar{H}$ والتي يمكن الحصول عليها باستعمال معادلات ماكسويل. ويمكن الحصول على معادلة الموجه الخاصة بالمجال الكهربائي $\bar{E}$ وذلك بأن نأخذ دوار طرفي معادلة ماكسويل فنحصل على :

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{E}) = -\nabla \times \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \bar{B}) \qquad (44\text{-}8)$$

وعندما نأخذ بنظر الاعتبار المتطابقة المتجهية التالية :

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{E}) = -\nabla^2 \bar{E} + \nabla(\nabla \cdot \bar{E})$$

فان المعادلة (44-8) تأخذ الشكل التالي:

$$\nabla^2 \bar{E} - \nabla(\nabla \cdot \bar{E}) = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \bar{B}) = \mu \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \bar{H}) \qquad (45\text{-}8)$$

وباستعمال معادلة ماكسويل التالية :

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J}_f + \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

فان المعادلة (45-8) تأخذ الشكل التالي:

$$\nabla^2 \bar{E} - \nabla(\nabla \cdot \bar{E}) = \mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{J}_f + \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}\right) \qquad (46\text{-}8)$$

وباستعمال معادلة ماكسويل الرابعة :

$$\nabla \cdot \bar{E} = \rho_f / \epsilon$$

فان المعادلة (46-8) تصبح :

$$\nabla^2 \bar{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = \nabla\left(\frac{\rho_f}{\epsilon}\right) + \mu \frac{\partial \bar{J}_f}{\partial t} \qquad (47\text{-}8)$$

وتسمى هذه المعادلة معادلة الموجه للمتجه $\bar{E}$ في وسط متجانس خطي متماثل الصفات ويمكن كتابة معادلة الموجه للمتجه $\bar{E}$ بعد استعمال العلاقة $\bar{J}_f = \sigma \bar{E}$ بالشكل التالي :

$$\nabla^2 \bar{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \nabla\left(\frac{\rho_f}{\epsilon}\right) \qquad (48\text{-}8)$$

وبطريقة مماثلة يمكن الحصول على معادلة الموجه الخاصة بالمتجه $\bar{H}$ وهي كالاتي :

$$\nabla^2 \bar{H} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = 0 \qquad (49\text{-}8)$$

(6-4) انتشار الموجات الكهرومغناطيسية المستوية فى الاوساط غير المحدودة

قبل البدء في حل معادلة الموجه في الاوساط غير المحدودة المختلفة لا بد من ان نؤكد الملاحظات التالية :

اولا : لا توجد هناك حدود معينة للتردد لاستعمال معادلات ماكسويل لكن تطبيق هذه المعادلات يتم عمليا على ترددات تمتد من ترددات موجات الراديو الطويلة ($f = 10^4\ Hz$) الى الترددات الخاصة باشعة γ (كاما) ذات الطاقة العالية($f = 10^{24}\ Hz$).

ثانيا : سوف نعتمد في معالجاتنا الرياضية الدالة الاسية $e^{i\omega t}$ لكل مركبات المجال كمعامل تغير زمني ومعنى هذا أن تأثير المعامل $\partial/\partial t$ يكون مساويا الى $i\omega$ على اعتبار أن تردد المصدر يبقى ثابت القيمة بالنسبة الى الزمن أو بالنسبة الى المحاور كما ذكرنا سابقا .

ثالثا : سوف نستعمل المتجه H^- في جميع معادلاتنا الرياضية بدلا من المتجه B^- وذلك لارتباط كثير من المصطلحات بالمتجه H^- فمثلا وجدنا ان متجه بوينتنك $N^- = E^- \times H^-$ وكما سنرى مستقبلا أن $Z = E/H$ وهي الممانعة المميزة للموجه .

رابعا : في جميع الاوساط التي سنناقشها نفترض أنها خالية من الشحنات الحرة أي أن $\rho_f = 0$ وبهذا تأخذ معادلة الموجه الشكل الاتي :

$$\nabla^2 \bar{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = 0 \qquad (50-8)$$

خامسا : سوف نعتبر أن الموجه الكهرومغناطيسية تنتشر بالاتجاه z فقط أي أن المتجه E^- او المتجه H^- لا يعتمدان على كل من المحورين y, x . ومما تقدم نجد أن معادلة ماكسويل الرابعة تأخذ الشكل التالي :

أي أن

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \qquad (51-8)$$

وعندما تأخذ الملاحظة الخامسة بنظر الاعتبار نجد أن $\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$ ، $\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$

وبهذا فان المعادلة (51-8) تأخذ الشكل التالي :

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \qquad (52-8)$$

وهذا معناه أما أن تكون E_z ثابتة القيمة وهذا غير ممكن لاننا نتعامل مع مجالات متغيرة القيمة بالنسبة للزمن وكذلك بالنسبة للمحاور او أن تكون $E_z = 0$ وهذه هي الحالة الصحيحة أي أن المجال الكهربائي E^- له مركبتان الاولى E_x في الاتجاه x والثانية E_y في الاتجاه y وهذا يصح على H^- أيضا لنفس السبب . لذلك فان الموجه المستوية التي تنتشر في الاتجاه Z يكون لها مركبتان لكل من H^-, E^- في الاتجاهين y, x على التوالي العموديين على اتجاه انتشار الموجه اذن فهي موجه كهرومغناطيسية مستعرضة في الوسط المتجانس، المتماثل الصفات، الخطي .

ان الاوساط غير المحدودة المختلفة التي سوف نناقش انتشار الموجات الكهرومغناطيسية المستوية فيها هي : الفراغ ، الوسط العازل ، الوسط الموصل ، الوسط جيد التوصيل وأخيرا الغاز المتأين .

(1-6-4) انتشار الموجات الكهرومغناطيسية المستوية فى الفراغ

اذا كان الوسط الذي تنتقل فيه الموجه الكهرومغناطيسية المستوية هو الفراغ فان $\mu=\mu_0$ ، $\epsilon=\epsilon_0$ ، $\bar{J}=0$ وعند الاخذ بنظر الاعتبار الملاحظات السابقة فان معادلة الموجه تأخذ الشكل التالي :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}+\epsilon_0\mu_0\omega^2 E_x=0 \qquad (53\text{-}8)$$

هذا بالنسبة الى المركبة E_x ويمكن الحصول على معادلة أخرى للموجه مشابهة للمعادلة (53-8) خاصة بالمركبة E_y ولتسهيل مهمتنا سوف نفرض أن للمجال الكهربائي مركبة واحدة في الاتجاه x هي E_x وبعبارة أخرى يمكن ان تدور المحاور y، x حول المحور z حتى ينطبق المتجه $\bar{E}$ بالاتجاه x ، ومن حل المعادلة التفاضلية (53-8) ينتج أن

$$\bar{E}_x=\bar{i}\,E_{0x}\,e^{\gamma z} \qquad (54\text{-}8)$$

وباستعمال هذا الحل (54-8) في المعادلة (53-8) نحصل على :

$$\gamma^2+\epsilon_0\mu_0\omega^2=0$$

$$\gamma=\pm i\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}=\pm\frac{i\omega}{c}=\pm ik \qquad (55\text{-}8)$$

وتسمى γ عامل الانتشار ، k العدد الموجي أما c التي تساوي $1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ فهي سرعة الموجات الكهرومغناطيسية في الفراغ وتساوي تقريبا 3×10^8 m/sec وبما أن قيمة كل من ω و c هي قيم حقيقية فان قيمة γ تكون خيالية صرفة ومعنى هذا أن المعادلة (54-8) تمثل دالة جيبية للمتجه E_x يعتمد اما على $\sin kz$ او على $\cos kz$ ويفضل كتابة المعادلة (54-8) بدلالة العدد الموجي وعندما نأخذ بنظر الاعتبار عامل تغير الزمن للمتجه $\bar{E}$ يمكننا كتابة المعادلة (54-8) بالشكل التالي :

$$\bar{E}_x=\bar{i}\,E_{0x}\,e^{i(\omega t\pm kz)} \qquad (56\text{-}8)$$

ان هذا الحل يجب أن يحقق جميع معادلات ماكسويل لان معادلة الموجة التي يحققها هذا الحل قد أشتقت باستعمال معادلات ماكسويل ، ومن الجدير بالذكر ان الاشارتين الموجبة والسالبة اللتين تتقدمان الثابت k في المعادلة (56-8) تمنيان أن الموجة ممكن أن تنتشر في الاتجاهين z و z- على التوالي . وللحصول على العلاقة الخاصة بالمتجه H فاننا لا نحتاج الى حل معادلة الموجة الخاصة بالمتجة $\bar{H}$ وانما باستعمال أحدى معادلات ماكسويل التي تربط بين كل من $\bar{E}$ ، $\bar{H}$ وعلى سبيل المثال عندما نستعمل معادلة ماكسويل الاولى آخذين بنظر الاعتبار أن للمتجه $\bar{E}$ مركبة واحدة هي المركبة E_x نجد أن للمتجه $\nabla\times E$ مركبة واحدة في الاتجاه y هي $\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)_y$

وبتعويض هذه القيمة لدوار المتجه $\bar{E}$ في المعادلة الاولى من معادلات ماكسويل نجد أن :

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)_y=-i\omega\mu_0 H_y \qquad (57\text{-}8)$$

وعندما نأخذ بنظر الاعتبار انتشار الموجه بالاتجاه z فقط نحصل على:

$$-ikE_x=-i\omega\mu_0 H_y$$

$$H_y=\frac{k}{\mu_0\omega}E_x$$

او أن

$$H_y=\frac{k}{\mu_0\omega}E_{0x}\,e^{i(\omega t\pm kz)}$$

$$H_y = H_{oy}\, e^{i(\omega t \pm kz)}$$

حيث أن

$$H_{oy} = \frac{K}{\mu_o \omega} E_{ox} \qquad H_{oy} = \frac{1}{Z_o} E_{ox}$$

وتسمى Z_o بالممانعة المميزة للموجات الكهرومغناطيسية في الفراغ وهي تساوي

$$Z_o = \frac{\mu_o \omega}{K} = C\mu_o = \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} = 120\pi = 376.6\,\Omega \qquad (59\text{-}8)$$

ومما تقدم نستنتج ان الموجه الكهرومغناطيسية المستوية التي تنتشر في الفراغ يكون فيها المتجهان $\vec{E}, \vec{H}$ عموديين على بعضهما البعض وهما في نفس الطور ويقعان في مستو عمودي على اتجاه انتشار الموجه ، كما أن اتجاه متجه بوينتنك $(\vec{E} \times \vec{H})$ يكون في الاتجاه z الذي يمثل اتجاه انتشار الموجه كما في الشكل (4-8) .

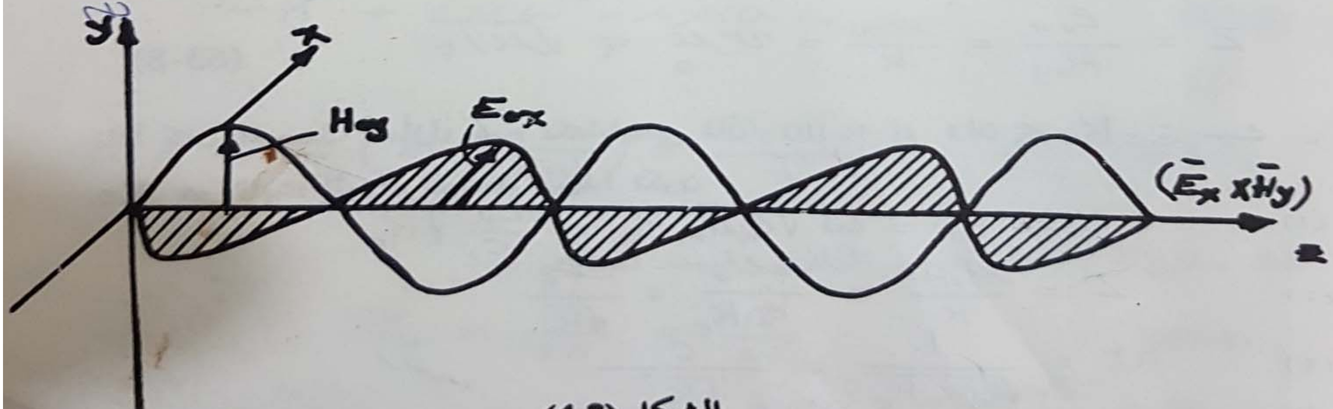
وعندما تنتشر الموجه الكهرومغناطيسية في الفراغ نجد أن :

$$(1) \qquad \text{العدد الموجي} = K = \omega\sqrt{\epsilon_o \mu_o} = \omega / c$$

$$(2) \qquad \text{سرعة الموجه} = c = 3 \times 10^{8}\ m/s$$

$$(3) \qquad \text{الممانعة المميزة} = Z_o = \frac{\mu_o \omega}{K} = \mu_o c$$

$$= \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} = 120\pi\,\Omega$$



الشكل (4-8)

(2-6-4) انتشار الموجات الكهرومغناطيسية المستوية في وسط عازل

عندما تنتشر الموجه في وسط عازل فان معادلة الموجه تأخذ الشكل التالي :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \epsilon\mu\,\omega^2 E_x = 0 \qquad (60\text{-}8)$$

ونجد في هذه العلاقة أنها تشبه معادلة الموجه الخاصة بالفراغ والفرق بين الحالتين أن ϵ_o تأخذ القيمة ϵ وμ_o تأخذ القيمة μ . وحل هذه المعادلة مشابه الى حل معادلة الموجه الخاصة بالفراغ باستبدال كل من ϵ_o, μ_o بالمقدارين ϵ, μ وبهذا يكون حل هذه المعادلة كما يأتي :

$$\bar{E}_x = \bar{i}\, E_{ox}\, e^{i(\omega t \pm Kz)}. \qquad (61\text{-}8)$$

حيث أن العدد الموجي $K = \omega\sqrt{\epsilon\mu} = \frac{\omega}{v}$ وان $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ وهي سرعة الموجه الكهرومغناطيسية المستوية في الوسط العازل اما المعادلة الخاصة بالمتجه -H فتأخذ الشكل التالي :

$$\bar{H}_y = \bar{j}\, \frac{E_{ox}}{Z}\, e^{i(\omega t \pm Kz)} = \bar{j}\, H_{oy}\, e^{i(\omega t \pm Kz)} \qquad (62\text{-}8)$$

حيث أن Z هي ممانعة الموجه في الوسط العازل وقيمها تساوي :

$$Z = \frac{E_{ox}}{H_{oy}} = \frac{\mu\omega}{k} = v\mu_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} \qquad (63\text{-}8)$$

فاذا كان الوسط العازل غير مغناطيسي فان $\mu = \mu_0$ وان $\epsilon = K_e \epsilon_0$ حيث Ke هو ثابت العزل للوسط وبهذا تكون :

$$(1) \qquad K = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0 K_e} = \frac{\omega}{c}\sqrt{K_e}$$

$$(2) \qquad Z = \frac{\mu_0\omega}{K} = \frac{\mu_0}{\epsilon_0 K_e} = \frac{Z_0}{\sqrt{K_e}}$$

$$(3) \qquad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0 K_e}} = \frac{c}{\sqrt{K_e}}$$

وعليه يأخذ معامل الانكسار القيمة التالية :

$$(4) \qquad n = \frac{c}{v} = \sqrt{K_e}$$

ومن ملاحظة المعادلتين (8-61), (8-62) نستنتج أن كلا من E_x و H_y هما في نفس الطور وان اتجاه متجه بوينتنك سوف يكون باتجاه انتشار الموجه اي بالاتجاه z .

(4-6-3) انتشار الموجات الكهرومغناطيسية المستوية في وسط موصل

ان معادلة الموجة في وسط موصل تاخذ الشكل التالي :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \epsilon\mu\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \qquad (64\text{-}8)$$

حيث يمثل الحد الثاني في هذه المعادلة تيار الازاحة بينما يمثل الحد الثالث تيار التوصيل وعندما نأخذ بنظر الاعتبار التغير الزمني للمتجه $\bar{E}$ الذي يعتمد على الدالة $e^{i\omega t}$ فان المعادلة (8-64) تاخذ الشكل التالي :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \epsilon\mu\omega^2 E_x - i\mu\sigma\omega E_x = 0 \qquad (65\text{-}8)$$

ولو جربنا الحل

$$E_x = E_{ox}\, e^{i(\omega t - Kz)} \qquad (66\text{-}8)$$

نجد أن :

$$-K^2 + \epsilon\mu\omega^2 - i\mu\sigma\omega = 0 \qquad (67\text{-}8)$$

$$K^2 = \epsilon\mu\omega^2\left(1 - \frac{i\sigma}{\epsilon\omega}\right) = \frac{K_e K_m}{\lambda_0^2}\left(1 - \frac{i\sigma}{\epsilon\omega}\right) \qquad (68\text{-}8)$$

حيث يمثل $\bar{\lambda}_0$ الطول الموجي الزاوي وقيمته تساوي :

$$\bar{\lambda}_0 = \frac{\lambda_0}{2\pi} = \frac{c}{\omega} \qquad (69\text{-}8)$$

وتمثل الكمية $\frac{i\omega\epsilon}{\sigma}$ في المعادلة (68-9) النسبة بين كثافة تيار الازاحة $\partial D/\partial t$ الى كثافة تيار التوصيل $J_f = \sigma E$ وسوف نسمى القيمة المطلقة لهذه النسبة بالمقدار Q الذي يسمى بنوعية الوسط حيث أن :

$$Q = \left| \frac{\partial D}{\partial t} / J_f \right| = \frac{\epsilon\omega}{\sigma} \qquad (70\text{-}8)$$

وتكون قيمة Q للمواد العازلة مساوية الى اللانهاية بينما تكون قيمتها صغيرة للمواد الموصلة الاعتيادية . ونجد من العلاقة (68-9) أن قيمة العدد الموجي تكون عقدية كالاتي :

$$K = K_r - i K_i \qquad (71\text{-}8)$$

حيث أن كلا من K_r و K_i عددان حقيقيان موجبان . وعندما نأخذ بنظر الاعتبار المعادلتين (68-8) ، (71-8) نجد أن :

$$K_r = \frac{1}{\bar{\lambda}_0}\left(\frac{K_e K_m}{2}\right)^{1/2}\left\{\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{1/2}+1\right\}^{1/2} \qquad (72\text{-}8)$$

$$K_i = \frac{1}{\bar{\lambda}_0}\left(\frac{K_e K_m}{2}\right)^{1/2}\left\{\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{1/2}-1\right\}^{1/2} \qquad (73\text{-}8)$$

$$K = \left(\frac{K_e K_m}{\bar{\lambda}_0}\right)^{1/2}\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{1/4} e^{-i\theta} \qquad (74\text{-}8)$$

حيث أن θ هي زاوية الطور :

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{K_i}{K_r}\right) \qquad (75\text{-}8)$$

ويمثل الجزء الحقيقي من العدد الموجي K_r مقلوب الطول الموجي الزاوي اي

$$K_r = \frac{1}{\bar{\lambda}} = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad (76\text{-}8)$$

كما يمثل الجزء الخيالي من العدد الموجي K_i مقلوب الكمية δ أي

$$K_i = \frac{1}{\delta} \qquad (77\text{-}8)$$

حيث تمثل δ المسافة التي اذا ما قطعتها الموجه في ذلك الوسط فان سعتها تتناقص الى $1/e$ من قيمتها الاصلية . ويسمى المقدار δ بمسافة الاضمحلال (attenuation distance) وعند انتشار الموجه في هذا الوسط فان قيمة كل من العدد الموجي ، سرعة الموجه ، الممانعة المميزة للموجه ومعامل الانكسار تكون كالاتي :

$$(1) \quad K = K_r - i K_i$$

حيث أن قيمة كل من k_i, k_r كما في المعادلتين (72-8) و (73-8) على التوالي :

$$(2) \quad v = \frac{\omega}{K_r} = c\left\{\left(\frac{K_e K_m}{2}\right)^{-1/2}\left[\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{1/2}+1\right]^{-1/2}\right\} \qquad (78\text{-}8)$$

(3) $$n = \frac{c}{v} = \frac{c}{\omega} K_r = \lambdabar K_r = \frac{\lambda_o}{\lambda} \qquad (79\text{-}8)$$

(4) $$Z = \frac{\mu\omega}{K} = \left(\frac{\mu}{\epsilon}\right)^{1/2} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{1/4}} e^{i\theta} \qquad (80\text{-}8)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{K_i}{K_r}\right)$$

وتمثل θ فرق الطور الذي يتقدم فيه $\bar{H}_y$ على $\bar{E}_x$ وبهذا يمكن كتابة كل من $\bar{E}_x$ و $\bar{H}_y$ كالاتي :

$$\bar{E}_x = \bar{i}\, E_{ox}\, e^{i(\omega t - K_r z) - K_i z} \qquad (81\text{-}8)$$

$$\bar{H}_y = \bar{j}\, H_{oy}\, e^{i(\omega t - K_r z - \theta) - K_i z} \qquad (82\text{-}8)$$

$$\frac{E_o}{H_o} = |Z| = \left(\frac{\mu}{\epsilon}\right)^{1/2}\left(1 + \frac{1}{Q^2}\right)^{-1/4} \qquad (83\text{-}8)$$

ونلاحظ أن العلاقتين (8-81). (8-82) تمثلان موجه مضمحلة معامل الاضمحلال فيها هو $e^{-K_i z}$. وبالرغم من وجود فرق الطور بين كل من E_x و H_y واحتواء كل منهما على معامل الاضمحلال الا أن متجه بوينتنك هو باتجاه انتشار الموجه وهو الاتجاه z .