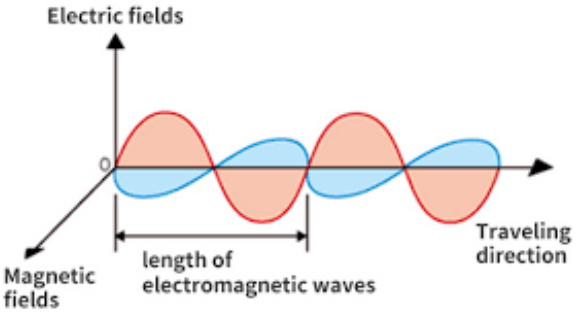
(4-1) المقدمــة

من أعظم الاكتشافات التي حققها البشر على مدى تاريخهم بعد اكتشافهم وتوليدهم للطاقة الكهربائية هو اكتشافهم للموجات الكهرومغناطيسية ، ويعود الفضل في ذلك لعالم الفيزياء الاسكتلندي الشهير جيمس كلارك ماكسويل والذي تكمن عبقريته في مقدرته الفذة على استخدام الرياضيات في صياغة مختلف أنواع الظواهر الفيزيائية وكذلك استنباط الحقائق الفيزيائية من الصيغ الرياضية ، لقد تمكن ماكسويل في عام 1860م من صياغة جميع القوانين المتعلقة بالكهربائية والمغناطيسية وتفاعلهما مع بعضهما البعض في أربع معادلات تفاضلية. ولم يتوقف الأمر عند هذا الحد بل استطاع من خلال حل هذه المعادلات التنبؤ بوجود ما يسمى بالموجات الكهرومغناطيسية والتي تم التحقق من وجودها وإيجاد طرق لتوليدها على يد عالم الفيزياء الألماني هينرتش هيرتز (Heinrich Hertz) وذلك في عام 1887م .



(4-2) معادلات مـاكسويل

ينص قانون الحث لفاراداي كما جاء في الفصل السادس من هذا الكتاب أن القوة الدافعة الكهربائية المحتثة في دائرة تساوي التناقص الزمني للفيض المغناطيسي الذي يقطع هذه الدائرة والصيغة الرياضية لهذا القانون هي :

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Psi}{dt}$$

كما أن القوة الدافعة الكهربائية المحتثة تساوي التكامل الخطي المغلق للمجال الكهربائي $\bar{E}$ في تلك الدائرة :

$$\mathcal{E} = \oint \bar{E} \cdot d\bar{l}$$

ومعنى تغير الفيض المغناطيسي بالنسبة للزمن في قانون الحث لفاراداي هو اما أن تتغير المساحة التي يقطعها المجال المغناطيسي بالنسبة للزمن أو أن تتغير كثافة الفيض المغناطيسي $\bar{B}$ بالنسبة للزمن حيث أن

$$\Psi = \int_S \bar{B} \cdot d\bar{s}$$

فاذا كانت $\bar{B}$ متغيرة بالنسبة للزمن (وهو موضوع دراستنا في هذا الفصل) فان قانون الحث لفاراداي يكتب كالاتي :

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \bar{B} \cdot d\bar{s} = -\int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{s}$$

وذلك لان التفاضل بالنسبة للزمن ليست له علاقة بتغير السطح • وبهذا يمكن أن نحصل على العلاقة التالية :

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\int_s \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{s} \qquad (2-8)$$

وباستعمال مبرهنة ستوك نحصل على :

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_s \nabla \times \bar{E} \cdot d\bar{s} = -\int \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{s} \qquad (3-8)$$

وبما أن التكامل السطحي للطرفين متساو نستنتج من ذلك أن :

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \qquad (4-8)$$

وتسمى هذه العلاقة بقانون الحث لفاراداي في صيغته التفاضلية وهي اولى معادلات ماكسويل •

لقد تطرقنا في الفصل الخامس الى ان التكامل الخطي لكثافة الفيض المغناطيسي $\bar{B}$ حول مسار مغلق يساوي حاصل ضرب μ_0 في التيار الذي يحتويه المسار المغلق وهذا هو قانون أمبير وصيغته التكاملية كما يلي :

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 I = \mu_0 \int_s \bar{j} \cdot d\bar{s}$$

ويمكن كتابة هذا القانون بشكل آخر بعد استعمال مبرهنة ستوك وهو كما يلي

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{l} = \int_s (\nabla \times \bar{B}) \cdot d\bar{s} = \mu_0 \int_s \bar{j} \cdot d\bar{s}$$

ومن هذا نستنتج أن :

$$\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{j}$$

وعندما نأخذ تفرق طرفي المعادلة الإخيرة نحصل على :

$$\nabla \cdot \bar{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\nabla \times \bar{B}) = 0$$

لان تفرق أي دوار يساوي صفرا • وبالرجوع الى معادلة حفظ الشحنة والتي مر ذكرها في البند (4-5) حيث أن :

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = -\nabla \cdot \bar{j}$$

نستنتج من ذلك أن $\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0$ • لقد كان ماكسويل اول من أكد أن هذه الحقيقة تصح فقط للمجالات المستقرة وهي لا تصح في حالة المجالات المتغيرة مع الزمن • لذلك اقترح ماكسويل أضافة حد آخر الى قانون أمبير لكي يمكن استعماله في جميع الحالات ولنفرض أن هذا الحد هو $\bar{x}$ وبذلك نكتب قانون أمبير بالشكل التالي :

$$\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{j} + \bar{x} \qquad (5-8)$$

$$\nabla \cdot \bar{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\nabla \times \bar{B} - \bar{x}) = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \bar{x} = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t}$$

لكن

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \bar{D}) = \nabla \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

∴ مما تقدم نستنتج أن:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right) = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \bar{x} \qquad (6\text{-}8)$$

$$x = \mu_0 \frac{\partial D}{\partial t}$$

وباستعمال هذه العلاقة الاخيرة في المعادلة (5-8) نحصل على :

$$\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \left(\bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right)$$

$$\boxed{\nabla \times \bar{H} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}}$$

او ان: (7-8)

ان اضافة الحد $\frac{\partial D}{\partial t}$ الذي سمي فيما بعد بكثافة تيار الازاحة يعد الاضافة المهمة التي ساهم بها ماكسويل في دراسة موضوع الكهربائية والمغناطيسية . ومعنى العلاقة الاخيرة هي أن المجال المغناطيسي لا ينشأ فقط من وجود تيار التوصيل الاعتيادي وانما قد ينشأ من وجود مجال كهربائي متغير كما هي الحالة عليه في تغير المجال الكهربائي بين لوحي متسعة ذات لوحين متوازيين في حالة شحن المتسعة ، تفريغها أو ربطها بدائرة تيار متناوب تتغير فيها قيمة المجال الكهربائي بين لوحي المتسعة بصورة مستمرة . والمعادلة (7-8) تعد ثاني معادلات ماكسويل .

لقد مر علينا في البند (5-11) أن :

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0$$

وهي المعادلة (5-66) وتعد هذه المعادلة معادلة ماكسويل الثالثة أما المعادلة الرابعة من معادلات ماكسويل فهي المعادلة التالية :

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho_f$$

والتي مر ذكرها في الفصل الثالث حيث تمثل ρ_f كثافة الشحنة الحجمية للشحنات الحرة في ذلك الوسط . وبذلك يمكن تلخيص معادلات ماكسويل كالاتي :

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \qquad (a)$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \qquad (b). \qquad (8\text{-}8)$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \qquad (c)$$

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho_f \qquad (d)$$

مع العلم أن $\bar{B} = \mu \bar{H}$ و $\bar{D} = \epsilon \bar{E}$ وان μ و ϵ مما سماحية الوسط ونفاذية الوسط على التوالي.

(3-4) معادلة الموجة غير المتجانسة لكل من الجهدين العددي والاتجاهي

عند التعامل مع مجالات كهربائية ومغناطيسية متغيرة مع الزمن فاننا لا يمكن أن نستعمل العلاقات الخاصة بالمجالات المستقرة وهذا ما أشرنا اليه في البندين (1-8) (2-8) ولا سيما أن $\nabla \times \bar{E}$ لا يساوي صفرا وأن $\nabla \times \bar{B}$ تختلف قيمته في حالة المجالات المتغيرة بالنسبة للزمن مما هو عليه في المجالات المستقرة . وبما أن العلاقة $\nabla \cdot \bar{B} = 0$ تصح في كل الحالات وأن تفرق دوار أي متجه يساوي صفرا

لذلك وكما أشرنا اليه سابقا في الفصل الخامس يمكن أن نعرف المتجه $\bar{B}$ بدلالة الجهد المتجهي كالاتي :-

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A}$$

وعلى هذا الاساس يمكن أن نعرف المتجه $\bar{E}$ بدلالة كل من الجهد العددي والجهد المتجهي كالاتي :-

$$\bar{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \qquad (9\text{-}8)$$

فاذا كانت $\bar{B}$ ثابتة القيمة فان $\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$ يساوي صفرا او تكون $\bar{E} = -\nabla \phi$

كما هي الحالة عليه في الكهربائية المستقرة ، أما اذا أخذنا دوار طرفي المعادلة (9-8) فاننا نحصل على معادلة ماكسويل الاولى كالاتي :

$$\nabla \times \bar{E} = -\nabla \times (\nabla \phi) - \nabla \times \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \qquad (10\text{-}8)$$

وبما أن $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$ وان $\nabla \times \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \bar{A} = \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$

فان المعادلة (10-8) تأخذ الشكل التالي الذي يمثل معادلة ماكسويل الاولى

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

لذلك فان هذين التعريفين يتفقان مع معادلتي ماكسويل الاولى والثانية والان لنبدأ باشتقاق معادلة الموجة لكل من $\bar{A}$ ، ϕ وذلك باستعمال العلاقتين (9-8) ، (10-8) في المعادلة الثانية من معادلات ماكسويل فنحصل على :

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{A}) = \mu \bar{j}_c - \epsilon\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \phi + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right) \qquad (11\text{-}8)$$

وباستعمال المتطابقة المتجهية

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{A}) = \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A}$$

فان المعادلة (11-8) تأخذ الشكل التالي :

$$\nabla^2 \bar{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla \cdot \bar{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = -\mu \bar{j}_c \qquad (12\text{-}8)$$

ومن المهم هنا أن نشير الى اننا يمكن ان نختار اي قيمة للمقدار $\nabla \cdot \bar{A}$ بحيث

لا يؤثر على قيمة المتجه $\nabla \times \bar{A}$ حيث ان هذا المتجه يساوي $\bar{B}$ ، لذلك فاننا سوف نختار العلاقة التالية

$$\nabla \cdot \bar{A} = -\epsilon\mu \frac{\partial \phi}{\partial t} \qquad (13\text{-}8)$$

وتسمى هذه العلاقة بشرط لورنس (Lorentz Condition) وبذلك تأخذ المعادلة (12-8) الشكل التالي :

$$\nabla^2 \bar{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu \bar{J}_f \qquad (14\text{-}8)$$

وتسمى هذه العلاقة وهي معادلة تفاضلية غير متجانسة بمعادلة الموجه الخاصة بالجهد المتجهي $\bar{A}$. وفي حالة المجالات التي لا تعتمد على الزمن كحالة التيارات المستمرة تكون $\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = 0$ وتأخذ المعادلة (14-8) الشكل التالي :-

$$\nabla^2 \bar{A} = -\mu \bar{J}_f \qquad (15\text{-}8)$$

ولقد أشرنا في الفصل الخامس من هذا الكتاب في حالة التيارات المستمرة يكون .

$$\nabla \times \bar{B} = \mu \bar{J}_f$$

لذلك فان المعادلة (15-8) تأخذ الشكل التالي :

$$\nabla^2 \bar{A} = -\nabla \times \bar{B}$$

وهذا ما أشرنا اليه في الفصل الخامس . وبهذا نحصل على العلاقات المهمة الخاصة بالجهد المتجهي والتي هي:

(1) $$\nabla \times \bar{A} = \bar{B}$$

(2) $$\nabla \cdot \bar{A} = -\epsilon\mu \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

وفي حالة التيارات المستمرة

$$\nabla \cdot \bar{A} = 0$$

(3) $$\nabla^2 \bar{A} = -\nabla \times \bar{B} = -\mu \bar{J}_f$$

أما بالنسبة للجهد العددي ϕ فاننا يمكن الحصول على معادلة الموجه وذلك باستخدام معادلة ماكسويل الرابعة مع المعادلة (8-10) وباستعمال شرط لورنس نحصل على العلاقة

$$\nabla^2 \phi - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_f}{\epsilon} \qquad (16\text{-}8)$$

التي تمثل معادلة الموجة غير المتجانسة الخاصة بالجهد العددي ϕ فاذا كانت ϕ ثابتة ولا تتغير بالنسبة للزمن فان المعادلة (16-8) تأخذ الشكل التالي :

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho_f}{\epsilon}$$

وهي معادلة بوزن التي مر ذكرها في الفصل الثاني.

(4-4) متجه بوينتك

نود الان مناقشة انسياب الطاقة الكهرومغناطيسية من خلال سطح مغلق يحيط بحجم معين وعلاقته بالتغير في الطاقة المخزونة في المجالين الكهربائي والمغناطيسي ولنبدأ بمعادلتي الدوار لماكسويل بعد أن نضرب المعادلة الاولى ضربا عدديا في $\bar{H}$ والمعادلة الثانية في $\bar{E}$ فنحصل على :

$$\bar{H}.\nabla\times\bar{E} = -\bar{H}.\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} \qquad (17\text{-}8)$$

$$\bar{E}.(\nabla\times\bar{H}) = \bar{E}.\bar{j} + \bar{E}.\frac{\partial\bar{D}}{\partial t} \qquad (18\text{-}8)$$

بعد طرح المعادلة (18-8) من المعادلة (17-8) نحصل على :

$$\bar{H}.(\nabla\times\bar{E}) - \bar{E}.(\nabla\times\bar{H}) = -\bar{H}.\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} - \bar{E}.\frac{\partial\bar{D}}{\partial t} - \bar{E}.\bar{j} \qquad (19\text{-}8)$$

وباستعمال المتطابقة المتجهية التالية:

$$\nabla.(\bar{E}\times\bar{H}) = \bar{H}.(\nabla\times\bar{E}) - \bar{E}.(\nabla\times\bar{H})$$

مع المعادلة (19-8) نحصل على :

$$\nabla.(\bar{E}\times\bar{H}) = -\bar{H}.\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} - \bar{E}.\frac{\partial\bar{D}}{\partial t} - \bar{E}.\bar{j} \qquad (20\text{-}8)$$

ناخذ التكامل الحجمي للحجم τ لطرفي المعادلة (20-8) والذي يحيطه السطح S ، وبعد استعمال مبرهنة كاوس على الطرف الايسر لتحويل التكامل الحجمي الى تكامل سطحي نحصل على:

$$\int_S (\bar{E}\times\bar{H}).d\bar{S} = -\int_\tau \left(\bar{E}.\frac{\partial\bar{D}}{\partial t} + \bar{H}.\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}\right)d\tau - \int_\tau (\bar{E}.\bar{j})\,d\tau \qquad (21\text{-}8)$$

وهذه العلاقة وجدت من قبل العالم بوينتنك سنة ١٨٨٤ لذلك سميت باسمه (نظرية بوينتنك) . ويسمى حاصل الضرب المتجهي $(\bar{E}\times\bar{H})$ بمتجه بوينتنك وهو يمثل الطاقة في وحدة الزمن (القدرة) التي تنساب من وحدة السطوح في اية نقطة على السطح المغلق وسوف نرمز له بالحرف $\bar{N}$. وبذلك تأخذ المعادلة (21-8) الشكل التالي :

$$\int_S \bar{N}.d\bar{S} = -\int_\tau \left(\bar{E}.\frac{\partial\bar{D}}{\partial t} + \bar{H}.\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}\right)d\tau - \int_\tau (\bar{E}.\bar{j})\,d\tau \qquad (22\text{-}8)$$

يمثل الطرف الايسر من هذه المعادلة الطاقة الكهرومغناطيسية التي تنساب من السطح المغلق الذي يحتوي الحجم τ في وحدة الزمن ويمثل الحد الاول من الطرف الايمن مقدار النقصان في الطاقة الكهرومغناطيسية المخزونة في الحجم τ من ذلك الوسط . أما الحد الثاني من الطرف الايمن من هذه المعادلة فيمكن مناقشته كالاتي :

نفرض أن σ تمثل قابلية التوصيل الكهربائية للوسط و $\bar{E}'$ تمثل شدة المجـــال للقوة الدافعة الكهربائية التي تجهز النظام بالطاقة :

$$\bar{j} = \sigma(\bar{E} + \bar{E}')$$

$$\bar{E} = \frac{\bar{j}}{\sigma} - \bar{E}' \qquad (23\text{-}8)$$

وبهذا يأخذ الحد الثاني من الطرف الايمن من المعادلة (22-8) الشكل التالي :

$$\int_\tau (\bar{E}.\bar{j})\,d\tau = \int_\tau \frac{j^2}{\sigma} d\tau - \int_\tau (\bar{E}'.\bar{j})\,d\tau \qquad (24\text{-}8)$$

الحد الاول من الطرف الايمن من المعادلة (24-8) يمثل القدرة المفقودة على شكل حرارة بسبب مقاومة الوسط . أما الحد الثاني فيمثل القدرة التي تجهزها القوة الدافعة الكهربائية للوسط للتعويض عن الجزء المفقود على شكل حرارة اي التعويض عن الفقدان الذي يحصل في الطاقة الكهرومغناطيسية المخزونة في الوسط والجزء المتبقي من هذه القدرة ينساب خارج السطح S الذي يحتوي الحجم τ والممثل بالطرف الايسر من المعادلة (22-8) :

$$\int_S \bar{N}.d\bar{S} = \int_S \bar{E} X \bar{H} . d\bar{S}$$

واخيرا اذا كان الوسط متجانسا خطيا ومتماثل الصفات اي ان $B=\mu H$ و $D=\epsilon E$

فان المعادلة (22-8) تاخذ الشكل التالي :

$$\int_S \bar{N}.d\bar{S} + \int_\tau \frac{j^2}{\sigma} d\tau + \frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \left(\frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2\right) d\tau = \int_\tau (\bar{E}'.\bar{j})\,d\tau \qquad (25\text{-}8)$$