الفصل الثالث

المجال الكهربائي المستقر في المواد العازلة

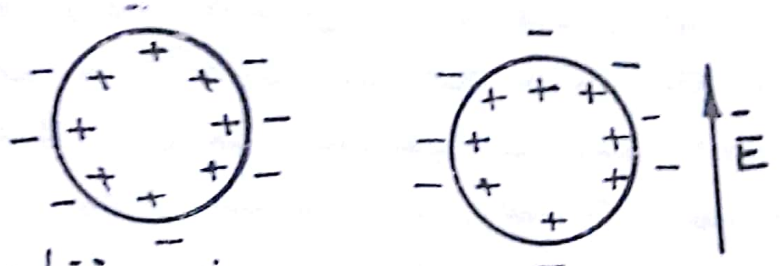
1-3 تمهيد :

تختلف المواد العازلة عن المواد الموصلة في كونها لا تمتلك الكترونات حرة الحركة تنساب داخل المادة تحت تأثير المجال الكهربائي ومن الامثلة على هذه المواد ، الزجاج والمايكا والمواد البلاستيكية والورق والشمع ... الخ . والمجال الكهربائي يؤثر في ايونات أو ذرات المواد العازلة التي هي عبارة عن شحنات سالبة وشحنات موجبة حيث يحدث اختلالا في حالة توازن الشحنات وتبتعد الشحنات الموجبة باتجاه المجال الكهربائي بينما تزاح الشحنات السالبة بالاتجاه المعاكس مكونة ثنائي قطب كهربائي وهذه الازاحة هي صغيرة جدا قياسا الى الابعاد الذرية للمادة حيث أنها لا تزيد على $10^{-5}\mathring{A}$ ويقال للمادة العازلة في هذه الحالة بأنها استقطبت وهناك مواد عازلة تحتوي على ثنائيات قطب دائمية بوضعها الاعتيادي ويكون اتجاهها عشوائيا بحيث ان محصلة عزوم ثنائي القطب تكون فيها مساوية الى الصفر . وفي حالة تعرض هذه المواد الى مجال كهربائي فان المجال الكهربائي يؤثر بعزم معين على ثنائيات القطب هذه ويحاول تدويرها باتجاه المجال ، وفي كلا الحالتين فان عملية الاستقطاب تؤدي الى ظهور مجال كهربائي يكون اتجاهه معاكسا الى اتجاه المجال الخارجي ولقد وجد أن استقطاب المادة العازلة يعتمد على محصلة المجال الكهربائي التي تعتمد على المجال الكهربائي لثنائيات القطب التي تعتمد في دورها على طبيعة المادة ... وهذا ما سنتطرق اليه في بند قادم من هذا الفصل .

2-3 النظرية المجهرية لاستقطاب المواد العازلة :

عندما تقع المواد العازلة تحت تأثير مجال كهربائي فانها تستقطب كما ذكرنا ولنناقش الان ما يحدث عند تعرض المواد العازلة الى مجال كهربائي ومن المعلوم ان ذرات المواد العازلة تتكون من شحنة موجبة في الوسط (النواة) تحيط بها سحابة من الالكترونات (شحنة سالبة) وأن مركز كتلة الشحنات السالبة منطبق

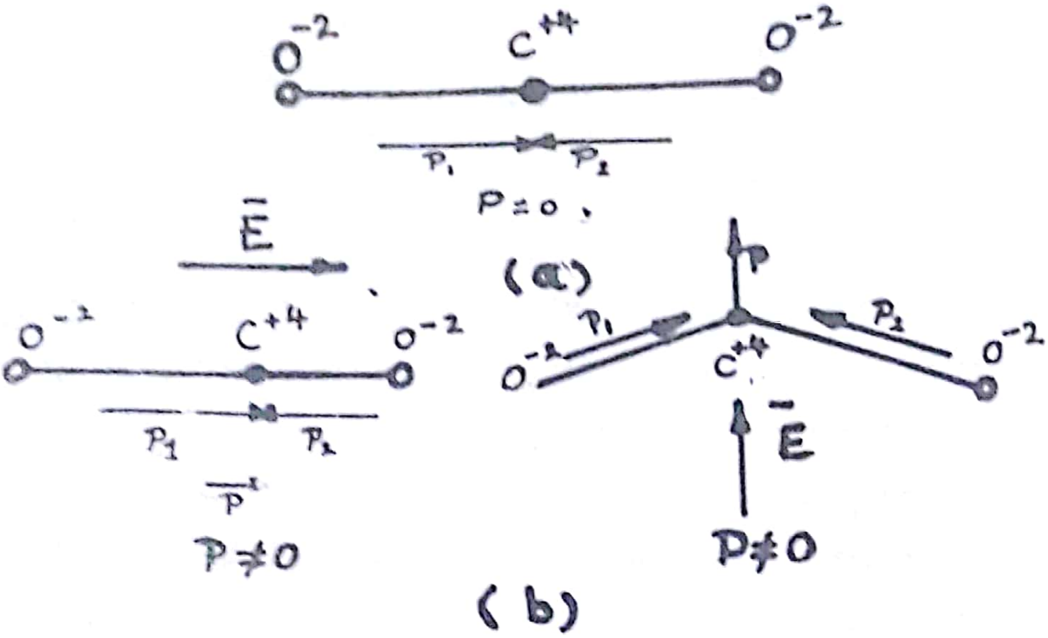
على مركز كتلة الشحنات الموجبة في حالة عدم وجود مجال كهربائي خارجي وبهذا يكون عزم ثنائي القطب مساويا الى الصفر · أما اذا تعرضت المادة العازلة الى مجال كهربائي خارجي فان مركز الكتلة الشحنات الموجبة سوف يزاح باتجاه المجال والسالبة بالاتجاه المعاكس وتكون ثنائيات قطب وينتج من ذلك أن المادة العازلة سوف تمتلك عزم ثنائي قطب ويدل أن المادة استقطبت ويسمى هذا النوع من الاستقطاب بالاستقطاب الاليكتروني أو المحث electronic polarization or induced polarization انظر الشكل (3-1).



الشكل (3-1)

في حالة الجزيئات التي تتعرض الى تاثير مجال كهربائي خارجي فانها تستقطب ايضا ويسمى نوع الاستقطاب في هذه الحالة بالاستقطاب الايوني ionic polarization ويعتمد هذا على البناء التاصري للايونات المكونة لهذا الجزيء ومثالا على ذلك لناخذ جزيئات ثاني اوكسيد الكربون الذي نرى فيه أن ايونات الاوكسجين تقع متناظرة بالنسبة لايون الكربون في حالة عدم تعرض الجزيء الى مجال كهربائي خارجي كما في الشكل (a-2-3) وتكون محصلة عزم ثنائي القطب مساوية الى الصفر · أما اذا تعرض هذا الجزيء لتاثير مجال كهربائي خارجي فان موقع أيونات الاوكسجين والكربون يتغير بالنسبة لبعضها البعض وتكون محصلة عزم ثنائي القطب ليست مساوية الى الصفر ويكون اتجاهها باتجاه شدة المجال الخارجي كما في الشكل (b2-3) ·

Scanned by CamScanner



الشكل (2-3)

أما النوع الثالث من الاستقطاب فهو النوع الخاص ببعض المواد التي تسمى المواد القطبية polar materials والتي تمتلك جزيئاتها عزم ثنائي قطب بصورة دائمية حتى في حالة عدم تعرضها الى مجال كهربائي خارجي ولكن محصلة هذه العزوم تكون مساوية الى الصفر لانها موزعة في المادة بصورة عشوائية [انظر الشكل (3-3)] في حالة وقوعها تحت تأثير مجال كهربائي فان ثنائيات القطب فيها تتأثر بعزم يحاول تدويرها باتجاه المجال وبهذا تكون محصلة عزوم ثنائي القطب لهذه المادة لا تساويها الى الصفر ومن الامثلة المعروفة لهذه المواد الماء ولكن الطاقة الحركية لجزئيات المادة (الطاقة الحرارية) تحاول دائما أن تجعل عزم ثنائيات القطب موزعة بشكل عشوائي بالرغم من وجود المجال الكهربائي الخارجي لذلك فان الاستقطاب في هذه المواد يعتمد بصورة كبيرة على درجة الحرارة ويسمى هذا النوع من الاستقطاب بالاستقطاب التوجيهي (orientational polarization)

الشكل (3-3)

وفي كثير من الحالات نجد أن المادة العازلة تختص بأكثر من حالة من حالات الاستقطاب الثلاث .

(3-3) الاستقطاب :

لقد تطرقنا في البند السابق الى أن المواد العازلة عندما تتعرض الى مجال كهربائي خارجي فانها تستقطب . ونود في هذا البند ان نوضح ما هو الاستقطاب : عندما تتاثر المادة العازلة بالمجال الكهربائي الخارجي فان ايونات هذه المادة سوف تكون في حالة استقرار عندما تكون القوة المعيدة بين الشحنات المختلفة مساوية للقوة التي يؤثر بها المجال الخارجي على هذه الشحنات . فاذا كان p هو عزم ثنائي القطب للذرة الواحدة أو الجزيئي الواحد من المادة العازلة وان هناك N من هذه الذرات او الجزيئات في المتر المكعب الواحد فان الاستقطاب P يساوي محصلة عزوم ثنائيات الاقطاب في المتر المكعب من تلك المادة ويمكن كتابة الصيغة الرياضية كالاتي :

$$\bar{P} = N\bar{p} \qquad (1-3)$$

واذا كانت المادة العازلة تحتوي على n من أنواع الذرات أو الجزيئات في تركيبها وان عزم ثنائي القطب لكل نوع هو p_i وان عدد الذرات او الجزيئات في وحدة الحجوم هو N_2 فان P في هذه الحالة تكون :

$$\bar{P} = \sum_{i=1}^{m} N_i \bar{p}_i \qquad (2-3)$$

ويمكن تعريف الاستقطاب بشكل آخر فاذا كان عزم ثنائي القطب في حيز ما حجمه $d\tau$ هو dp فان

$$\bar{P} = \frac{d\bar{p}}{d\tau} \qquad (3-3)$$

ومن هذا نجد أن الاستقطاب يتغير بتغير الموضع داخل المادة العازلة . وليس مهما نوع الاستقطاب ان كان الكترونيا ، ايونيا او توجيهيا فان الوحدة التي يقاس بها الاستقطاب هي $C\cdot m^{-2}$ وهو كمية اتجاهية كما هو واضح من المعادلتين (1-3) و (3-3) واتجاهه هو اتجاه عزم ثنائي القطب $\bar{p}$.

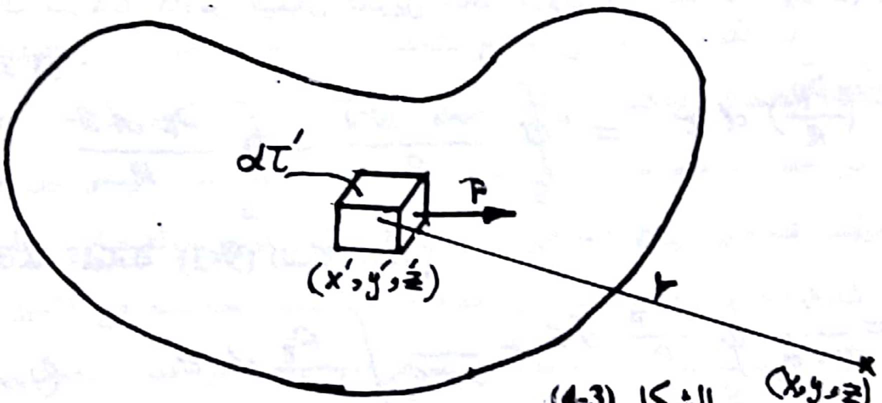
4-3 شدة المجال الكهربائي في نقطة خارج المادة العازلة :

نتصور حيزا من مادة عازلة حجمها τ وكثافة الشحنة الحجمية فيها تساوي

صفرا ($\rho = 0$) وكثافة الشحنة السطحية على سطحها تساوي صفرا ($\sigma=0$) عندما توضع هذه المادة العازلة في مجال كهربائي خارجي $\bar{E}$ فان ذرات هذه المادة تستقطب وتكتسب عزم ثنائي قطب ويقال لهذه المادة العازلة بأنها استقطبت • وفي اية نقطة في هذا الحيز خارج او داخل المادة العازلة سوف يستحدث جهدا جديدا بسبب عزوم ثنائيات القطب داخل المادة العازلة وبهذا فان مقدار الجهد في هذه النقطة سوف يختلف عما كان عليه قبل وضع المادة العازلة كما أن شدة المجال الكهربائي سوف تتغير • ان مقدار الجهد الكهربائي لثنائي قطب صغير في نقطة ما بعيد عنه كما جاء في المعادلة (34-2) هو :

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{p}\cdot\bar{e}_r}{r^2} \qquad (4-3)$$

ويمكن تعميم هذه العلاقة لتشمل جميع ثنائيات القطب (المادة العازلة المستقطبة) لنحسب شدة المجال في نقطة واقعة خارج المادة العازلة احداثياتها (x,y,z) انظر



الشكل (3-4)

$$\phi_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau'} \frac{\bar{P}\cdot\bar{e}_r}{r^2}\, d\tau' \qquad (5-3)$$

الشكل (3-4) وذلك باستعمال المعادلة (3-3) ومما تجد ملاحظته هنا ان النقطة التي نحسب بها الجهد ϕ يجب أن تكون بعيدة عن الحجم τ الذي تشغله المادة العازلة وذلك لكي تصح العلاقة (3-4) التي استخدمت للحصول على المعادلة (3-5) . وعلى سبيل المثال فان الازاحة بين قطبي ثنائي القطب تكون حوالي $1A^\circ$ وعلى هذا فان بعد النقطة التي نحسب فيها الجهد عن المادة العازلة يجب ان لا يقل عن $10A^\circ$ وذلك باستعمال العلاقة :

$$\frac{\bar{e}_r}{R^2} = -\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = +\nabla'\left(\frac{1}{R}\right) \qquad (6-3)$$

اذ أن المؤثر ∇' وكذلك الحجم الذي تشغله ثنائيات القطب $d\tau'$ يحسب من النقطة التي احداثياتها (x', y', z') وبهذا تأخذ المعادلة (5-3) الشكل التالي :

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\tau'} \bar{P}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{R}\right) d\tau' \qquad (7-3)$$

وهذه العلاقة الاخيرة يمكن وضعها بشكل آخر وذلك باستعمال المتطابقة التالية :

$$\nabla'\cdot\left(\frac{\bar{P}_r}{R}\right) = \frac{1}{R}\nabla'\cdot\bar{P}_r + \bar{P}_r\cdot\nabla'\left(\frac{1}{R}\right) \qquad (8-3)$$

حيث أن العلاقة (7-3) تأخذ الشكل التالي :

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\int_{\tau'}\nabla'\cdot\left(\frac{\bar{P}_r}{R}\right) d\tau' + \int_{\tau'} -\frac{\nabla'\cdot\bar{P}_r}{R}\, d\tau'\right] \qquad (9-3)$$

وباستعمال مبرهنة كاوس فيمكن تحويل الحد الاول في المعادلة (9-3) الى تكامل سطحي اذ أن :

$$\int_{\tau'}\nabla'\cdot\left(\frac{\bar{P}_r}{R}\right) d\tau' = \oint_S \frac{\bar{P}_r\cdot d\bar{s}}{R} = \oint_S \frac{P_r\, ds}{R}$$

وهكذا تأخذ المعادلة (9-3) الشكل التالي :

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_S \frac{\sigma_p}{R}\, ds + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\tau'}\frac{\rho_p}{R}\, d\tau' \qquad (10-3)$$

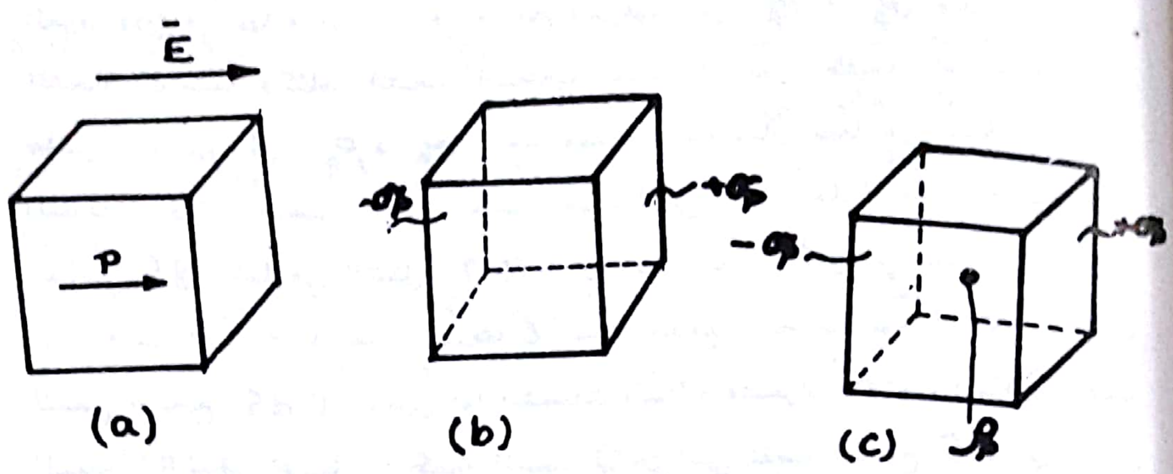
اذ أن

$$\sigma_p = P_r \qquad (11-3)$$

$$\rho_p = -\nabla\cdot\bar{P}_r \qquad (12-3)$$

وتسمى σ_p كثافة الشحنة السطحية للاستقطاب و ρ_p كثافة الشحنة الحجمية للاستقطاب ولتوضيح المعنى الفيزياني لكل من σ_p ، ρ_p نلاحظ الشكل (5-3) وفيه كتلة مكعبة من مادة عازلة موضوعة في حيز فيه مجال كهربائي شدته $\bar{E}$ متجه من اليسار الى اليمين ولهذا فان المادة العازلة تستقطب ويكون اتجاه الاستقطاب من اليسار الى اليمين وهو اتجاه محصلة عزوم ثنائيات القطب في المادة العازلة كما في الشكل (a5-3) ومن هذا الشكل نجد أن المركبة العمودية للاستقطاب تظهر

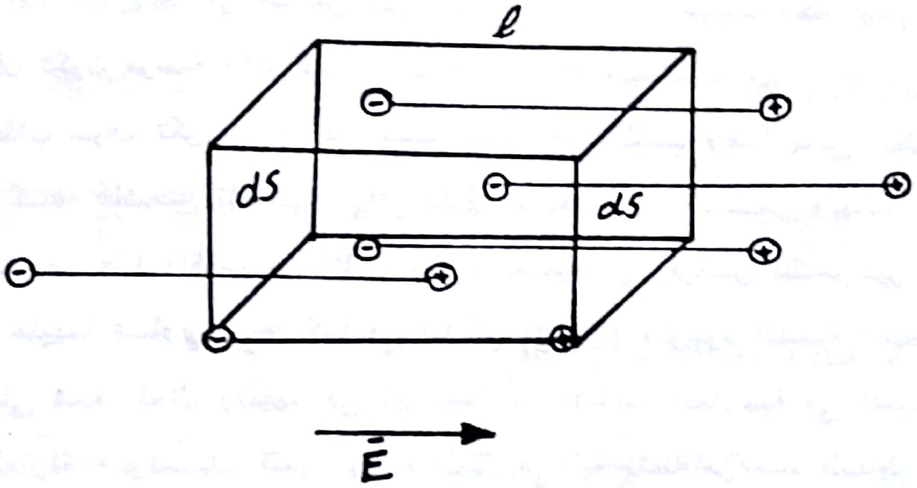
نقط على الوجهين الايسر والايمن من المكعب فعلى الوجه الايسر نجد أن اتجاه الاستقطاب يكون الى الداخل اي سالبا وهذا يعني ان σ_p يجب ان تكون سالبة



الشكل (5-3)

بينما نجد أنه يتجه الى الداخل على السطح الايمن أي موجبا وهذا يعني أن σ_p يجب أن تكون موجبة واذا كانت المادة العازلة متجانسة فهذا يعني أن قيمة الاستقطاب سوف تكون ثابتة في جميع نقاط هذا المكعب وهذا يعني ان $\nabla\cdot P_r = 0$ أي ان كثافة الشحنة الحجمية ρ_p تكون مساوية الى الصفر وبهذا يمكن أن نستعيض عن هذا المكعب من المادة العازلة بصفيحتين رقيقتين مشحونتين كثافة الشحنة عليهما تساوي σ_p كما في الشكل (b5-3) ولوجود الشحنة السطحية هذه تاثير على شدة المجال والجهد في أي نقطة من النقاط الخارجية في الحيز المحيط بالمادة العازلة . ولحساب الجهد وشدة المجال في اية نقطة من هذه النقاط يجب ان ناخذ بنظر الاعتبار كثافة الشحنة السطحية σ_p. لنتصور الان حجما صغيرا جدا في داخل المادة العازلة ولتكن متجانسة فان تأثير المجال الكهربائي الخارجي هو ازاحة بعض الشحنات الموجبة الى هذا الحجم وفي الوقت نفسه اضافة شحنات سالبة مساوية لها بحيث يكون صافي الشحنات في هذا الحجم الصغير متعادلا ومساويا الى الصفر .
أما اذا كانت المادة العازلة غير متجانسة فمعنى هذا أن صافي الشحنات التي تزاح الى هذا الحجم الصغير بتأثير بالمجال الخارجي لا تكون مساوية الى الصفر وبهذا يكون $\nabla\cdot P_r \neq 0$ أي ان هناك مناطق في هذه المادة العازل اكتسبت شحنات سالبة أو موجبة اكثر من غيرها وبهذا لا تكون ρ_p مساوية الى الصفر ويجب أن نأخذ بنظر الاعتبار تاثير هذه الشحنة على المجال الخارجي أي أن نضيف ρ_p الى المنطقة الموجودة بين

الصفيحتين الرقيقتين كما في الشكل (c5-3) . ومن الجدير بالذكر هنا ان اضافة الحرف (p) في نهاية كل من ρ و σ لنفرقهما عن ρ_f و σ_f وهما كثافة الشحنة الحجمية وكثافة الشحنة السطحية للشحنات الحرة طليقة الحركة كما ان هاتين الكميتين اي ρ_p و σ_p هما مقداران حقيقيان نتجا عن استقطاب المادة العازلة . والان لنتصور عنصرا حجميا صغيرا في المادة العازلة مساحة سطحه الجانبي dS كما في الشكل (6-3) . وبتاثير المجال الكهربائي تنفصل الشحنات الموجبة عن السالبة بازاحة معدلها l حيث تندفع الشحنات الموجبة باتجاه المجال لتقطع السطح dS الى اليمين اما الشحنات السالبة فتتحرك بالاتجاه المعاكس لتقطع السطح dS الى اليسار . كمية الشحنة dQ التي تقطع السطح dS الى اليمين هي الشحنة الكلية في متوازي المستطيلات الموضح في الشكل (6-3) .



الشكل (6-3)

$$dQ = NQ\bar{l} \cdot d\bar{S} \qquad (13-3)$$

على اعتبار أن Q هي شحنة نهايتي ثنائي القطب و N عدد الجزيئات في وحدة الحجوم ويمكن كتابة العلاقة (13-3) بالشكل التالي :

$$dQ = \bar{P} \cdot d\bar{S} \qquad (14-3)$$

على اعتبار أن عزم ثنائي القطب p يساوي Ql وأن الاستقطاب P يساوي Np . والمعادلة (14-3) يمكن كتابتها بالشكل التالي :

$$dQ = \bar{P} \cdot \bar{n}\, dS \qquad (15-3)$$

اذ أن $\bar{n}$ هو وحدة المتجه العمودية على السطح dS ، ومن هذا نجد ان :

$$\sigma_p = \frac{dQ}{dS} = \bar{P}\cdot\bar{n} = \bar{P}_n$$

اي أن كثافة الشحنة السطحية المحتثة على سطح المادة العازلة تساوي عدديا المركبة العمودية للاستقطاب على ذلك السطح .

وبنفس الطريقة بمكننا أن نثبت أن $\nabla.P$ــ يساوي كثافة الشحنة الحجمية المحتثة داخل المادة العازلة حيث أن الشحنات التي تنساب (تتحرك) الى الحجم $d\tau$ (متوازي المستطيلات) خلال السطح ds هو $\bar{P}.d\bar{S}$ وكما جاء في المعادلة (15-3) ويعنى هذا أن الشحنة الكلية التي تمر خلال السطح S الذي يحيط بالحجم τ هو :

$$Q = \int_S \bar{P}.d\bar{S} \qquad (16-3)$$

اي أن مقدار الشحنات الباقي في داخل الحجم τ هو Q - حيث أن المادة العازلة متعادلة الشحنات فاذا اعتبرنا ان ρ_p هو كثافة الشحنات الحجمية داخل الحجم τ نستنتج من هذا أن :

$$\int_\tau \rho_p\, d\tau = -Q \qquad (17-3)$$

ومن المعادلتين (16-3) و (17-3) نحصل على :

$$\int_\tau \rho_p\, d\tau = -\int_S \bar{P}.d\bar{S} \qquad (18-3)$$

وباستعمال مبرهنة كاوس يمكن تحويل التكامل السطحي في المعادلة (18-3) على الجانب الايمن الى تكامل حجمي حيث نحصل على ..

$$\int_\tau \rho_p\, d\tau = -\int_S \bar{P}.d\bar{S} = -\int_\tau \nabla.\bar{P}\, d\tau \qquad (19-3)$$

وبما أن هذه المعادلة تصح للحجم $d\tau$ الذي هو نفسه في التكاملين الواردين في المعادلة (19-3) لذلك فان :

$$\rho_p = -\nabla.\bar{P} \qquad (20-3)$$

ولحساب شدة المجال داخل المادة العازلة تستعمل σ_p, ρ_p وذلك كما في المعادلة (10-3) الخاصة بحساب شدة المجال خارج المادة العازلة بالرغم من وجود عامل

اخر وهو شدة المجال بين النوى والالكترونات في التركيب الداخلي للذرات والتي

تصل قيمته الى مئات الملايين من الفولتات على المتر الواحد لان معدل

قيمتها في جميع نقاط المادة العازلة يكون مساويا الى الصفر ، وأخيرا فان المعادلة

(10-3) تستعمل لحساب شدة المجال داخل وخارج المادة العازلة . وباستعمال العلاقة

$\bar{E} = -\nabla\phi$ يمكننا حساب شدة المجال في تلك المنطقة .

4-3 الازاحة الكهربائية : Electric displacement

باستعمال مبرهنة كاوس يمكن كتابة قانون كاوس بالشكل التالي :

$$\nabla\cdot\bar{E} = \frac{\rho_t}{\epsilon_0} \qquad (21-3)$$

وفي هذه العلاقة تعني ρ_t كثافة الشحنة لكل انواع الشحنات حرة كانت او مقيدة ففي حالة تطبيق هذه العلاقة في الفراغ فان ρ_t تعني كثافة الشحنة في الفراغ ولكن عند استعمالها في وسط عازل فلا بد من أن نأخذ بنظر الاعتبار كثافة الشحنة المقيدة ρ_p والتي تنشأ بسبب استقطاب المادة العازلة وعلى هذا الاساس فسان كثافة الشحنة في هذه الحالة تكون مجموع كثافة الشحنة الحرة وكثافة الشحنة المقيدة $\rho_t = \rho_f + \rho_p$ ولذلك فان المعادلة (21-3) للمواد العازلة تأخذ الشكل التالي :

$$\nabla\cdot\bar{E} = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho_f + \rho_p) \qquad (22-3)$$

وهذه المعادلة تمثل قانون كاوس بصيغته العامة ، وأن E هي شدة المجال داخل المادة العازلة كما انها تمثل احدى معادلات ماكسويل كما سنرى مستقبلا على اعتبار ان كثافة الشحنة الكلية في ذلك الحيز تساوي $\rho_f + \rho_p$ وبما ان $\bar{E} = -\nabla\phi$ فان

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho_t}{\epsilon_0} \qquad (23-3)$$

وهذه الصيغة تمثل معادلة بوازن في المواد العازلة

وباستعمال العلاقة (12-3) في المعادلة (22-3) نحصل على

$$\nabla\cdot\bar{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho_f - \frac{1}{\epsilon_0}\nabla\cdot\bar{P}$$

$$\nabla\cdot(\epsilon_0\bar{E} + \bar{P}) = \rho_f \qquad (24-3)$$

فاذا فرضنا أن

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P} \qquad (25-3)$$

تأخذ المعادلة (3-23) الشكل التالي :

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho_f \qquad (26-3)$$

ويسمى المتجه $\bar{D}$ بالازاحة الكهربائية والوحدة التي يقاس بها في النظام العالمي للوحدات هي وحدات كثافة الشحنة السطحية c/m^2 نفسها . وبصورة عامة فان قانون كاوس في المواد العازلة باستعمال مصطلح الازاحة الكهربائية يأخذ الشكل التالي :

$$\int_s \bar{D} \cdot d\bar{s} = \int_\tau \rho_f \, d\tau \qquad (27-3)$$

وتعني المعادلة الاخيرة أن فيض الازاحة الكهربائية خلال سطح مغلق يساوي التكامل الحجمي الذي يحتوي ذلك السطح للكثافة الحجمية للشحنات الحرة في ذلك الحجم . ومما تقدم فاننا نستنتج أن شدة المجال الكهربائي داخل مادة عازلة هي:

$$\bar{E} = \frac{\bar{D}}{\epsilon_0} - \frac{\bar{P}}{\epsilon_0} \qquad (28-3)$$

التأثرية الكهربائية وثابت العزل الكهربائي :

The electric susceptibility and Dielectric Constant

لقد لاحظنا في البند السابق وكما هو واضح من المعادلتين (3-25) و (28-3) علاقة كل من $\bar{E}$ ، $\bar{P}$ و $\bar{D}$ ببعضها البعض ولقد لوحظ عمليا اعتماد كثافة الشحنة السطحية المحتثة σ_p وكذلك كثافة الشحنة الحجمية ρ_p على شدة المجال داخل المادة العازلة وبعبارة أخرى فان الاستقطاب P يعتمد على شدة المجال $\bar{E}$ داخل المادة العازلة .

وبالرغم من أن هذه العلاقة هي ليست خطية لكثير من المواد وبصورة خاصة اذا كانت شدة المجال الكهربائي عالية جدا حتى أن لبعض المواد ذات التركيب البلوري يكون كل من الاستقطاب وشدة المجال في اتجاهين متعاكسين ولكن بصورة عامة وفي

الحالات الاعتيادية التي لا تكون فيها قيمة E عالية جدا يمكن كتابة العلاقة التالية :

$$\bar{P} = \chi(\epsilon_\circ \bar{E}) \qquad (29-3)$$

اذ أن χ معامل عددي يسمى التأثرية الكهربائية وبهذا تأخذ المعادلة (25-3) الشكل التالي :

$$\bar{D} = \epsilon_\circ \bar{E} + \chi \epsilon_\circ \bar{E} = (1+\chi)\epsilon_\circ \bar{E}$$

واذا عوضنا عن $(1+\chi)$ بالمقدار K_e فان :

$$D = K_e \epsilon_\circ \bar{E} \qquad (30-3)$$

ويسمى المعامل العددي K_e بثابت العزل وهو عدد مجرد.واذا عوضنا عن المقدار χ بالمقدار (K_e-1) فان :

$$\bar{P} = (K_e-1)\epsilon_\circ \bar{E} \qquad (31-3)$$

كما أن المعادلة (30-3) تأخذ الشكل التالي :

$$\bar{D} = \epsilon \bar{E} \qquad (32-3)$$

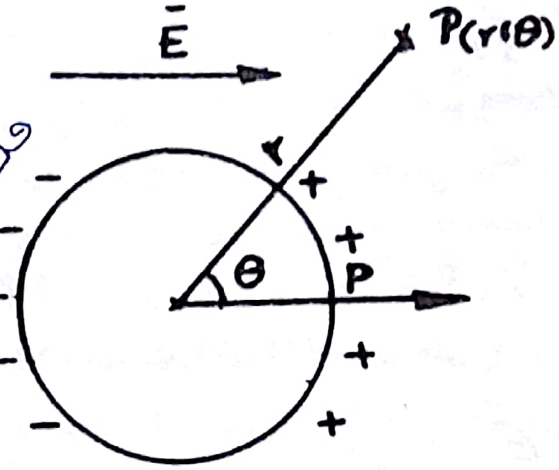
على اعتبار ان $\epsilon = K_e \epsilon_\circ$ ويسمى المعامل ϵ بسماحية المادة العازلة ووحدة قياسه هي نفس وحدة قياس المعامل $\epsilon_\circ$ وهي (c/vm) وتتراوح قيمة ثابت العزل بين الواحد والعشرة لمعظم المواد العازلة وتكون قيمته واحد للفراغ ويشذ الماء عن هذه القاعدة حيث أن ثابت العزل في درجات الحرارة الاعتيادية يساوي 80 .

(6-3) معادلة كلاوسيوس – موسوتي : The Clausius-Mossotti Equation

لقد تطرقنا في البنود السابقة من هذا الفصل الى حساب شدة المجال داخل المادة العازلة وذلك بمعرفة الشحنات الحرة وطريقة توزيعها في ذلك الحيز . وبالرغم من تطرقنا في بعض الاحيان الى جزيئات المادة العازلة الا اننا لم نتبع الطريقة المجهرية في معالجتنا لهذا الموضوع ولهذا الفرض يجب أن نأخذ بنظر الاعتبار تأثير شدة المجال لجزيء المادة العازلة على المجال الكهربائي الاصلي وهذا يعني

انـا يجب أن نعرف معلومات تفصيلية عن شكل الجزيء كموضعه وطريقة توزيع الشحنة فيه.وسوف نركز اهتمامنا على شكل الجزيء وتاثيره على المجال الكهربائي الخارجي باعتباره العامل الرئيس في هذا التاثير كما اننا سوف نختار ابسـط شكل للجزيء وهو الشكل الكروي كما في الشكل (7-3).

كل القصايد
في حلى عينيك ...
في دفا ايديك ...
كتبتْ وقلتْ



الشكل (7-3)

ان سبب وجود المجال الكهربائي لهذا الجزيء والذي يكون اتجاهه معاكسا لاتجـاه الاستقطاب (وهو يعاكس المجال الاصلي) هو الشحنات المحتثة المقيدة الموجودة على نهايتي الجزيء والتي تساوي المركبة العمودية للاستقطاب ، اي أن:

$$\sigma_p = P_n = P\cos\theta \qquad (33-3)$$

ولحساب شدة المجال المتولدة من هذه الشحنات المحتثة على سطح الكرة لمسـاحة صغيرة مقدارها dS هو :

$$d\bar{E}_s = \frac{\sigma_p\, dS}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\bar{e}_r \qquad (34-3)$$

حيث ان $\bar{e}_r$ هو وحدة المتجه من السطح باتجاه مركز الكرة . وباستعمال المعادلة (33-3) في المعادلة (34-3) نحصل على :

$$d\bar{E}_s = \frac{P\cos\theta\,\bar{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}\, dS \qquad (35-3)$$

وباستعمال المحاور الكروية القطبية يمكننا ان نعوض عن dS بما يساويها

$$dS = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

وبالتعويض عن dS في المعادلة (34-3) بما يساويها من المعادلة (35-3) آخذين بنظر الاعتبار مركبة المجال في اتجاه P فقط نحصل على:

$$E_s = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \qquad (36-3)$$

$$\bar{E}_s = \frac{\bar{P}}{3\epsilon_0} \qquad (37-3)$$

وتكون شدة المجال الكهربائي الجزيئي الذي يساوي المجموع الاتجاهي للمجال الخارجي E والمجال الخاص بالاستقطاب الجزيئي كالاتي :

$$\bar{E}_m = \bar{E} + \bar{E}_s \qquad (38-3)$$

وباستعمال المعادلة (37-3) بالمعادلة (38-3) نحصل على :

$$\bar{E}_m = \bar{E} + \frac{\bar{P}_r}{3\epsilon_0} \qquad (39-3)$$

والان لنجد العلاقة بين ثابت العزل K_e والخواص الجزيئية للمادة العازلة . لقد وجد في اكثر الحالات وبصورة خاصة للمواد العازلة المتماثلة الصفات عند تعريضها لمجال كهربائي أن الازاحة الحاصلة بين جزيئات مادتها وكذلك عزوم الاقطاب الثنائية فيها تتناسب مع المجال الجزيئي لها أي أن :

$$\bar{p} = \alpha \bar{E}_m = \alpha\left(\bar{E} + \frac{\bar{P}_r}{3\epsilon_0}\right) \qquad (40-3)$$

ويسمى المعامل α في المعادلة الاخيرة بقابلية الاستقطاب وبالتعويض عن عزم ثنائي القطب بما يساويه $P_r = Np$ في المعادلة (40-3) نحصل على :

$$\bar{P} = N\alpha\left(\bar{E} + \frac{1}{3\epsilon_0}\bar{P}\right) \qquad (41-3)$$

وبالتعويض عن قيمة P بما يساويها من المعادلة (31-3) وهو $\bar{P} = (K_e - 1)\epsilon_0 \bar{E}$ فان المعادلة الاخيرة تأخذ الشكل التالي :

$$\alpha = \frac{3\epsilon_0}{N}\left(\frac{K_e - 1}{K_e + 2}\right) \qquad (42-3)$$

تسمى هذه المعادلة بمعادلة كلاوسيوس موسوتي التي تعطينا العلاقة بين قابلية

الاستقطاب الجزيئي وثابت العزل وعدد الجزيئات في وحدة الحجوم للمادة العازلة ٠

(7-3) معادلة لانجفن The Langevin Equation

في الموائع من المواد القطبية نجد أن هناك تأثيرا كبيرا للتصادم والاضطراب الحراري على الجزيئات حيث تمنعها من التراصف باتجاه المجال الكهربائي الجزيئي ٠ وبالرغم من هذا التأثير فان قسما قليلا من عزوم ثنائيات القطب يكون باتجاه المجال الكهربائي الجزيئي ٠ ونود هنا ان نحسب هذا النوع من الاستقطاب ولهذا الغرض نتصور وحدة حجوم من هذا المائع القطبي الواقع تحت تأثير مجال كهربائي خارجي والذي يحتوي على N من الجزيئات المستقطبة ٠ في حالة عدم وجود مجال كهربائي خارجي فان اتجاه عزوم ثنائي القطب يكون عشوائيا وليكن عدد ثنائيات القطب المحصور بين الزاوية θ والزاوية $\theta+d\theta$ من الاتجاه المقصود في أي لحظة يساوي dN وتكون النسبة dN/N كالنسبة بين الزاوية المجسمة التي تناظر الزاوية النطية $d\theta$ والزاوية المجسمة 4π أي ان :

$$\frac{dN}{N} = \frac{2\pi \sin\theta \, d\theta}{4\pi} = \frac{\sin\theta \, d\theta}{2} \qquad (43-3)$$

ولقد وجد انه في حالة تعرض جزيئات المادة الى مجال كهربائي جزيئي Em وهي في حالة توازن احصائي فان عدد الجزيئات التي تمتلك الطاقة الكامنة W (والتي تعتمد على اتجاه ثنائي القطب بالنسبة للمجال الكهربائي الجزيئي) ان هذا العدد يتناسب مع المعامل $\exp(-W/kT)$ حيث تمثل k ثابت بولتزمان ويساوي 1.38×10^{-23} J/kelvin و T درجة الحرارة المطلقة بمقياس كلفن ٠ وفي هذه الحالة فان ثنائيات القطب التي تصنع محاورها زوايا تقع ضمن المدى θ و $\theta+d\theta$ مقاسة من اتجاه المجال الكهربائي الجزيئي تمتلك جميعا طاقة كامنة مقدارها :

$$W = -\bar{p}\cdot\bar{E}_m = -p E_m \cos\theta \qquad (44-3)$$

وعلى هذا الاساس فان عدد ثنائيات القطب في وحدة الحجوم التي تقع ضمن مدى الزاوية θ ، $\theta+d\theta$ هو :

$$dN = C\, e^{pE_m\cos\theta/kT} \sin\theta \, d\theta$$

$$= C e^{\mu \cos\theta} \sin\theta \, d\theta \qquad (45-3)$$

اذ يمثل المقدار u القيمة pE_m/kT ، وتحدد قيمة الثابت C بحيث يكون مجموع الجزيئات في وحدة الحجوم يساوي N :

$$N = C \int_0^{\pi} e^{\mu \cos\theta} \sin\theta \, d\theta \qquad (46-3)$$

وباستعمال المعادلتين (45-3) و (46-3) نجد ان الجزيئات التي عزومها تقع في مدى الزاوية θ $\theta + d\theta$ تمتلك عزم ثنائي قطب باتجاه المجال الجزيئي:

$$dP = p\, dN \cos\theta = pN \frac{e^{\mu \cos\theta} \sin\theta \cos\theta \, d\theta}{\int_0^{\pi} e^{\mu \cos\theta} \sin\theta \, d\theta} \qquad (47-3)$$

لايجاد قيمة الاستقطاب P يجب علينا ان نكامل البسط في المعادلة السابقة فنحصل على :

$$P = pN \frac{\int_0^{\pi} e^{\mu \cos\theta} \sin\theta \cos\theta \, d\theta}{\int_0^{\pi} e^{\mu \cos\theta} \sin\theta \, d\theta} \qquad (48-3)$$

ولتسهيل التكامل نجري التعويض $t = \mu \cos\theta$ وبهذا تأخذ المعادلة (48-3) الشكل التالي :

$$P = \frac{pN}{\mu} \frac{\int_{-\mu}^{+\mu} e^{t}\, t\, dt}{\int_{-\mu}^{+\mu} e^{t}\, dt} = \frac{pN}{\mu} \left[\frac{t e^{t} - e^{t}}{e^{t}} \right]_{-\mu}^{+\mu}$$

$$P = pN \left[\coth \mu - \frac{1}{\mu} \right] = pN \left[\coth \frac{pE_m}{kT} - \frac{kT}{pE_m} \right] \qquad (49-3)$$

وتسمى هذه المعادلة بمعادلة لانجفين ٠

وفي درجة حرارة الغرفة نجد أن قيمة المقدار μ تكون صغيرة ٠ اذ أن قيمة KT تقارب 4×10^{-21} J بينما نجد أن القيمة الاعتيادية لعزم ثنائي القطب تساوي تقريبا 10^{-3}c.m فاذا كانت قيمة المجال الكهربائي الجزيئي تساوي 4×10^{7} V/m

فان قيمة μ تكون مساوية 10^{-2}. وعلى هذا الاساس يمكننا فك الدالة الاسية في المعادلة (49-3) لتأخذ هذه المعادلة الشكل التالي

$$P \simeq pN\left(\frac{2+\mu^2}{2\mu(1+\frac{\mu^2}{6})} - \frac{1}{\mu}\right)$$

$$\simeq pN\left[\frac{1}{2\mu}(2+\mu^2)(1-\frac{\mu^2}{6}) - \frac{1}{\mu}\right]$$

$$P \simeq \frac{pN\mu}{3} = \frac{Np^2}{3kT}E_m \qquad (50-3)$$

وتسمى هذه العلاقة بقانون كوري .

ونجد في هذه العلاقة أن الاستقطاب في المواد العازلة القطبية يتناسب مع شدة المجال الجزيئي ومن هذا نجد أن كلا من التأثرية الكهربائية χ والسماحية يتناسب عكسيا مع درجة الحرارة في المواد العازلة القطبية .

8-3 معادلة ديباي The Debye Equation

لنتصور ان لدينا مادة عازلة تحتوي على ثنائيات قطب محتثة ودائمية فمن المعادلتين (40-3) و (50-3) نجد أن الاستقطاب يأخذ الشكل التالي :

$$\bar{P} = N\left(\alpha + \frac{p^2}{3kT}\right)\bar{E}_m \qquad (51-3)$$

وبما ان

$$\bar{E}_m = \bar{E} + \frac{\bar{P}}{3\epsilon_0}$$

ولان

$$\bar{P} = \epsilon_0(K_e-1)\bar{E}$$

$$\bar{E}_m = \bar{E} + \frac{\epsilon_0(K_e-1)}{3\epsilon_0}\bar{E} = \left(\frac{2+K_e}{3}\right)\bar{E} \qquad (52-3)$$

وبتعويض هذه القيمة في المعادلة (51-3) نحصل على :

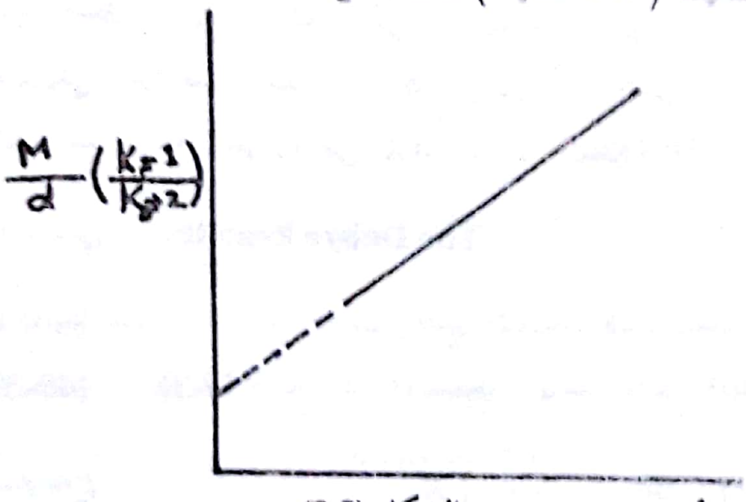
$$\bar{P} = (K_e-1)\epsilon_0\bar{E} = N\left(\alpha + \frac{p^2}{3kT}\right)\left(\frac{K_e+2}{3}\right)\bar{E}$$

$$\frac{K_e-1}{K_e+2} = \frac{N}{3\epsilon_0}\left(\alpha + \frac{p^2}{3kT}\right) \qquad (53-3)$$

وبضرب طرفي هذه المعادلة بالوزن الجزيئي M وبالقسمة على الكثافة d نحصل على:

$$\alpha_m = \frac{M}{d}\left(\frac{K_e-1}{K_e+2}\right) = \frac{N_A}{3\epsilon_0}\left(\alpha + \frac{p^2}{3kT}\right) \qquad (٤٤-٣)$$

حيث يمثل N_A عدد افكادرو وتسمى هذه المعادلة الاخيرة بمعادلة ديباي وهذه المعادلة تمكننا من قياس كل من قابلية الاستقطاب α وعزم ثنائي القطب p للجزيئي وبرسم $\frac{M}{d}\left(\frac{K_e-1}{K_e+2}\right)$ عموديا مع $\frac{1}{T}$ افقيا نحصل على الشكل (3-8) التي يمثل خطا مستقيما (دالة خطية) مقطعة مع المحور العمودي يساوي المقدار $\frac{N_A\alpha}{3\epsilon_0}$



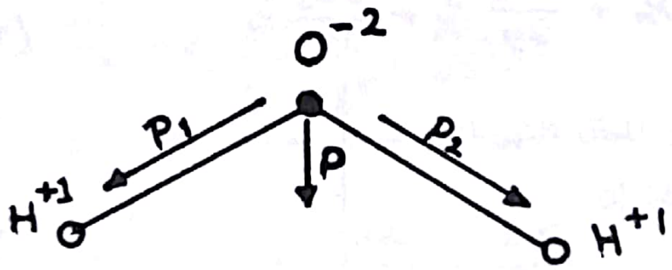
الشكل (3-8)

وميله يساوي المقدار $N_A p^2/9\epsilon_0 k$ حيث يمثل N_A عدد افوكادرو و k ثابت بولتزمان وتستعمل هذه المعادلة لقياس كل من α و p للغازات التي لا يختلف فيها ثابت العزل الا قليلا عن الواحد او في المحاليل المخففة للجزيئات القطبية المحلولة في محاليل غير قطبية ٠

3-9 اعتماد ثابت العزل على التردد

تقع قيمة ثابت العزل K_e بالنسبة لاكثر المواد العازلة بين (1) و(10)كما جاء في البند (3-5) ٠ الا أن بعض المواد تشذ من هذه القاعدة فمثلا نجد أن ثابت عزل الماء في درجات الحرارة الاعتيادية يساوي 81 وان ثابت العزل لمادة تيتانات الباريوم هو حوالي1000 وفي هذه المواد فان العلاقة بين كل من P و E هي ليست علاقة خطية بسيطة كما أن قيمة ثابت العزل تتغير مع تردد مصدر المجال الكهربائي

فمثلا نجد أن قيمة ثابت العزل للماء تهبط من 81 في حالة استعمال مجال كهربائي مستقر الى 1.8 في حدود طيف الضوء المرئي • وتعليل ذلك هو أن جزيء الماء قطبي أي انه يمتلك عزم ثنائي قطب بصورة طبيعية وذلك لان ذرة الاوكسيجين وذرتي الهيدروجين ليست واقعة على خط مستقيم واحد بل أن الاصرتين اللتين تربطان ذرة الاوكسيجين بذرتي الهيدروجين تصنعان بينهما زاوية مقدارها 105° لذلك فان محصلة ثنائيي القطب P_1, P_2 لا تكون مساوية الى الصفر كما في الشكل (9-3) ويكون اتجاه ثنائيات القطب p لمجموع جزيئات المادة عشوائيا حيث تكون محصلته صفرا في حالة عدم وجود مجال خارجي أما في حالة وجود المجال الخارجي فان هذا المجال يحاول أن يوجه ثنائيات القطب لمجموع جزيئات المادة باتجاهه وهذا ما يحدث في حالة تأثر المادة العازلة بمجال كهربائي مستقر (تردده صفر) وحتى تردد موجات المايكروويف (10^{10}Hz) ولكن لترددات



الشكل (9-3)

أعلى من ترددات المايكروويف فان جزيئات الماء تجد صعوبة كبيرة لكي توجه نفسها باتجاه المجال الكهربائي وذلك بسبب تردد المجال العالي وبهذا تهبط قيمة الاستقطاب فنجد مثلا أن ثابت عزل الماء يساوي تقريبا 5 عندما يكون تردد المجال 10^{12}Hz ويأخذ هذا الثابت القيمة 1.8 ضمن طيف الضوء المرئي أي 10^{15}Hz •

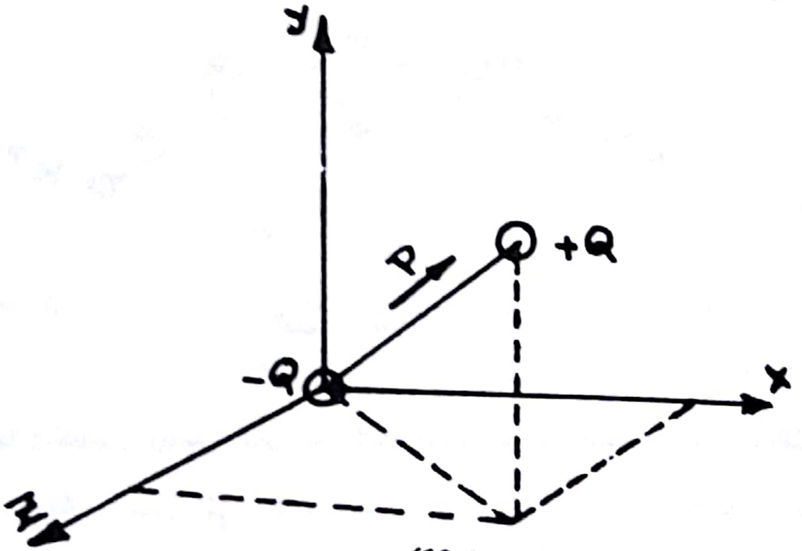
10-3 القوى على المواد العازلة :-

عندما توضع مادة عازلة في مجال كهربائي فان ثنائيات القطب المتكونة في

المادة العازلة تتاثر بقوى وعزوم كاي ثنائي قطب موجود في مجال كهربائي كما جاء في البند (6) من الفصل الثاني وتكون محصلة القوى على ثنائي القطب مساوية الى الصفر اذا كان المجال الكهربائي منتظما . أما اذا كان المجال غير منتظم فان محصلة القوى لا تساوي صفرا . ولنتصور أحد ثنائيات القطب في المادة العازلة واقع تحت تاثير مجال غير منتظم شدته في نقطة الاصل تساوي E كما في الشكل (3-10) وعلى هذا الاساس تكون محصلة القوى على ثنائي القطب في الاتجاه X كما يلي :

$$\bar{F}_x = -Q\bar{E}_x + Q\left(\bar{E}_x + \frac{\partial \bar{E}_x}{\partial x}\,\bar{l}.\bar{i} + \frac{\partial \bar{E}_x}{\partial y}\,\bar{l}.\bar{j} + \frac{\partial \bar{E}_x}{\partial z}\,\bar{l}.\bar{k}\right) \quad (55\text{-}3)$$

$$= \frac{\partial \bar{E}_x}{\partial x} P_x + \frac{\partial \bar{E}_x}{\partial y} P_y + \frac{\partial \bar{E}_x}{\partial z} P_z \quad (56\text{-}3)$$



الشكل (3-10)

وبالطريقة نفسها نحصل على محصلة القوة في الاتجاهين (y ، z)

$$\bar{F}_y = \frac{\partial \bar{E}_y}{\partial x} P_x + \frac{\partial \bar{E}_y}{\partial y} P_y + \frac{\partial \bar{E}_y}{\partial z} P_z \quad (57\text{-}3)$$

$$\bar{F}_z = \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial x} P_x + \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial y} P_y + \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial z} P_z \quad (58\text{-}3)$$

وبهذا تكون محصلة القوى على ثنائي القطب هي :

$$' = \left(P_x \frac{\partial}{\partial x} + P_y \frac{\partial}{\partial y} + P_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(E_x \bar{i} + E_y \bar{j} + E_z \bar{k}\right) \qquad (59-3)$$

$$\bar{F}' = (\bar{p} \cdot \nabla)\bar{E} \qquad (60-3)$$

وتكون محصلة القوة لوحدة الحجوم من المادة العازلة N من المرات القوة $\bar{F}'$:

$$\bar{F} = N\bar{F}' = (\bar{P} \cdot \nabla)\bar{E} \qquad (61-3)$$

ومن المعادلة (31-3) نجد أن $\bar{P} = (\epsilon - \epsilon_0)\bar{E}$

$$N\bar{F}' = (\epsilon - \epsilon_0)(\bar{E} \cdot \nabla)\bar{E} = (\epsilon - \epsilon_0)\left(E_x \frac{\partial}{\partial x} + E_y \frac{\partial}{\partial y} + E_z \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\left(E_x \bar{i} + E_y \bar{j} + E_z \bar{k}\right) \qquad (62-3)$$

وتكون مركبة هذه القوة بالاتجاه x مساوية الى :

$$\bar{F}_x = (\epsilon - \epsilon_0)\left(E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + E_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + E_z \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\bar{i} \qquad (63-3)$$

وبما أن دوار المجال الكهربائي المستقر يساوي صفرا $(\nabla \times \bar{E} = 0)$

نستنتج من هذا أن

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

وبهذا تكون القوة لوحدة الحجوم في الاتجاه x مساوية الى :

$$F_x = (\epsilon - \epsilon_0)\left(E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + E_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + E_z \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}(\epsilon - \epsilon_0)\frac{\partial E^2}{\partial x} \qquad (64-3)$$

وبهذا تكون محصلة القوى F مساوية الى:

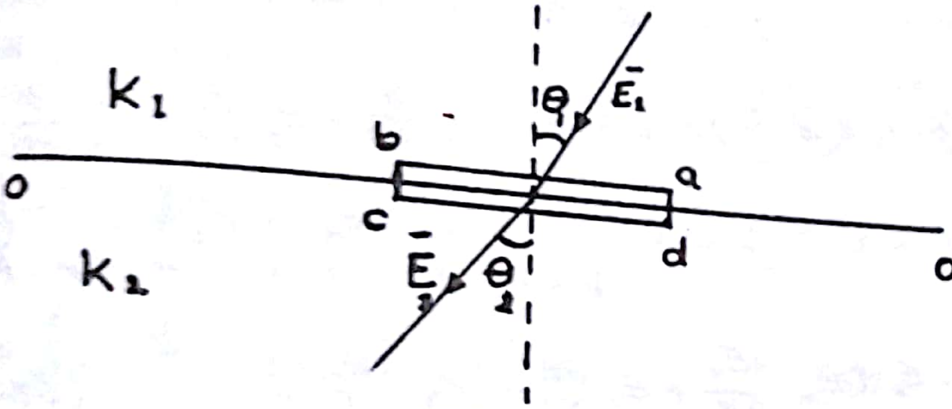
$$\bar{F} = \frac{1}{2}(\epsilon - \epsilon_0)\nabla E^2 = \left(\frac{K-1}{K}\right)\nabla\left(\frac{1}{2}\epsilon E^2\right) \qquad (65-3)$$

ونلاحظ من المعادلة الاخيرة أن الكمية المحصورة بين القوسين ما هي الا كثافة الطاقة الكهربائية في المادة العازلة كما سنجد ذلك في الفصل القادم .

(11-3) شروط الحدود الفاصلة : (حالات الحدود)

هناك عدة شروط في الحدود الفاصلة بين وسطين عازلين والتي يجب أن

تحقق لكل من الجهد الكهربائي والمجال الكهربائي والازاحة الكهربائية وهي تعتمد على ثابتي العزل K_{e1} و k_{e2} للمادتين العازلتين ولنبدأ بالمجال الكهربائي . دعنا نتأمل الشكل (11-3) ولنأخذ التكامل الخطي لشدة المجال على الطريق المغلق abcda حيث نأخذ التكامل على الخط (ab) في الوسط الاول ونرجع بالوسط الثاني على الخط dc ونهمل التكامل على كل من الطريقين ad و bc لقصرهما حيث اننا نعتبر



الشكل (11-3)

ان كلا من الخطين ab و cd واقعين على الحد الفاصل $00'$ تماما وبما أن التكامل الخطي المغلق حول هذا المسار يساوي صفرا لذلك نحصل على ما يلي :

$$\oint \bar{E}\cdot d\bar{l} = E_{t_1}\Delta l - E_{t_2}\Delta l = 0 \qquad (66\text{-}3)$$

$$E_{t_1} = E_{t_2} \qquad (67\text{-}3)$$

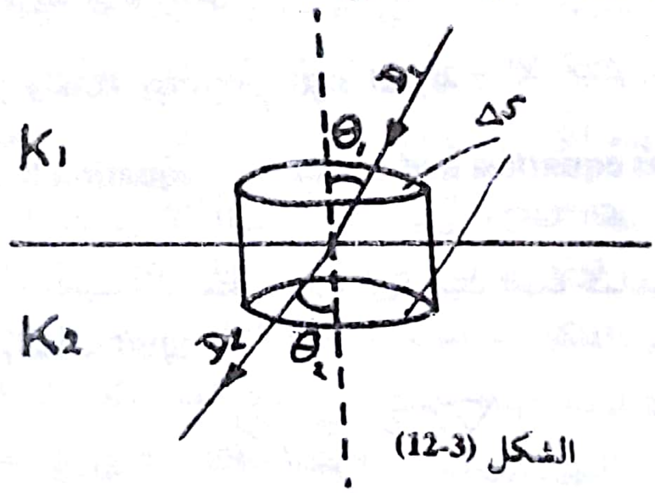
اذ ان E_{t1} و E_{t2} هما المركبتان لشدة المجال الموازيتان للسطح في الوسط الاول والثاني على التوالي و Δl يساوي طول كل من الخطين ab و cd وتكون العلاقة (67-3) هي العلاقة الاولى التي تطبق لحل المسائل الخاصة بالحدود الفاصلة بين مادتين عازلتين حيث تنص على أن المركبة الموازية للسطح الفاصل لشدة المجال تكون مستمرة في الوسطين . ويمكن الحصول على العلاقة الثانية والخاصة بالجهد على السطح الفاصل في كل من الوسطين وذلك بأن نأخذ التكامل الخطي لطرفي المعادلة (67-3) بعد ضربهما بالمقدار Δl على اعتبار ثبوت قيمة E_t للطول Δl فنحصل على :

$$\int E_{t_1} \Delta l = \int E_{t_2} \Delta l \qquad (68-3)$$

ومنها نحصل على

$$\phi_1 = \phi_2 \qquad (69-3)$$

وهذا يعني أن الجهد لنقطة واقعة على الحدود الفاصلة له نفس القيمة اذا حسبته في الوسط الاول او الوسط الثاني والعلاقة (69-3) هي العلاقة الثانية الخاصة بالحدود الفاصلة · وللحصول على العلاقة الثالثة التي تربط بين كل من $D_2 = D_1$ الازاحة الكهربائية في الوسطين الاول والثاني على التوالي نتأمل الشكل (12-3) ويمثل سطح كاوس الاسطواني حيث أن قاعدتيه تلامسان تقريبا الحد الفاصل بين المادتين العازلتين.



الشكل (12-3)

وعند تطبيق قانون كاوس على هذا السطح نحصل على :

$$\oint_s \bar{D} \cdot d\bar{S} = Q \qquad (70-3)$$

على اعتبار أن Q هي الشحنات الحرة الموجودة داخل السطح الكاوسي · وبما أن الشحنات الحرة في المواد العازلة تساوي صفرا فان المعادلة (70-3) تأخذ الشكل التالي:

$$D_{n_1} \Delta S - D_{n_2} \Delta S = 0 \qquad (71-3)$$

$$\therefore D_{n_1} = D_{n_2} \qquad (72-3)$$

اذ أن D_{n1} ، D_{n2} هما المركبتان العموديتان للازاحة الكهربائية في الوسطين العازلين الاول والثاني على التوالي والعلاقة (72-3) هي العلاقة الثالثة الخاصة بالحدود الفاصلة بين مادتين عازلتين ، والمعادلة (72-3) يمكن كتابتها بالشكل التالي :

$$\epsilon_0 K_{1e} E_{n_1} = \epsilon_0 K_{2e} E_{n_2} \qquad (73-3)$$

وبقسمة المعادلة (67-3) على المعادلة (73-3) نحصل على :

$$\frac{E_{t_1}}{K_{1e}E_{n_1}} = \frac{E_{t_2}}{K_{2e}E_{n_2}} \qquad (74-3)$$

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{K_{1e}}{K_{2e}} \qquad (75-3)$$

وهذا معناه ان الشعاع الخاص بشدة المجال يغير اتجاهه عند العبور من مادة عازلة الى أخرى حسب هذه العلاقة الاخيرة حيث أنه يبتعد عن العمود على السطح الفاصل في المادة التي يكون ثابت عزلها اكبر .

(12-3) معادلة بوازان ومعادلة لابلاس في المواد العازلة :

Poisson's equation and Laplace's equation in dielectrics

لقد وجدنا في البند الثالث من هذا الفصل العلاقة بين الازاحة الكهربائية في المادة العازلة وكثافة الشحنة الحجمية للشحنات الحرة فيها حيث انهما كما جاء في المعادلة (26-3) يرتبطان بالعلاقة التالية :

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho_f$$

فاذا كانت المادة العازلة متجانسة ، خطية ومتماثلة الخواص فان $D = \epsilon E$ حيث أن ϵ هي سماحية المادة العازلة وهي ثابتة في هذه الحالة ، وبذلك فان المعادلة (26-3) تأخذ الشكل التالي :

$$\nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon} \qquad (76-3)$$

ولكن

$$E = -\nabla\phi$$

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho_f}{\epsilon} \qquad (77-3)$$

وهذه هي معادلة بوازان في المواد العازلة حيث انها تشابه تماما العلاقة الخاصة بالفراغ مع استبدال سماحية الفراغ ϵ_0 بسماحية المادة العازلة ϵ أما اذا كانت كثافة الشحنة الحجمية للشحنات الحرة ρ_f مساوية الى الصفر فان معادلة بوازان تأخذ الشكل التالي وهي معادلة لابلاس :

$$\nabla^2\phi = 0 \qquad (78-3)$$

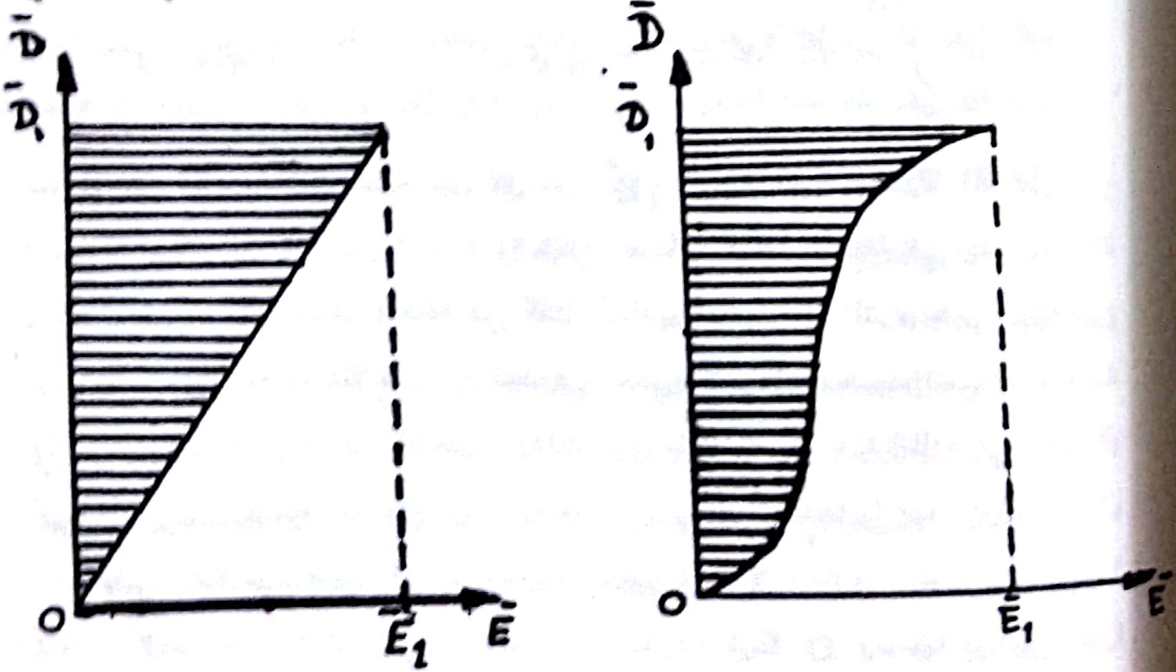
وبالرغم من وجود شحنات محتثة على سطح المادة العازلة او على السطح الفاصل

بين مادتين عازلتين الا أن هذا لا يغير من صلاحية معادلة لابلاس واستعمالها في هذه الحالة ما دامت ρ_f مساوية الى الصفر • وهذا يعني صلاحية هذه المعادلة لحلول المسائل الخاصة بالكهربائية المستقرة في المواد العازلة مع مراعاة شروط الحدود الفاصلة بين المواد العازلة التي ذكرناها في البند السابق كما سنرى عند حلنا للامثلة الخاصة لهذا الفصل •

(13-3) المواد العازلة اللاخطية متماثلة الخواص والمواد الفيروكهربائية :

Nonlinear isotropic dielectric and ferroelectric materials

المواد العازلة اللاخطية هي المواد التي تتغير فيها قابلية الاستقطاب χ وكذلك التأثرية الكهربائية χ مع تغير المجال الكهربائي الخارجي وبصورة اعتيادية نجد ان في مثل هذه المواد يكون الاستقطاب كبيرا في حالة وقوعها تحت تأثير مجال كهربائي خارجي ضعيف ولا تزداد قيمة الاستقطاب زيادة كبيرة اذا سلط عليها مجال كهربائي قوي أي أن العلاقة بين شدة المجال والاستقطاب هي ليست علاقة خطية • ومن الممكن الوصول الى حالة الاشباع وهي الحالة التي نجد فيها أن الاستقطاب لا تزداد قيمته مهما زادت شدة المجال الكهربائي الخارجي • ويمكن تـ... .. الفيروكهربائية بملاحظة الشكل (a13-3) الذي يمثل كيفية تغير قيمة الازاحة الكهربائية بمثل هذه المواد مع تغير شدة المجال الكهربائي الخارجي



(b) الشكل (13-3) (a)

E^- بينما يوضح الشكل (b.13-3) العلاقة الخطية بين كل من الازاحة الكهربائية D^- وشدة المجال الكهربائي E^- للمواد العازلة الخطية متماثلة الخواص .
ومن السهل أن نوضح أن مقدار الشغل لوحدة الحجم اللازم لتغير قيمة الازاحة الكهربائية من الصفر الى D_1 يمكن حسابه من العلاقة التالية :

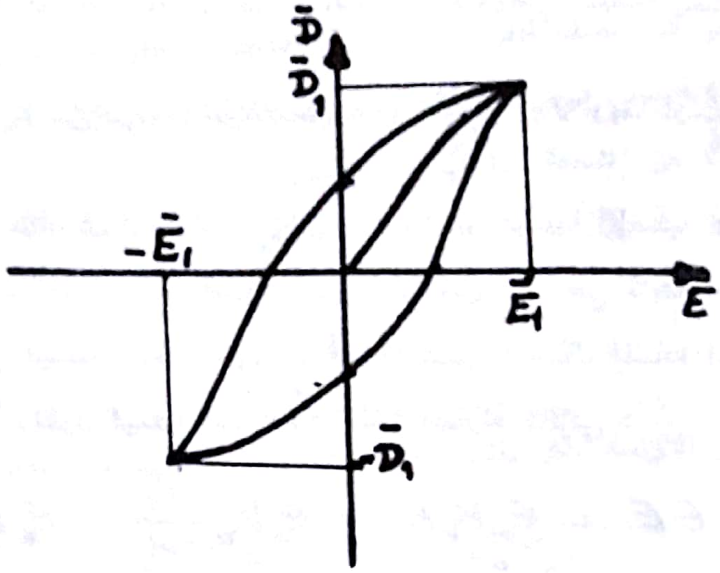
$$W = \int_0^{D_1} E\, dD \qquad (79-3)$$

ومقدار هذا الشغل هو المساحة المخططة على يسار الخط البياني من الشكل (a.13-3) للمواد العازلة اللاخطية بينما نلاحظ ان المساحة المخططة في الشكل (b-13-3) تمثل هذا الشغل بالنسبة للمواد العازلة الخطية لنفس قيمة D_1^- ، E_1^- الموضحة في الشكل (a.13-3) الخاص بالمواد العازلة اللاخطية .ونجد من هذا المثال ان كثافة الطاقة لوحدة الحجوم اللازمة لتغير مقدار الازاحة الكهربائية من الصفر الى D_1 هي اكبر في حالة المواد العازلة الخطية مما هو عليه في المواد العازلة اللاخطية . ومن البديهي بالذكر هنا أنه في حالة المواد العازلة الخطية التي تكون فيها الازاحة الكهربائية D^- مساوية الى $\epsilon \bar{E}$ فان المعادلة (79-3) تأخذ الشكل التالي :

$$W = \int_0^{E} \epsilon E\, dE = \frac{1}{2}\epsilon E^2 \qquad (80-3)$$

أما اذا لم تكن العلاقة خطية بين كل من E^- و D^- (المواد العازلة اللاخطية) فاننا لا يمكن ان نستعمل المعادلة (80-3) لحساب كثافة الطاقة في هذه الحالة والفرق في حساب كثافة الطاقة في كلتا الحالتين راجع الى القوى غير المرنة بين جزيئات المادة العازلة اللاخطية . نجد في بعض الاحيان وعند اجراء عملية الاستقطاب للمادة العازلة اللاخطية وذلك بوضع قطعة من هذه المادة في مجال كهربائي تتغير قيمته تدريجيا انما تحتفظ بقسم من استقطابها بعد زوال المجال الكهربائي الخارجي عليها أي أن الازاحة الكهربائية لا تساوي صفرا في حالة تناقص شدة المجال الكهربائي الى الصفر . ولازالة قيمة D وجعلها تساوي صفرا فاننا نحتاج الى زيادة شدة المجال مبتدئين من الصفر في الاتجاه المعاكس الى أن

تفقد المادة العازلة استقطابها . وبما أن هذه الحالة تشبه الى حد كبير تغير



الشكل (14-3)

كثافة الفيض المغناطيسي B مع تغير شدة المجال المغناطيسي للمواد الفيرومغناطيسية ك[illegible] في الفصل السابع لذلك تسمى هذه المواد العازلة التي تسلك هذا السلوك بالمواد الفيروكهربائية والشكل (14-3) يبين علاقة الازاحة الكهربائية D بالمجال الكهربائي E أو ما يسمى بحلقة التخلف أو الهسترة ومن أشهر المواد العازلة التي تسلك هذا السلوك ملح روشيل $NaK(C_4H_4O_6).4H_2O$ او تيتانات الباريوم $BaTio_3$.

(14-3) امثلة محلولة :

المثال 1 :

تاثير المادة العازلة على كل من المجال الكهربائي والازاحة الكهربائية ، فرق الجهد والسعة لمتسعة ذات لوحين متوازيين في حالتين (أ) المتسعة مشحونة ومعزولة من المصدر الكهربائي عندما تدخل المادة العازلة في المتسعة بحيث تملأها . (ب) المتسعة متصلة بالمصدر عند ادخال المادة العازلة .

الحل :-

(أ) في هذه الحالة تكون الشحنة $Q_0 = Q$ وهي ثابتة بينما تزداد قيمة السعة K_e

من المرات حيث تصبح قيمتها $C=\frac{K_e\epsilon_oA}{d}$ بينما كانت مساوية الى $C_o=\frac{\epsilon_oA}{d}$

قبل ادخال المادة العازلة وبما أن فرق الجهد بين صفيحتي المتسعة يساوي $\frac{Q}{C}$

فان قيمته تهبط k_e من المرات وتكون مساوية الى $V=\frac{V_o}{K_e}$ وبما أن $E=\frac{V}{d}$

لذلك فان شدة المجال تهبط قيمتها K_e من المرات عن قيمتها الاصلية لانقيمة V هبطت K_e من المرات وان المسافة بين الصفيحتين d هي ثابتة اما الازاحة الكهربائية فتبقى قيمتها ثابتة حيث أن قيمتها قبل ادخال المادة العازلة هي $D_o=\epsilon_oE_o$ وتكون قيمتها بعد ادخال المادة العازلة كالاتي :

$$D=\epsilon E=\epsilon_oK_eE=\epsilon_oK_e\frac{E_o}{K_e}=\epsilon_oE_o=D_o$$

(ب) أما في هذه الحالة وبما أن المتسعة لا زالت مربوطة بمصدر الشحنة عند ادخال المادة العازلة فمعنى هذا ان قيمة V تبقى ثابتة وهي V_o وتزداد قيمة السعة K_e من المرات لان $C=\frac{K_e\epsilon_oA}{d}$ وعلى هذا الاساس تكون قيمة الشحنة على كل من الصفيحتين مساوية الى $Q=CV_o=K_eC_oV_o=K_eQ_o$ حيث تزداد K_e من المرات وبما أن فرق الجهد يبقى ثابتا فان شدة المجال تبقى ثابتة حيث ان $E=\frac{V_o}{d}=E_o$ وذلك بفعل الشحنات الاضافية التي سحبت من مصدر الشحنة . أما الازاحة الكهربائية فتزداد قيمتها K_e من المرات وذلك لان

$$D=\epsilon E=K_e\epsilon_oE_o=K_eD_o$$

المثال 2

وضعت شحنة نقطية مقدارها $+Q$ داخل مادة عازلة تمتد الى اللانهاية والمطلوب حساب كل من الازاحة الكهربائية ، شدة المجال والاستقطاب داخل المادة العازلة .

الحـــل :-

سوف نعد المادة العازلة متجانسة خطية ومتماثلة الصفات في هـذا المثال

وجميع التمارين القادمة ما لم يشر الى غير ذلك . ولحل هذا المثال نرسم سطح كاوس وهو كرة نصف قطرها r حول الشحنة النقطية وبتطبيق قانون كاوس في المواد العازلة على فرض أن الازاحة الكهربائية تساوي D في اية نقطة تبعد بمسافة r عن الشحنة النقطية نحصل على :

$$\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{S} = 4\pi r^2 D = Q$$

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

وهو مقدار الازاحة الكهربائية ويكون اتجاهها باتجاه نصف القطر .

وبما أن

$$D = \epsilon E = \epsilon_0 K_e E$$

$$\therefore E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 K_e r^2}$$

$$P = (K_e - 1)\epsilon_0 E = \left(\frac{K_e - 1}{4\pi K_e r^2}\right) Q$$

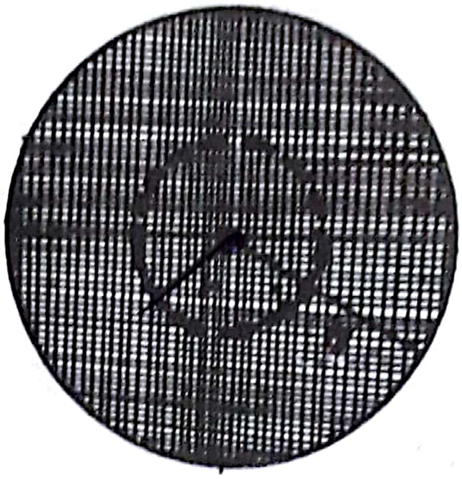
ونجد من هذا أن شدة المجال اقل بـ K_e من المرات مما هي الحالة عليه عندما تكون الشحنة النقطية في الفراغ .

المثال 3 :

وضعت شحنة نقطية مقدارها Q في مركز كرة من مادة عازلة ثابت عزلها K_e اوجد شدة المجال ، الازاحة الكهربائية والاستقطاب في أية نقطة داخل الكرة ثم أوجد كثافة الشحنة السطحية المحتثة σ_p على سطح الكرة وكثافة الشحنة الحجمية المحتثة ρ_p داخل الكرة .

الحل :

نرسم السطح الكاوسي حول الشحنة كما في الشكل (15-3) وهو عبارة عن كرة مركزها الشحنة النقطية ونصف قطرها r بحيث تكون $r < R$ ولنطبق الان قانون كاوس :



الشكل (15-3)

$$\int_S \bar{D}\cdot d\bar{s} = Q$$

$$4\pi r^2 D = Q$$

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad ، \quad \bar{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\,\bar{e}_r$$

وبما أن :

$$D = \epsilon E$$

$$E = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \quad ، \quad \bar{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2}\,\bar{e}_r$$

كما أن

$$P = \left(\frac{K_e-1}{K_e}\right)\frac{Q}{4\pi r^2}$$

ولحساب كثافة الشحنة السطحية المحتثة σ_p فانها تساوي المركبة العمودية للاستقطاب على السطح :

$$\sigma_p = (P_n)_{r=R}$$

$$\sigma_p = \frac{(K_e-1)}{K_e}\cdot\frac{Q}{4\pi R^2}$$

وهي منتظمة على سطح الكرة العازلة لتماثل ابعاد الكرة ، ولهذا فان الشحنة الكلية المحتثة على السطح هي:

$$Q_p = \frac{K_e-1}{K_e}\,Q$$

ولحساب كثافة الشحنة الحجمية المحتثة داخل الكرة ρ_p فاننا نجد وباستعمال المحاور الكروية ولان الانقطاب له مركبة واحدة فقط باتجاه نصف القطر :

$$\rho_p = -\nabla\cdot\bar{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 P) = 0$$

المثال 4 :

عندما توضع مادة عازلة في مجال كهربائي متناوب (يتغير مع الزمن) فان حركة الشحنات النقطية تعطي تيارا متناوبا يسمى بتيار الاستقطاب . استعمل قانون حفظ الشحنة لايجاد كثافة هذا التيار .

الحـــل :ـ

نتصور أن حجما ما وليكن τ محاط بسطح مغلق وليكن S . ان معدل انتقال الشحنة المحتثة خلال السطح S يساوي معدل النقصان في مقدار الشحنة المحتثة المنتقلة من الحجم τ اي أن :

$$\int_S \bar{j}_p\cdot d\bar{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \rho_p\, d\tau$$

اذ أن j_p هي كثافة تيار الاستقطاب وباستعمال مبرهنة كاوس تأخذ المعادلة السابقة الشكل التالي :

$$\int_\tau \nabla\cdot\bar{j}_p\, d\tau = \frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \nabla\cdot\bar{P}\, d\tau = \int_\tau \nabla\cdot\frac{\partial\bar{P}}{\partial t}\, d\tau$$

ومن هذا نجد ان كثافة تيار الاستقطاب

$$\bar{j}_p = \frac{\partial\bar{P}}{\partial t}$$

12

$\theta = 90$

1

المثـــال 5 :

عزم ثنائي القطب لجزيء يساوي p وكان في حالة سكون ثم ترك في مجال كهربائي منتظم شدته $\bar{E}$. ناقش حركة هذا الجزيء في المجال الكهربائي .

الحـــل :-

الطاقة الحركية البدائية للجزيء تساوي صفرا لانه كان في حالة سكون اما طاقته الكامنة فهي $U = -\bar{p}\cdot\bar{E}$ كما لاحظنا في الفصل الثاني وهي تعتمد على الزاوية θ التي يصنعها $\bar{p}$ مع اتجاه المجال $\bar{E}$. وعلى هذا الاساس يكون مجموع الطاقة :

$$W = T + U = -\bar{p}\cdot\bar{E}$$

أما القوة فان محصلتها تساوي صفرا قبل أن يدخل الجزيء في المجال الكهربائي وبعد دخوله :

$$\bar{F} = -\nabla(-\bar{p}\cdot\bar{E}) = 0$$

ولذلك فان مركز كتلة الجزيء يبقى ثابتا او متحركا بسرعة ثابتة اما العزم على ثنائي القطب :

$$\Gamma = \bar{p}\times\bar{E}$$

فانه لا يساوي صفرا الا اذا كان اتجاه $\bar{p}$ في البداية موازيا لاتجاه المجال الكهربائي ولذلك فان الجزيء يحاول أن يدور في الاتجاه الذي يكون فيه $\bar{p}$ موازيا الى $\bar{E}$ او في الاتجاه الذي تقل فيه الطاقة الكامنة U . الا أن الجزيء لا يتوقف عن حركته الدورانية هذه عندما يكون اتجاه $\bar{p}$ موازيا الى $\bar{E}$ (وضع الاتزان) ولان الطاقة الكامنة تحولت جميعها الى طاقة حركية لذلك نجد ان الجزيء يتعدى في حركته موضع الاتزان الى الجهة الاخرى الى أن يكتسب طاقة كامنة معينة وتصبح طاقته الحركية مساوية الى الصفر . ويعود مرة أخرى في حركته الدورانية حول وضع الاتزان . وتستمر هذه الحركة التي هي عبارة عن حركة توافقية بسيطة وعندما تكون الزاوية التي يتحرك فيها ثنائي القطب حول وضع الاستقرار صغيرة مع اهمال الطاقة التي يفقدها الجزيء عند اصطدامه مع الجزيئات الاخرى فان معادلة الحركة تكون :

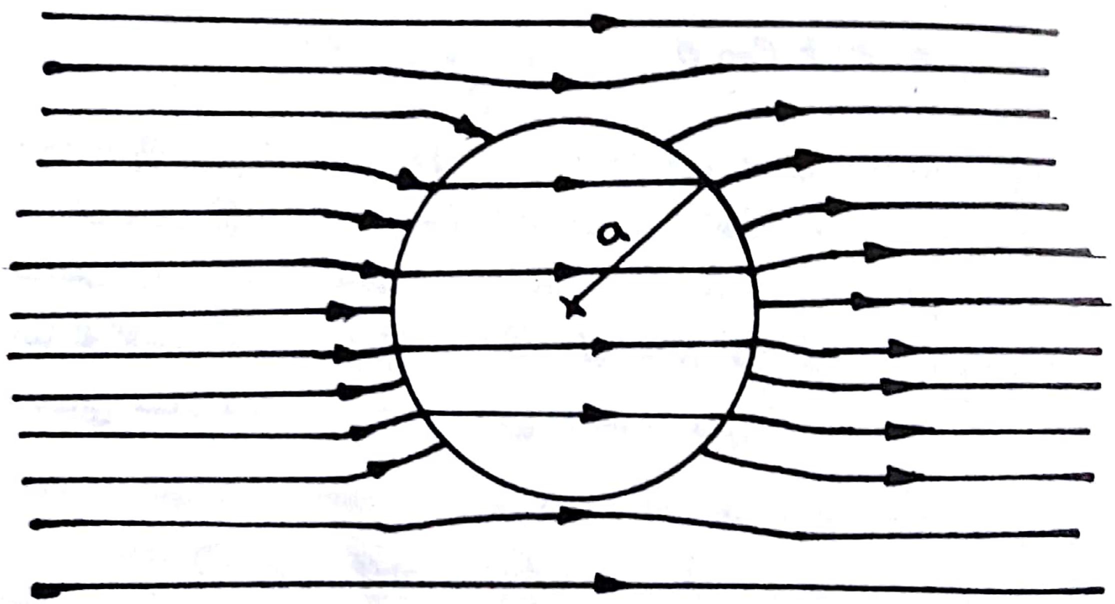
$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}=-pE\,\theta$$

وحل هذه المعادلة يعطينا دالة جيبية يكون التردد f فيها مساويا الى :

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{pE}{I}}$$

المثال (6):

اسطوانة طويلة من مادة عازلة متجانسة ومتماثلة الصفات نصف قطرها a وثابت عزلها K_e • وضعت في الفراغ داخل مجال كهربائي منتظم شدته E_0 بحيث كان اتجاهه عموديا على محور الاسطوانة • استعمل معادلة لابلاس في المحاور الاسطوانية وشروط الحدود الفاصلة لايجاد علاقات رياضية خاصة بكل من الجهد وشدة المجال خارج وداخل هذه الاسطوانة ثم قارن بين قيمة الازاحة الكهربائية داخل وخارج الاسطوانة واوجد الاستقطاب •



الشكل (16-3)

الحـل :ـ

اذا وضعت اسطوانة من مادة عازلة في مجال كهربائي منتظم فانها تحدث تشويها في هذا المجال في المنطقة التي وضعت فيها الاسطوانة والمناطق القريبة منها كما في الشكل (16-3) ولكن يأخذ المجال شكله الاصلي في النقاط البعيدة عن الاسطوانة • نفرض ان اتجاه المجال الكهربائي قبل ان توضع فيه الاسطوانة العازلة او بعد وضعها ولكن في نقاط بعيدة عنها هو الاتجاه z وعلى هذا الاساس فان

الجهد في اية نقطة خارجية بعيدة عن الاسطوانة يحسب من العلاقة التالية :

$$\phi = -E_0 Z = -E_0 r \cos\theta \qquad (1)$$

وتعتبر المعادلة 1 احدى حالات الحدود التي سوف يستفاد منها في حل هذا المثال . وفي هذا المثال لدينا وسطين الاول هو خارج الاسطوانة والثاني داخل الاسطوانة وبما أن $\cos\theta$ هو الدالة الوحيدة لـ θ التي تظهر في حالات الحدود لذا فاننا نتوقع الحل التالي للجهد في اية نقطة من النقاط خارج الاسطوانة باستعمال التوافقيات الاسطوانية :

$$\phi_0 = A_1 r \cos\theta + \frac{B_1}{r} \cos\theta \qquad (2)$$

أما داخل الاسطوانة فلا يمكن أن نفرض غير الحل :

$$\phi_i = A_2 r \cos\theta \qquad (3)$$

ونجد من المعادلة (3) انها لا تحتوي على حد يحتوي على r في مقامه وذلك لان هذا الفرض يجعل ϕ في مركز الاسطوانة مساويا الى اللانهاية وهذا غير ممكن والان لنناقش شروط الحدود الفاصلة بين الوسطين الاول وهو الفراغ والثاني وهو المادة العازلة للاسطوانة لكي نتمكن من ايجاد قيمة كل من الثوابت . A_2, B_1, A_1 وبالتالي حساب قيمة الجهد داخل وخارج الاسطوانة وهي :

(1) ان الجهد في النقاط البعيدة عن الاسطوانة $r = \infty$ يحسب من العلاقة (1) وهي $\phi_0 = -E_0 r \cos\theta$

(2) ان قيمة الجهد في الخارج تساوي قيمة الجهد في الداخل على السطح الفاصل أي عندما تكون $[r = a]$:

$$\left(\phi_i = \phi_0\right)_{r=a}$$

(3) ان المركبة العمودية للازاحة الكهربائية على الحدود الفاصلة (سطح الاسطوانة) للوسط الاول تساوي مثيلتها للوسط الثاني $(D_{n_1} = D_{n_2})_{r=a}$

والان لنبدأ باستعمال شروط الحدود الفاصلة في المعادلتين (1,2)

اولا :ـ عندما يقترب r من ∞ ($r \to \infty$) نحصل من المعادلتين (1,2) على:

$$\phi_o = -E_o r \cos\theta = A_1 r \cos\theta$$

وهذا يعني أن:

$$A_1 = -E_o \qquad (4)$$

ولذلك فان المعادلة (2) تاخذ الشكل التالي :

$$\phi_o = -E_o r \cos\theta + \frac{B_1}{r^2}\cos\theta$$

ثانيا :ـ عندما تكون r=a فان

$$\phi_o = \phi_i$$

$$-E_o a \cos\theta + \frac{B_1}{a^2}\cos\theta = A_2 a \cos\theta \qquad (5)$$

$$-E_o + \frac{B_1}{a^3} = A_2$$

وان :

$$\left(D_{n_1} = D_{n_2}\right)_{r=a}$$

اي أن:

$$\left(\epsilon_o \frac{\partial \phi_o}{\partial r} = \epsilon_o K_e \frac{\partial \phi_i}{\partial r}\right)_{r=a}$$

$$-E_o \cos\theta - \frac{2B_1}{a^3}\cos\theta = K_e A_2 \cos\theta \qquad (6)$$

ومن المعادلتين (6,5) نجد أن:

$$A_2 = \frac{-3}{K_e+1} E_o \qquad (7)$$

وعند تعويض هذه القيمة لـ A_2 في المعادلة (5) نجد أن :

$$B_1 = a^3\left(E_o - \frac{3E_o}{K_e+1}\right)$$

$$B_1 = a^3\left(\frac{K_e-1}{K_e+1}\right)E_o \qquad (8)$$

وبتعويض قيمة كل من A_2, B_1, A_1 من المعادلات 8,7,4 في العلاقتين 3,2 نحصل على :

$$\phi_o = -E_o r \cos\theta + \frac{a^2}{r}\left(\frac{K_e-1}{K_e+1}\right)E_o \cos\theta$$

$$= -\left(1 - \frac{K_e-1}{K_e+1}\frac{a^2}{r^2}\right)E_o r \cos\theta \qquad (9)$$

$$\phi_i = -\frac{2}{K_e+1} E_o r \cos\theta \qquad (10)$$

أما شدة المجال في أي نقطة خارج الكرة :

$$E_r = -\frac{\partial \phi_o}{\partial r} = E_o r \cos\theta - \frac{a^2}{r^2}\left(\frac{K_e-1}{K_e+1}\right)E_o \cos\theta$$

$$= \left[1 - \frac{a^2}{r^2}\left(\frac{K_e-1}{K_e+1}\right)\right]E_o \cos\theta \qquad (11)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \phi_o}{\partial \theta} = -E_o \sin\theta + \frac{a^2}{r^2}\left(\frac{K_e-1}{K_e+1}\right)E_o \sin\theta$$

$$= -\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\left(\frac{K_e-1}{K_e+1}\right)\right)E_o \sin\theta \qquad (12)$$

ومن تماثل الاسطوانة فاننا نجد أن شدة المجال داخلها يكون باتجاه (z) وعلى هذا الاساس فان المعادلة (10) تكتب على الشكل التالي :

$$\phi_i = -\frac{2}{K_e+1} E_o z \qquad (13)$$

ولاستخراج العلاقة الخاصة بشدة المجال داخل الاسطوانة نجد ان

$$E_i = -\frac{\partial \phi_i}{\partial z} = \frac{2}{K_e+1} E_o \qquad (14)$$

نجد من هذه العلاقة ان شدة المجال داخل الاسطوانة هي منتظمة ولا تعتمد قيمتها على كل من θ, r بل تعتمد على ثابت العزل K_e كما انها أصغر من شدة المجال E_0 وذلك بسبب الشحنات المحتثة على سطح الاسطوانة.

ولقياس الازاحة الكهربائية داخل الاسطوانة تستعمل العلاقة $D = \epsilon E$

$$D_i = \epsilon E_i = \frac{2K_e}{K_e+1}\epsilon_o E_o = \frac{2K_e}{K_e+1} D_o \qquad (15)$$

وبما ان $\frac{2K_e}{K_e+1} \geqslant 1$ اذ تصح المساواة في حالة الفراغ لذلك فان الازاحة

الكهربائية داخل الاسطوانة تكون دائما اكبر مما كانت عليه في الحيز الذي شغلته قبل وضعها داخل المجال الكهربائي ولحساب الاستقطاب فاننا نستعمل العلاقة :

$$P = \frac{K_e-1}{K_e} D_1 = (K_e-1)\,\epsilon_0 E_1$$

$$P = \frac{2(K_e-1)}{(K_e+1)}\,\epsilon_0 E_0 \qquad (16)$$

واذا أردنا فحص العلاقات (16,15,14) عند ابعاد الاسطوانة العازلة ويتم ذلك بالتعويض عن قيمة K_e بالمقدار واحد نجد أن :

$$E_1 = E_0 \qquad (17)$$

$$D_1 = \epsilon_0 E_0 = D_0 \quad \text{-----} \quad (18)$$

$$P = 0 \quad \text{-----} \quad (19)$$

وهذه العلاقات صحيحة لكل من شدة المجال والازاحة والاستقطاب في الفراغ عند عدم وجود الاسطوانة العازلة ٠

اسئلة وتمارين

(1) هل تستقطب المواد العازلة بتأثير مجال كهربائي خارجي وما هي أنواع الاستقطاب وكيف يحدث كل منها ؟

(2) ما المقصود بالمصطلحين متجانس ومتماثل الصفات بالنسبة للمواد العازلة ؟

(3) ما الفرق بين الشحنات الحرة والشحنات المستقطبة ؟ وضح ذلك ٠

(4) ما المقصود بشروط الحدود الفاصلة وما هي تلك الشروط بالنسبة لكل من المجال الكهربائي والازاحة الكهربائية ؟

(5) في حالة استقطاب مادة عازلة لاخطية عند وضعها في مجال كهربائي خارجي تتغير شدة المجال الكهربائي تدريجيا وببطء علل ذلك ٠

(6) كرة من مادة عازلة نصف قطرها a فيها الاستقطاب $\bar{P}$ بالاتجاه z احسب مقدار الشحنات المستقطبة الكلية في النصف العلوي من هذه الكرة ثم الكرة بأجمعها ٠

(7) اذا علمت أن عدد ثنائيات القطب لوحدة الحجوم لغاز ما يتغير مع الارتفاع حسب العلاقة التالية :

$$N = N_0\, e^{-Wz/kT}$$

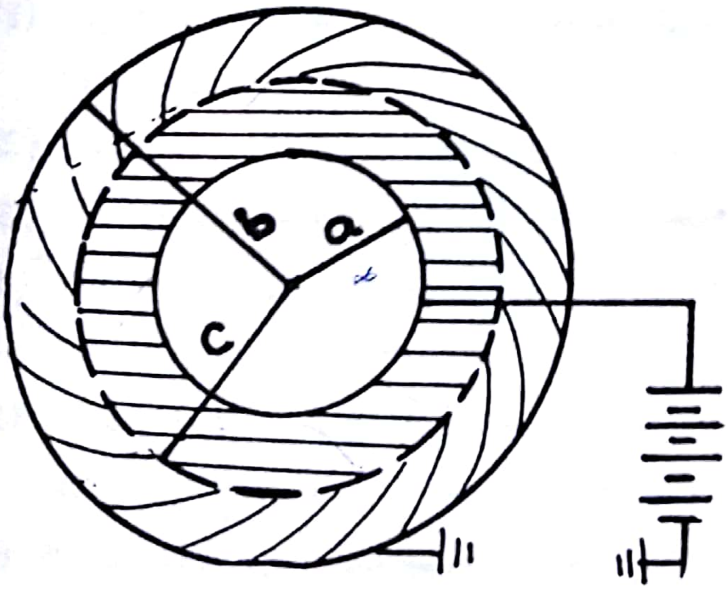
اذ أن w هي الوزن الجزيئي و K هو ثابت بولتزمان و T درجة الحرارة المطلقة للغاز أوجد كلا من $\nabla\cdot P^{-}$ ، $\nabla x p$ اذا علمت ان $P^{-} = \alpha E$ وان α مقدار ثابت في حالتين (أ) اذا كانت شدة المجال الكهربائي $E^{-} = i^{-} E_x$

(ب) اذا كانت شدة المجال الكهربائي $E^{-} = k^{-} E_z$

(8) متجه ما يعرف بواسطة دواره (curl) وبتباعده (div) فاذا كان $P^{-} = Np^{-}$ اذ أن كلا من p^{-}, N يعتمدان على الاحداثيات z, y, x فاوجد $\nabla \cdot \bar{P}$ ، $\nabla \times \bar{P}$.

(9) سلك على شكل اسطوانة من مادة موصلة طويل جدا نصف قطره a مشحون، مقدار الشحنة لوحدة الطول فيه تساوي λ وضع في وسط عازل ثابت عزله K_e اوجد شدة المجال في أية نقطة خارج السلك $(r > a)$.

(10) مادة عازلة ثابت عزلها K_e فيها تجويف كروي نصف قطره R وضعت شحنة مقدارها $+Q$ في مركز هذا التجويف . احسب (1) مقدار الشحنة المستقطبة على سطح التجويف الكروي . (2) شدة المجال الكهربائي ومتجه الازاحة في (أ) نقطة $r > R$ (ب) نقطة $r < R$. (3) الاستقطاب داخل المادة العازلة .



الشكل (3-17)

(11) متسعة كروية الشكل صنعت من كرتين متحدتي المركز نصف قطر

الداخلية a والخارجية b فاذا ملىء الفراغ بين الكرتين بمادتين عازلتين ثابت عزل الاولى K_{e1} والثانية K_{e2} كما في الشكل (3-17) . اوجد الجهد والاستقطاب لنقطتين الاولى واقعة في المادة العازلة الاولى والثانية في المادة العازلة الثانية .

(12) اسطوانة من مادة موصلة نصف قطرها a مشحونة كثافة الشحنة لوحدة الطول عليها تساوي λ وضعت في وسط عازل ثابت عزله K_e . اوجد كلا من الاستقطاب P كثافة الشحنة الحجمية للشحنات المستقطبة في المادة العازلة ρ_p وكثافة الشحنة السطحية للشحنات المستقطبة σ_p في اية نقطة داخل المادة العازلة .

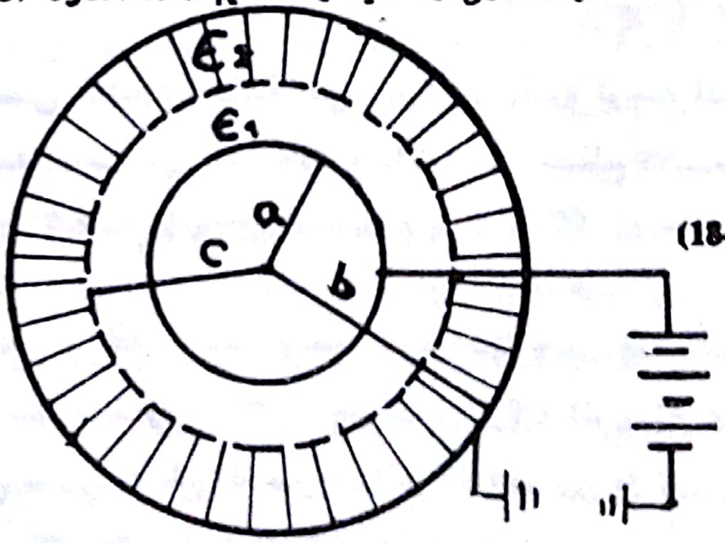
(13) احسب السعة لوحدة الطول لاسطوانتين موصلتين متحدتي المحور نصف قطر الاسطوانة الداخلية (a) والخارجية (b) مع العلم أن الحيز بين الاسطوانتين هو الفراغ .

(14) في التمرين السابق اذا ملىء الفراغ بين الاسطوانتين بمادتين عازلتين سماحية الاولى ϵ_1 والثانية ϵ_2 كما في الشكل (3-18) احسب السعة لوحدة الطول لهذا النظام.

الجواب :

$$C_l = \frac{2\pi}{\frac{1}{\epsilon_1}\ln\frac{c}{a} + \frac{1}{\epsilon_2}\ln\frac{b}{c}}$$

(15) في التمرين السابق احسب الجهد ، شدة المجال والاستقطاب في نقطتين الاولى واقعة في المادة العازلة الاولى والثانية واقعة في المادة العازلة الثانية .



الشكل (3-18)

16 كرة من مادة عازلة نصف قطرها (a) وثابت عزلها K_e وضعت في مجـــال

كهربائي منتظم شدته E_0 وهو بالاتجاه z (أ) اوجد الجهد الكهربائي وشدة المجال داخل وخارج الكرة (ب) أثبت أن شدة المجال لنقطة خارج الكرة مشابه لشدة المجال الخاص بثنائي قطب كهربائي موجود في مركز الكرة (جـ) ما هو عزم ثنائي القطب المكافيء لهذه الكرة ·

(17) كرة من مادة عازلة ثابت عزلها K_e ونصف قطرها a تحتوي على شحنات في داخلها فاذا كانت كثافة الشحنة الحجمية تساوي ρ أثبت أن الجهد في مركز هذه الكرة هو :

$$\phi = \frac{2K_e+1}{2K_e}\,\frac{\rho a^2}{3\epsilon_0}$$

(18) اذا مليء الفراغ بين اسطوانتين موصلتين متحدتي المحور بمادة عازلة (أ) كيف يجب أن تتغير قيمة ثابت العزل K_e بالنسبة الى r البعد عن المحور المشترك لكي لا تعتمد شدة المجال E على البعد r (ب) ما هي كثافة الشحنات الحجمية المحتثة ·

(19) اسطوانتان موصلتان متحدتا المحور نصف قطر الداخلية R_1 ونصف قطر الخارجية R_2 فرق الجهد بينهما ϕ مليء الفراغ بين الاسطوانتين بمادة عازلة ثابت عزلها K_e اثبت ان القوة لوحدة الحجوم المسلطة على المادة العازلة في أية نقطة بين الاسطوانتين :

$$F = -\frac{\epsilon_0 (K_e-1)\,\phi^2}{\ln^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right) r^3}$$

ما معنى الاشارة السالبة التي ظهرت في القوة لوحدة الحجم · احسب القوة لوحدة الحجم على المادة العازلة بالقرب من سطح الاسطوانة الداخلية اذا كانت $K_e = 2.5$ ، $R_1 = 1\,cm$ ، $R_2 = 5\,cm$ ·

(20) مادتان عازلتان وصلتا بسطح مستو فاذا شحن هذا السطح المشترك بشحنة كثافتها السطحية σ هل تتغير المركبة العمودية للازاحة الكهربائية D على جانبي السطح الفاصل ؟ ما هي العلاقة بين المركبتين العموديتين للازاحة الكهربائية D على جانبي السطح الفاصل في هذه الحالة ؟

(21) شحنت كرة موصلة نصف قطرها a بشحنة مقدارها Q وهي محاطة بغلاف كروي عازل نصف قطره الداخلي a والخارجي b وثابت عزله K_e أوجد كلا من الازاحة الكهربائية D وشدة المجال الكهربائي E ، الاستقطاب P والجهد ϕ في كل من النقاط الاربعة التالية (أ) في نقطة داخل المادة العازلة $r=a$ (ب) في نقطة داخل المادة العازلة مباشرة $r=b$ (جـ) في نقطة خارج المادة العازلة مباشرة $r=b$ (د) في نقطة خارج المادة العازلة بعيدة عن مركز الكرة $r>b$.

(22) في السؤال السابق احسب كثافة الشحنة السطحية المحتثة على كل من السطحين الداخلي والخارجي للغلاف العازل .

(23) اذا كان معامل العزل في السؤال (20) يتغير حسب العلاقة $K_e=4e^{-(\frac{r}{a}-1)^2}$

(أ) احسب كلا من الازاحة الكهربائية D والاستقطاب P ، شدة المجال E وكثافة الشحنة الحجمية المحتثة ρ في أي نقطة داخل المادة العازلة .

(ب) احسب الشحنة المحتثة الكلية داخل المادة العازلة اذا كان $b=2a$.

(24) احسب قيمة الكثافة السطحية للشحنة المحتثة σ_p على سطح الاسطوانة العازلة في المثال (6) وعلى سطح الكرة العازلة في التمرين (16) من هذا الفصل ثم قارن قيمتها بالنسبة للشحنة المحتثة على كل من الاسطوانة الموصلة والكرة الموصلة عندما تقترب قيمة K_e من اللانهاية .

(25) في المثال (6) والتمرين (16) من هذا الفصل والخاصة بالاسطوانة العازلة والكرة العازلة احسب قيمة كل من E و D, داخل المادة العازلة ثم E خارج المادة العازلة عندما تقترب قيمة K_e من اللانهاية . قارن هذه النتائج مع النتائج الخاصة بالاسطوانة الموصلة والكرة الموصلة ماذا تجد ؟ .

(26) من العلاقتين $D_i=\epsilon_0 E_i+P$ ، $D_i=D_0$ لسطح عمودي على اتجاه

شدة المجال E_0 نحصل على العلاقة $\epsilon_0 E_0 = \epsilon_0 E_i + P$

او أن $E_i = E_0 - \frac{P}{\epsilon_0}$ ويسمى المقدار P/ϵ_0 المجال مزيل الاستقطاب

أوجد قيمة هذا المجال لقضيب من مادة عازلة وضع في مجال منتظم E_0

بحيث كان موازيا لاتجاه المجال .

(27) اذا كان E_1 D_1 شدة المجال الكهربائي والازاحة الكهربائية في الوسط العازل الاول يصنعان الزاوية Θ_1 مع العمود على السطح الفاصل بين مادتين عازلتين معامل عزل الاولى K_{e1} والثانية K_{e2} اوجد الزاوية Θ_2 وعلاقتها بالزاوية Θ_1 التي يصنعها كلا من شدة المجال الكهربائي E_2 والازاحة الكهربائية D_2 في الوسط العازل الثاني مع العمود على السطح الفاصل بين المادتين العازلتين .

(28) كرة موصلة نصف قطرها a تحمل شحنة مقدارها Q احيطت بمادة عازلة معامل عزلها K_e يتغير مع r حسب العلاقة $K_e = K_0 \frac{r}{a}$ اوجد كلا من شدة المجال E والازاحة الكهربائية D والاستقطاب P في نقطة داخل المادة العازلة . هل ان شدة المجال الكهربائي E والازاحة الكهربائية D تنخفض بنفس الطريقة مع المسافة r ؟

(29) صنعت فجوة أسطوانية الشكل نصف قطرها a داخل مادة عازلة تمتد ابعادها الى اللانهاية فيها مجال كهربائي منتظم شدته E_0 بالاتجاه z بحيث كان محور الفجوة الاسطوانية عموديا على اتجاه شدة المجال ، اوجد الجهد ϕ وشدة المجال E داخل وخارج الفجوة الاسطوانية . أحسب الاستقطاب خارج الفجوة الاسطوانية .

(30) في المثال (29) اذا كانت الفجوة كروية الشكل نصف قطرها a أحسب مقدار الجهد ϕ وشدة المجال داخل وخارج الفجوة الكروية ثم احسب الاستقطاب داخل المادة العازلة .

(31) غلاف كروي نصف قطره الداخلي a والخارجي $2a$ مشحون كثافة شحنته الحجمية الكلية $\rho_t = c\left(r - \frac{3a}{4}\right)$ بعيدا عن تأثير اية شحنة اخرى احسب (أ) شدة المجال E كدالة لـ r من $r=a$ الى $r=2a$

(ب) الجهد كدالة لـ r من $r=2a$ الى $r=\infty$.

(32) ملىء الفراغ بين كرتين موصلتين متحدتي المركز بمادة عازلة سماحيتها تتغير حسب العلاقة $\epsilon = \epsilon_0 r/a$ فاذا علمت ان الكرة الداخلية شحنت بشحنة مقدارها Q وان نصف قطر هذه الكرة يساوي a ونصف قطر الكرة الخارجية يساوي b احسب (أ) الازاحة الكهربائية D في المادة العازلة (ب) كثافة الشحنة المحتثة السطحية σ_p عندما تكون $r=a$ وعندما تكون $r=b$ (جـ) كثافة الشحنة الحجمية المحتثة ρ_p في المادة العازلة .

(33) حل السؤال (32) اذا كانت سماحية المادة العازلة تتغير مع r حسب العلاقة : $\epsilon = \epsilon_0 b/r$.

(34) كرتان موصلتان متحدتا المركز نصف قطر الفراغ الداخلي لهما يساوي a والخارجي يساوي b صب من فتحة صغيرة في أعلى الكرة الخارجية مادة زيتية عازلة معامل عزلها K_e بحيث ملأت نصف الفراغ بينهما فاذا كان الجهد على الكرة الداخلية يساوي ϕ والخارجية ربطت بالارض فاحسب :-

(أ) شدة المجال E في الزيت وفي الهواء بين الكرتين (ب) كثافة الشحنة السطحية على السطح الخارجي للكرة الداخلية في المنطقة التي تلامس بها الهواء وفي المنطقة التي تلامس بها الزيت . (جـ) الشحنة الكلية Q على الكرة الداخلية (د) سعة المتسعة هذه .