(5-3) الازاحة الكهربائية

باستعمال مبرهنة كاوس يمكن كتابة قانون كاوس بالشكل التالي :

$$\nabla\cdot\bar{E} = \frac{\rho_t}{\epsilon_\circ} \qquad (21-3)$$

وفي هذه العلاقة تعني ρ_t كثافة الشحنة لكل أنواع الشحنات حرة كانت أو مقيدة ففي حالة تطبيق هذه العلاقة في الفراغ فان ρ_t تعني كثافة الشحنة في الفراغ ولكن عند استعمالها في وسط عازل فلا بد من أن نأخذ بنظر الاعتبار كثافة الشحنة المقيدة ρ_p والتي تنشأ بسبب استقطاب المادة العازلة وعلى هذا الاساس فـــان كثافة الشحنة في هذه الحالة تكون مجموع كثافة الشحنة الحرة وكثافة الشحنة المقيدة $\rho_t = \rho_f + \rho_p$ ولذلك فان المعادلة (21-3) للمواد العازلة تأخذ الشكل التالي :

$$\nabla\cdot\bar{E} = \frac{1}{\epsilon_\circ}(\rho_f + \rho_p) \qquad (22-3)$$

وهذه المعادلة تمثل قانون كاوس بصيغته العامة ، وأن $\bar{E}$ هي شدة المجال داخـــل المادة العازلة كما انها تمثل احدى معادلات ماكسويل كما سنرى مستقبلا على اعتبار أن كثافة الشحنة الكلية في ذلك الحين تساوي $\rho_f + \rho_p$ وبما أن $\bar{E} = -\nabla\phi$ فأن

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho_t}{\epsilon_\circ} \qquad (23-3)$$

وهذه الصيغة تمثل معادلة بوازن في المواد العازلة .

وباستعمال العلاقة (12-3) في المعادلة (22-3) نحصل على

$$\nabla\cdot\bar{E} = \frac{1}{\epsilon_\circ}\rho_f - \frac{1}{\epsilon_\circ}\nabla\cdot\bar{P}$$

$$\nabla\cdot(\epsilon_\circ\bar{E} + \bar{P}) = \rho_f \qquad (24-3)$$

فاذا فرضنا أن

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P} \qquad (25-3)$$

تأخذ المعادلة (23-3) الشكل التالي :

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho_f \qquad (26-3)$$

ويسمى المتجه $\bar{D}$ بالازاحة الكهربائية والوحدة التي يقاس بها في النظام العالمي للوحدات هي وحدات كثافة الشحنة السطحية c/m^2 نفسها ، وبصورة عامة فان قانون كاوس في المواد العازلة باستعمال مصطلح الازاحة الكهربائية يأخذ الشكل التالي :

$$\int_s \bar{D} \cdot d\bar{s} = \int_\tau \rho_f \, d\tau \qquad (27-3)$$

وتعني المعادلة الاخيرة أن فيض الازاحة الكهربائية خلال سطح مغلق يساوي التكامل الحجمي الذي يحتوي ذلك السطح للكثافة الحجمية للمشحنات الحرة في ذلك الحجم . ومما سبق فاننا نستنتج أن شدة المجال الكهربائي داخل مادة عازلة هي:

$$\bar{E} = \frac{\bar{D}}{\epsilon_0} - \frac{\bar{P}}{\epsilon} \qquad (28-3)$$

(6-3) التأثرية الكهربائية وثابت العزل الكهربائى

لقد لاحظنا في البند السابق وكما هو واضح من المعادلتين (25-3) و (28-3) علاقة كل من $\bar{E}$ ،$\bar{P}$ و $\bar{D}$ ببعضها البعض ولقد لوحظ عمليا اعتماد كثافة الشحنة السطحية المحتثة σ_p وكذلك كثافة الشحنة الحجمية ρ_p على شدة المجال داخل المادة العازلة وبعبارة أخرى فأن الاستقطاب P يعتمد على شدة المجال $\bar{E}$ داخل المادة العازلة .

وبالرغم من أن هذه العلاقة هي ليست خطية لكثير من المواد وبصورة خاصة اذا كانت شدة المجال الكهربائي عالية جدا حتى أن لبعض المواد ذات التركيب البلوري يكون كل من الاستقطاب وشدة المجال في اتجاهين متعاكسين ولكن بصورة عامة وفي الحالات الاعتيادية التي لا تكون فيها قيمة $\bar{E}$ عالية جدا يمكن كتابة العلاقة التالية

$$\bar{P} = \chi(\epsilon_\circ \bar{E}) \qquad (29-3)$$

اذ أن χ معامل عددي يسمى التأثرية الكهربائية وبهذا تأخذ المعادلة (25-3) الشكل التالي :

$$\bar{D} = \epsilon_\circ \bar{E} + \chi \epsilon_\circ \bar{E} = (1+\chi)\epsilon_\circ \bar{E}$$

واذا عوضنا عن $(1+\chi)$ بالمقدار K_e فان :

$$D = K_e \epsilon_\circ \bar{E} \qquad (30-3)$$

ويسمى المعامل العددي K_e بثابت العزل وهو عدد مجرد. واذا عوضنا عن المقدار χ بالمقدار (K_e-1) فان :

$$\bar{P} = (K_e-1)\epsilon_\circ \bar{E} \qquad (31-3)$$

كما أن المعادلة (30-3) تأخذ الشكل التالي :

$$\bar{D} = \epsilon \bar{E} \qquad (32-3)$$

على اعتبار أن $\epsilon = K_e \epsilon_\circ$ ويسمى المعامل ϵ بسماحية المادة العازلة ووحدة قياسه هي نفس وحدة قياس المعامل $\epsilon_\circ$.

(7-3) معادلة كلاوسيوس – موسوتي

وهي معادلة توضح العلاقة بين قابلية الاستقطاب الجزيئي وثابت العزل وعدد الجزيئات في وحدة الحجوم للمادة العازلة وتعطى بالصيغة الرياضية التالية:

$$\alpha = \frac{3\epsilon_o}{N}\left(\frac{K_e - 1}{K_e + 2}\right)$$

حيث ان :

α : معامل يعرف بقابلية الاستقطاب

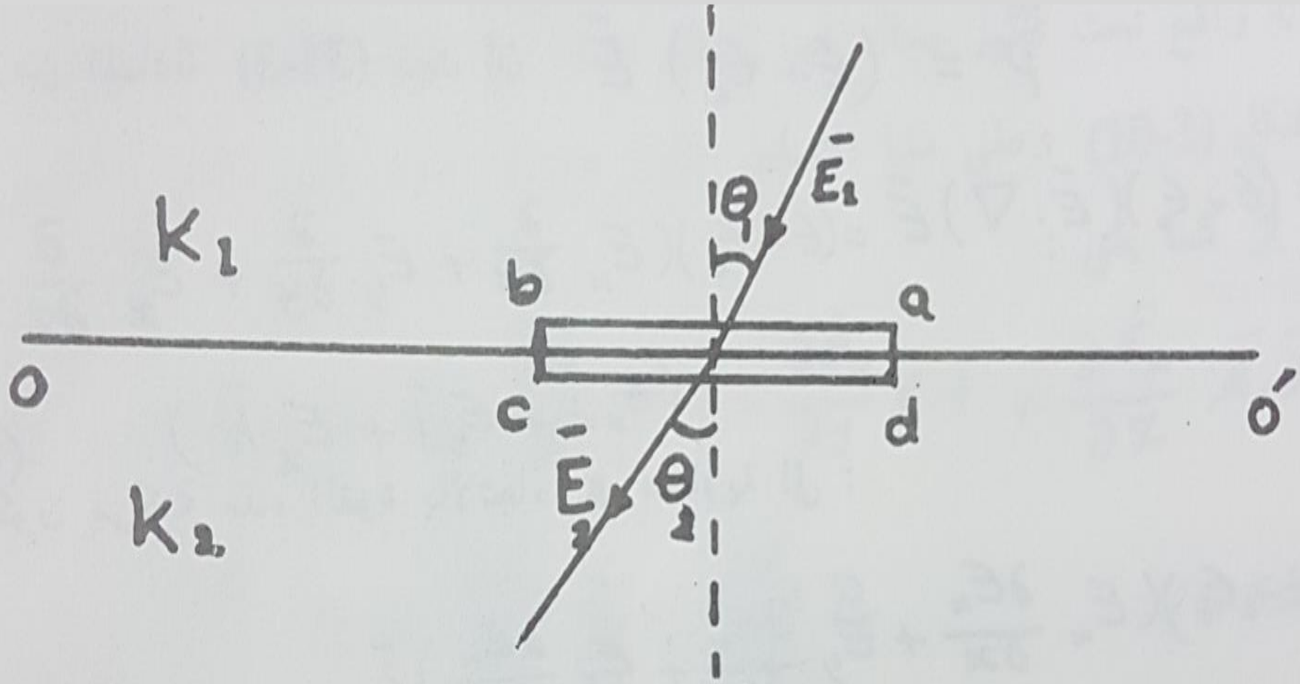
ϵ_o : سماحية الفراغ

N : عدد الجزيئات في وحدة الحجوم للمادة العازلة

K_e : ثابت عزل المادة العازلة

(8-3) شروط الحدود الفاصلة بين وسطين

هناك عدة شروط في الحدود الفاصلة بين وسطين عازلين والتي يجب أن تحقق لكل من الجهد الكهربائي والمجال الكهربائي والازاحة الكهربائية وهي تعتمد على ثابتي العزل k_{e2} و K_{e1} للمادتين العازلتين ولنبدأ بالمجال الكهربائي . دعنا نتأمل الشكل (11-3) ولنأخذ التكامل الخطي لشدة المجال على الطريق المغلق abcda حيث نأخذ التكامل على الخط (ab) في الوسط الاول ونرجع بالوسط الثاني على الخط dc ونهمل التكامل على كل من الطريقين ad و bc لقصرهما حيث اننا نعتبر



الشكل (3-11)

ان كلا من الخطين ab و cd واقعين على الحد الفاصل OO' تماما وبما أن التكامل الخطي المغلق حول هذا المسار يساوي صفرا لذلك نحصل على ما يلي :

$$\oint \bar{E}\cdot d\bar{l} = E_{t_1}\Delta l - E_{t_2}\Delta l = 0 \qquad (66\text{-}3)$$

$$E_{t_1} = E_{t_2} \qquad (67\text{-}3)$$

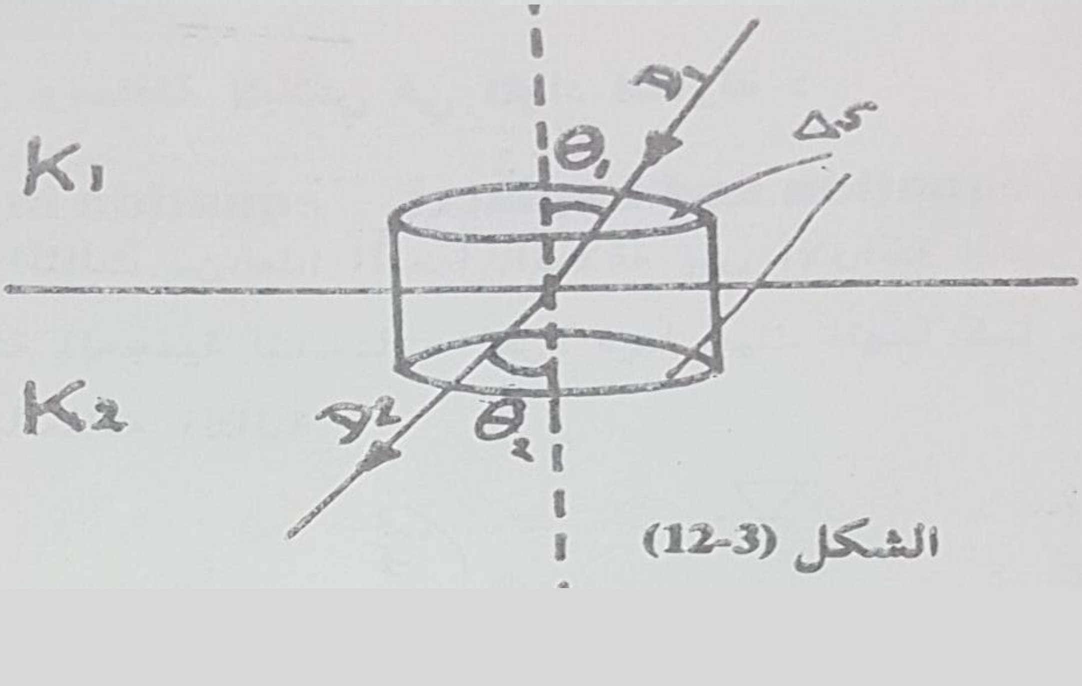
اذ أن E_{t1} و E_{t2} هما المركبتان لشدة المجال الموازيتان للسطح في الوسط الاول والثاني على التوالي و Δl يساوي طول كل من الخطين ab و cd وتكون العلاقة (3-67) هي العلاقة الاولى التي تطبق لحل المسائل الخاصة بالحدود الفاصلة بين مادتين عازلتين حيث تنص على أن المركبة الموازية للسطح الفاصل لشدة المجال تكون مستمرة في الوسطين • ويمكن الحصول على العلاقة الثانية والخاصة بالجهد على السطح الفاصل في كل من الوسطين وذلك بأن نأخذ التكامل الخطي لطرفي المعادلة (3-67) بعد ضربهما بالمقدار Δl على اعتبار ثبوت قيمة E_t للطول Δl فنحصل على :

$$\int E_{t_1} \Delta l = \int E_{t_2} \Delta l \qquad (68-3)$$

ومنها نحصل على $\quad (69-3)$

$$\phi_1 = \phi_2$$

وهذا يعني أن الجهد لنقطة واقعة على الحدود الفاصلة له نفس القيمة اذا حسبت قيمته في الوسط الاول او الوسط الثاني والعلاقة (69-3) هي العلاقة الثانية الخاصة بالحدود الفاصلة . وللحصول على العلاقة الثالثة التي تربط بين كل من $D_2 = D_1$ الازاحة الكهربائية في الوسطين الاول والثاني على التوالي نتأمل الشكل (12-3) ويمثل سطح كاوس الاسطواني حيث أن قاعدتيه تلامسان تقريبا الحد الفاصل بين المادتين العازلتين.



الشكل (12-3)

وعند تطبيق قانون كاوس على هذا السطح نحصل على :

$$\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{S} = Q \qquad (70-3)$$

على اعتبار أن Q هي الشحنات الحرة الموجودة داخل السطح الكاوسي . وبما أن الشحنات الحرة في المواد العازلة تساوي صفرا فان المعادلة (70-3) تأخذ الشكل التالي:

$$D_{n_1} \Delta S - D_{n_2} \Delta S = 0 \qquad (71-3)$$

$$\therefore D_{n_1} = D_{n_2} \qquad (72-3)$$

اذ ان D_{n1} ، D_{n2} هما المركبتان العموديتان للازاحة الكهربائية في الوسطين العازلين الاول والثاني على التوالي والعلاقة (72-3) هي العلاقة الثالثة الخاصة بالحدود الفاصلة بين مادتين عازلتين ، والمعادلة (72-3) يمكن كتابتها بالشكل التالي :

$$\epsilon_0 K_{1e} E_{n_1} = \epsilon_0 K_{2e} E_{n_2} \qquad (73-3)$$

وبقسمة المعادلة (3-67) على المعادلة (3-73) نحصل على :

$$\frac{E_{t_1}}{K_{1e}E_{n_1}} = \frac{E_{t_2}}{K_{2e}E_{n_2}} \qquad (74-3)$$

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{K_{1e}}{K_{2e}} \qquad (75-3)$$

وهذا معناه أن الشعاع الخاص بشدة المجال يغير اتجاهه عند العبور من مادة عازلة الى أخرى حسب هذه العلاقة الاخيرة حيث أنه يبتعد عن العمود على السطح الفاصل في المادة التي يكون ثابت عزلها اكبر .