الفصل الثاني

المجال الكهربائى المستقر فى الفراغ

Electrostatic Field in Vacuum

1-2 تمهيـد :

نود في هذا الفصل أن ندرس المجال الكهربائي المستقر وهو المجال المتولد من الشحنات الساكنة وذلك بدلالة تأثر شحنة كهربائية (شحنة الاختبار) بعدد من الشحنات القريبة منها والموجودة جميعا في الفراغ • وسوف نبدأ بقانون كولوم باعتباره قانونا أساسيا تشتق منه القوانين الاخرى الخاصة بالكهربائية المستقرة •

2-2 قانون كولوم Coulomb's Law

ينص قانون كولوم على أن القوه بين شحنتين نقطيتين ساكنتين تتناسب طرديا مع حاصل ضرب هاتين الشحنتين وعكسيا مع مربع المسافة بينهما ويكون خط تأثير تلك القوة على استقامة الخط الواصل بين تلك الشحنتين وتكون قوة تجاذب اذا كانت الشحنتان مختلفتين وقوة تنافر .اذا كانت الشحنتان متشابهتين ولقد سمي بهذا الاسم لان العالم الفرنسي جارلس كولوم (Charles Coulomb) هو اول من قام باجراء التجارب التي أدت الى استنتاج هذا القانون وذلك سنة 1784 ويمكن وضع صيغته الرياضية بالشكل التالي :

$$\bar{F} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \bar{e}_r \qquad (1-2)$$

اذ تمثل $\bar{F}$ القوة بين الشحنتين ، Q_1 ، Q_2 مقدار كل من الشحنتين النقطيتين r المسافة بينهما و $\bar{e}_r$ هي وحدة متجه بموازاة المتجه $\bar{r}$ ، اما k فهو مقدار ثابت قيمته التجريبية في النظام العالمي للوحدات (SI units) هو :

$$k = 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2}$$

وتسهيلا لبعض العلاقات الرياضية التي يستعمل فيها قانون كولوم ويظهر فيها العامل 4π . يعبر عن k بدلالة ثابت طبيعي آخر ϵ_0 للتخلص من هذا العامل بالصيغة التالية :

$$k = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} = 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2}$$

$K = 9 \times 10^9 \ N.m^2/C^2$

وتسمى ϵ_0 سماحية الفراغ (Permittivity of vacuum) وقيمتها تساوي

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N.m^2}$$

(3-2) شدة المجال الكهربائي The electric field intensity

يعرف المجال الكهربائي بانه الحيز الذي تظهر فيه آثار القوة الكهربائية على الشحنات الساكنة الموجودة في ذلك الحيز كما تعرف شدته في نقطة ما بأنها القوة المؤثرة على وحدة الشحنات في تلك النقطة . وبهذا تكون شدة المجال لشحنة نقطية Q في نقطة تبعد عنها مسافة r باستعمال العلاقة (1-1) كالاتي :

$$\bar{E} = k \frac{Q}{r^2} \bar{e}_r \qquad (2-2)$$

وفي حالة وجود عدد من الشحنات النقطية مثل $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots Q_n$ والتي تبعد بالمسافات r_1, r_2, r_3, r_n ، من النقطة المراد حساب شدة المجال فيها ، فان محصلة شدة المجال هي المجموع الاتجاهي لشدة مجال كل هذه الشحنات النقطية على انفراد في تلك النقطة . أي ان :

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 + \cdots + \bar{E}_n \qquad 3-2$$

اما اذا كانت الشحنة موزعة توزيعا حجميا ، سطحيا أو طوليا فاننا نستعمل طريقة

MYjubl

التكامل لايجاد شدة المجال كالاتي :

$$\bar{E} = k\int \frac{dQ}{r^2}\,\bar{e}_r \qquad (4\text{-}2)$$

وتعتمد قيمة dQ هنا على نوعية توزيع الشحنة ففي حالة التوزيع الطولي

$$dQ = \lambda\, dl \qquad (5\text{-}2)$$

اذ أن λ هي كثافة الشحنة الطولية على ذلك الجسم و dl جزء تفاضلي من طول ذلك الجسم l • واذا كان توزيع الشحنة سطحيا فان :

$$dQ = \sigma\, ds \qquad (6\text{-}2)$$

اذ أن σ تمثل كثافة الشحنة السطحية على ذلك الجسم و ds جزءا متناهيا في الصغر من ذلك السطح • أما اذا كان توزيع الشحنة حجميا فان :

$$dQ = \rho\, d\tau \qquad (7\text{-}2)$$

اذ تمثل ρ كثافة الشحنة الحجمية في ذلك الحجم و $d\tau$ جزءا متناهيا في الصغر من حجم ذلك الجسم ، وسوف نعطي في نهاية هذا الفصل بعض الامثلة على ذلك • وسوف تقتصر دراستنا في هذا الفصل على المجال الكهربائي المستقر وهو المجال الذي تعتمد قيمته على الموقع فقط ولا تعتمد على الزمن بينما قيمة المجال الكهربائي الداينامیكي تعتمد على الزمن بالاضافة الى اعتمادها على الموقع كما سنرى ذلك في الفصول القادمة •

3-2 الجهد الكهربائي Electric Potential

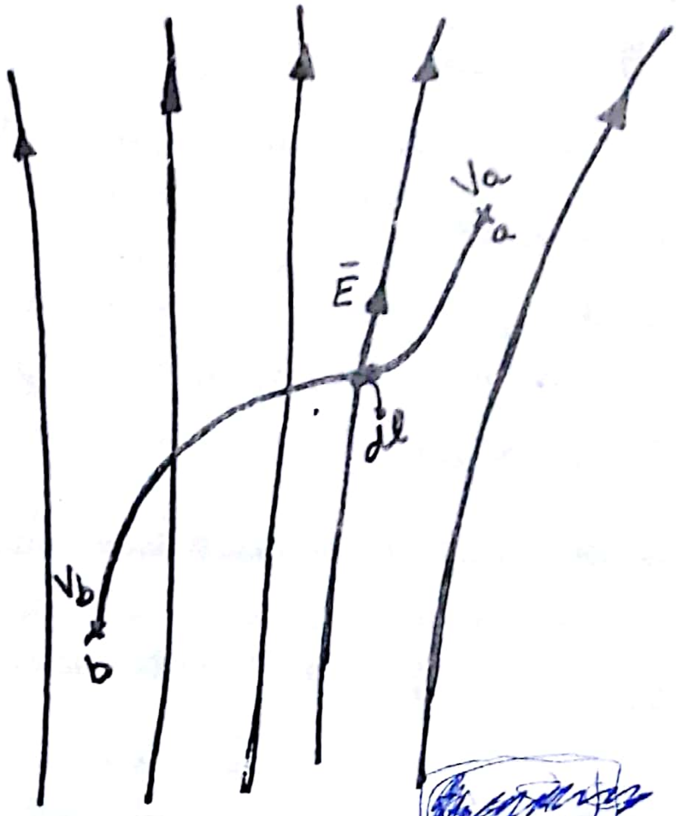
اذا ازيحت شحنة مقدارها Q في مجال كهربائي E بحيث لا يؤثر وجودها على شكل المجال او مقداره ازاحة تفاضلية مقدارها dl من نقطة a الى نقطة b وبدون تغير في طاقتها الميكانيكية فان الشغل المنجز عليها يكون :

$$W = -\int_a^b Q\,\bar{E}\cdot d\bar{l} \qquad (8\text{-}2)$$

والاشارة السالبة هنا تعني أن الشغل قد أنجز ضد المجال الكهربائي E • أما اذا

كانت حركة الشحنة على مسار مغلق فيكون الشغل المنجز :

$$W = -\oint Q\bar{E}\cdot d\bar{l} \qquad (9-2)$$



الشكل (1-2)

ولنحاول الان اختزال هذا التكامل ولنتصور أننا حركنا شحنة مقدارها Q في المجال الكهربائي لجسم ساكن مشحون ولسهولة الحل نتصور أن هذا الجسم هو شحنة نقطية مقدارها Q فان الشغل المنجز لتحريك الشحنة Q في مجال الشحنة النقطية Q حول طريق مغلق هو :

$$W = -\oint \frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\bar{e}_r\cdot d\bar{l} = -\frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0}\oint \frac{dr}{r^2} \qquad (10-2)$$

ومقدار هذا الكتامل يساوي صفرا لان ناتجه يساوي$(-\frac{1}{r})$ وان حدي التكامل في بداية ونهاية المسار متساويان وهذا يعني أن الشغل المنجز عند تحريك شحنة نقطية مقدارها Q في المجال الكهربائي لشحنة نقطية مستقرة مقدارها Q حول طريق مغلق يساوي صفرا ، ويمكننا تعميم هذه القاعدة لجميع الاجسام المشحونة مهما كان شكل الجسم على اعتبار ان اي جسم مشحون يمكن تصوره مكونا من عدد كبير جدا من الشحنات النقطية بشرط ان تكون هذه الشحنات مستقرة ، وبهذا يمكن استنتاج أن الشغل المنجز على وحدة الشحنات الواقعة في مجال كهربائي

لشحنات مستقرة مهما كان مقدار وكيفية توزيع الشحنة اذا حركت في طريق مغلق يساوي صفرا أي أن :

$$\oint \bar{E} . d\bar{l} = 0 \qquad (11\text{-}2)$$

وبهذا يكون المجال الكهربائي المستقر مجالا محافظا (راجع الفصل الاول) .
وباستعمال نظرية ستوك تؤول المعادلة (11-2) الى الشكل التالي

$$\nabla \times \bar{E} = 0 \qquad (12\text{-}2)$$

وبما أن

$$\nabla \times \nabla \phi = 0$$

اذن يمكن أن نعرف المجال بأنه الانحدار لدالة عددية وبهذا يكون :

$$\bar{E} = - \nabla \phi \qquad (13\text{-}2)$$

اذ أن $\phi(X,Y,Z)$ هي دالة مستمرة واحادية القيمة تسمى الجهد الكهربائي وتدل الاشارة السالبة في المعادلة (13-2) على أن اتجاه المجال الكهربائي يشير الى النقصان في الجهد .

ويجب التأكيد هنا أن العلاقة (12-2) لا تصح الا في حالة كون المجال الكهربائي مجالا مستقرا لا يتغير مع الزمن ، أما اذا كان المجال الكهربائي متغيرا مع الزمن فان $\nabla X E$ لا يكون مساويا الى الصفر كما سنرى مستقبلا . والان لنحسب مقدار الشغل المنجز من قبل المجال الكهربائي E لازاحة وحدة الشحنات ازاحة تفاضلية بمقدارها $d\ell$ باستعمال المعادلة (13-2) . ان هذا الشغل يساوي :

$$\bar{E} . d\bar{l} = - \nabla \phi . d\bar{l} = - d\phi \qquad (14\text{-}2)$$

ومقدار هذا الشغل المنجز لنقل وحدة الشحنات من النقطة (a) الى النقطة (b) كما في الشكل (1) هو :

$$\int_a^b \bar{E}\cdot d\bar{l} = -\int_a^b d\phi = \phi_{ab}$$

(15-2)

أي أن فرق الجهد بين النقطتين b,a هو مقدار الشغل المنجز لنقل وحدة الشحنات من النقطة a الى النقطة b ، واذا كان مقدار الشغل المنجز لنقل شحنة واحدة في مجال كهربائي من نقطة الى أخرى مساويا صفرا فان هاتين النقطتين تكونان متساويتي الجهد أي أن فرق الجهد بينهما يساوي صفرا . واذا كان لدينا سطح جميع نقاطه متساوية الجهد يقال عن هذا السطح سطح تساوي جهد . تكون سطوح تساوي الجهد لشحنة نقطية سطوحا كروية متمركزة حول تلك الشحنة النقطية كمركز لها .

4-2 قانون كاوس : Gauss's Law

لحساب شدة المجال الكهربائي المستقر في أي نقطة في الفراغ والناتج عن وجود شحنة او شحنات نقطية يستعمل قانون كولوم كما اوضحنا في بداية هذا الفصل . أما اذا كان توزيع الشحنة معقدا فان شدة المجال في تلك النقطة لا يمكن حسابها بسهولة باستعمال قانون كولوم وفي مثل هذه الحالات يستعمل قانون آخر يسمى قانون كاوس (Gauss's law) وينص هذا القانون على أن عدد خطوط الفيض الكهربائي التي تقطع أي سطح مغلق مهما كان شكله يساوي الشحنة التي يحتويها هذا السطح المغلق مقسومة على ϵ_o (ثابت سماحية الفراغ) وتكون صيغته الرياضية على الشكل التالي :

$$\oint_s \bar{E}\cdot d\bar{S} = \frac{Q}{\epsilon_o}$$

(16-2)

(16-2)

حيث تمثل E شدة المجال في أي نقطة على السطح المغلق و dS جزء تفاضلي من السطح المغلق S . ولاثبات هذه العلاقة نتصور الفيض الكهربائي خلال سطح مغلق S يحتوي على شحنة نقطية مقدارها Q في نقطة O كما في الشكل (2-2) ولحساب E في أي نقطة على هذا السطح المغلق نستعمل العلاقة (2-2) .

$$\bar{E} = k\frac{Q}{r^2}\bar{e}_r$$

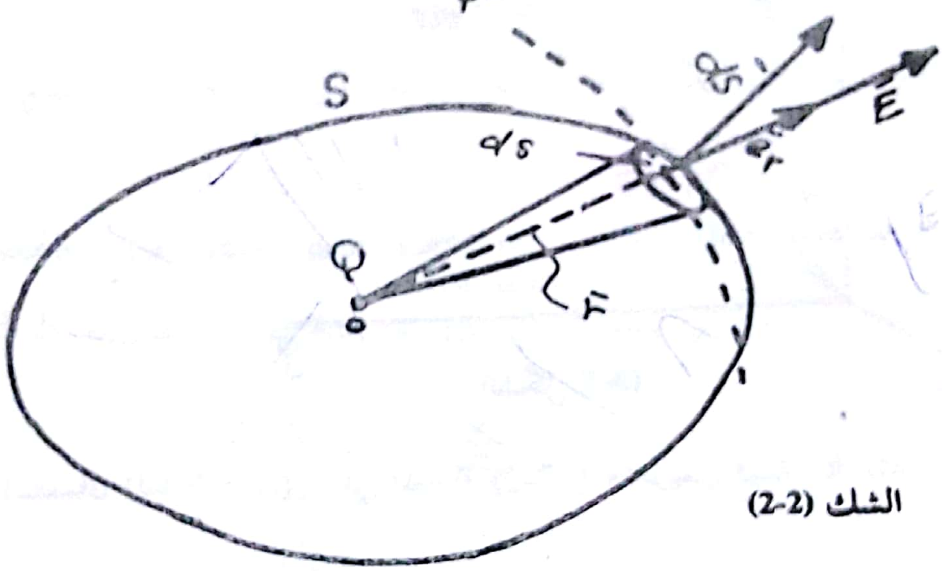
ومقدار الفيض الكهربائي خلال سطح تفاضلي مقداره (ds) في أي نقطة على

السطح المغلق هو :

$$\bar{E}\cdot d\bar{s} = kQ\,\frac{\bar{e}_r\cdot d\bar{s}}{r^2} \tag{17-2}$$

لكن $\bar{e}_r\cdot d\bar{s}$ هو مسقط المتجه d_s على سطح الكرة التي نصف قطرها r ومركزها O ومقداره ds' كما في الشكل (2-2) وبهذا تأخذ العلاقة (17-2) الشكل التالي :

$$\bar{E}\cdot d\bar{s} = kQ\,\frac{ds'}{r^2} \tag{18-2}$$



الشكل (2-2)

لكن $\frac{ds'}{r^2}$ هو الزاوية المجسمة $d\Omega$ التي يقع رأسها في نقطة O وبهذا نحصل على :

$$\bar{E}\cdot d\bar{s} = kQ\,d\Omega\ . \tag{19-2}$$

وبملاحظة الشكل (3-2) نجد أن

$$\oint d\Omega = \oint \frac{ds'}{r^2}$$

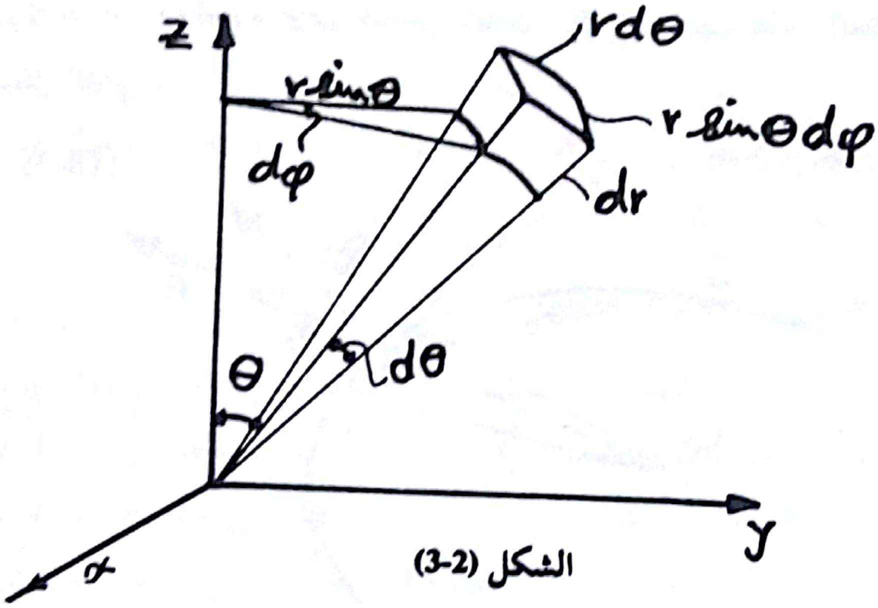
$$= \oint \frac{r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{r^2}$$

$$= \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi \tag{20-2}$$

ولحساب المجال الكهربائي المستقر الكلي الذي يقطع السطح S تكامل طرفي المعادلة (19-2) ٠

$$\oint \bar{E}.d\bar{S} = \oint kQ\, d\Omega$$

$$= kQ \oint d\Omega \qquad (21-2)$$



الشكل (3-2)

وباستعمال المعادلة (20-2) في المعادلة (12-2) وتعويض قيمة k بالمقدار $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

نحصل على :

$$\oint \bar{E}.d\bar{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} . Q . 4\pi = \frac{Q}{\epsilon_0} \qquad (22-2)$$

نلاحظ من هذه العلاقة ان مقدار الفيض الكهربائي لا يعتمد على موقع Q واذا كان هذا السطح المغلق يحتوي على أي عدد من الشحنات النقطية فاننا يمكن اتباع نفس الطريقة السابقة في استخراج الفيض لكل شحنة من الشحنات على حدة ويكون الفيض الكلي هو مجموع الفيض الخاص بهذه الشحنات ٠ وبالامكان استخدام قانون كاوس بالصيغة الرياضية (22-2) لايجاد $\nabla.\bar{E}$ مباشرة حيث يمكن أن نكتب الطرف الايسر من المعادلة (22-2) وباستخدام مبرهنة كاوس كالاتي :

$$\oint \bar{E}.d\bar{S} = \int_{\tau} \nabla.\bar{E}\, d\tau \qquad (23-2)$$

والطرف الايمن منها يمكن كتابته بالشكل التالي :

$$\frac{Q}{\epsilon_o} = \int_\tau \frac{\rho\, d\tau}{\epsilon_o} \qquad (24-2)$$

وبذلك تصبح المعادلة (22-2) كالاتي :

$$\int_\tau \nabla\cdot\bar{E}\, d\tau = \frac{1}{\epsilon_o}\int_\tau \rho\, d\tau \qquad (25-2)$$

وبما أن هذه العلاقة تصح لنفس الحجم لذا يجب أن يتساوى المتكاملان في طرفي هذه المعادلة ولذا نحصل على :

$$\nabla\cdot\bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o} \qquad (26-2)$$

والمعادلة (26-2) تمثل الصيغة التفاضلية لقانون كاوس وهي مكافئة تماما للصيغة التكاملية (22-2) اعلاه .

ومن الضروري أن نشير هنا الى أن كثافة الشحنة ρ في هذه المعادلة تصح لكل من الشحنات المقيدة او الحرة .

(5-2) معادلة بوازان ومعادلة لابلاس : Poisson's Equation and Laplace's Equation

لو عوضنا عن E في المعادلة (26-2) بما يساويها من المعادلة (13-2) لحصلنا على

$$-\nabla\cdot\nabla\phi = \frac{\rho}{\epsilon_o}$$

$$-\nabla^2\phi = \frac{\rho}{\epsilon_o} \qquad (27-2)$$

وهذه المعادلة التفاضلية هي معادلة بوازان Poisson's equation . ويمكن استعمال هذه المعادلة التفاضلية لحساب ϕ اذا عرفنا كل من ρ وبعض المعادلات الاضافية التي تسمى حالات الحدود (Boundary conditions) في تلك المنطقة ، كما يمكن استعمال هذه المعادلة ايضا لحساب قيمة ρ في منطقة ما اذا عرفنا قيمة ϕ في تلك المنطقة . وهناك حالات خاصة لمعادلة بوازان التي تنعدم فيها كثافة الشحنة في تلك المنطقة وتكون مساوية الى الصفر ، وفي هذه الحالة تأخذ معادلة بوازان الشكل التالي :

$$\nabla^2\phi = 0 \qquad (28-2)$$

وتسمى هذه المعادلة بمعادلة لابلاس (Laplace's Equation) ويمكن بواسطة

هذه المعادلة حساب الجهد ϕ في المناطق الخالية من الشحنات وتعد هذه المعادلة من المعادلات الاساسية في مواضيع الكهربائية المستقرة . وسوف نأتي في بند لاحق على حلول هاتين المعادلتين في المحاور المختلفة وبعض التطبيقات عليها .

6-2 ثنائي القطب الكهربائي (The Electric Dipole)

ثنائي القطب الكهربائي او ذو القطبين كما يسمى احيانا هو عبارة عن شحنتين متساويتين في المقدار ومختلفتين في الاشارة $+Q$ و $-Q$ تفصل بينهما ازاحة صغيرة l . وثنائي القطب المثالي هو الذي تكون فيه l صغيرة بالمقارنة مع المسافة التي تبعد بها النقطة P المراد فيها حساب شدة المجال او الجهد عن مركز ثنائي القطب . ومركز ثنائي القطب هو منتصف الازاحة بين الشحنتين كما في الشكل (4-2) . ولحساب الجهد في أي نقطة $P(r,\theta)$ تبعد بمسافة (r) عن مركز ثنائي القطب فاننا نعتبر كل من الشحنتين $+Q$ ، $-Q$ كشحنتين نقطيتين وبهذا نحصل على

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r_2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r_1} \tag{29-2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_1 r_2}(r_1 - r_2) \tag{30-2}$$

لكننا نعلم ان :

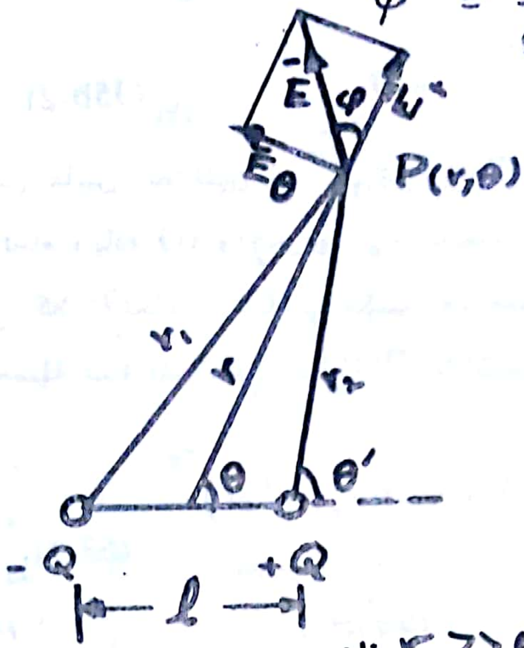
$$r_1^2 = r_2^2 + l^2 + 2r_2 l \cos\theta'$$

$$\therefore r_1^2 - r_2^2 = l(l + 2r_2\cos\theta')$$

$$r_1 - r_2 = \frac{l(l + 2r_2\cos\theta')}{r_1 + r_2} \tag{31-2}$$

وباستعمال العلاقتين (2-30) , (2-31) نحصل على :

$$\phi = \frac{Q\ell(\ell + 2r_1 \cos\theta')}{4\pi\epsilon_0 r_1 r_2 (r_1 + r_2)} \qquad (32-2)$$



الشكل (2-4)

ولثنائي القطب المثالي أي عندما يكون $r \gg \ell$ فان

$$r_1 = r_2 = r \;,\quad \theta = \theta'$$

وبهذا تأخذ المعادلة (2-32) الشكل التالي :

$$\phi = \frac{Q\ell \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{P\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad (33-2)$$

حيث أن $p \cong Ql$ وتسمى بعزم ثنائي القطب وتكون وحدة قياسها هي (C•m) وهو مقدار متجه يعتبر اتجاهه الموجب من الشحنة السالبة الى الشحنة الموجبة واذا أخذنا هذا بنظر الاعتبار فان المعادلة (2-33) تأخذ الشكل التالي :

$$\phi = \frac{\bar{p} \cdot \bar{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad (34-2)$$

ومن الجدير بالملاحظة هنا أن جهد ثنائي القطب يتناسب عكسيا مع مربع المسافة (r) خلافا لما هي الحال بالنسبة للشحنة النقطية حيث أن الجهد يتناسب عكسيا مع المسافة (r) كما لاحظنا ذلك في بند سابق • وعند حساب شدة المجال في النقطة P مستعملين المحاور القطبية نجد أن :

$$E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2P}{r^3}\cos\theta \qquad (35a-2)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{P}{r^3}\sin\theta \qquad (35b-2)$$

ومن هاتين العلاقتين نجد أن شدة المجال في نقطة p لها مركبتين احداهما E_r باتجاه زيادة (r) والاخرى E_θ باتجاه زيادة θ ؛ كما اننا نجد أن شدة المجال في كلا الاتجاهين تتناسب عكسيا مع مكعب المسافة عن مركز ثنائي القطب . ان محصلة شدة المجال في النقطة p وباستعمال العلاقة (35-2) هي :

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(4\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)^{1/2}$$

$$= \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(1 + 3\cos^2\theta\right)^{1/2} \qquad (63-2)$$

وان زاوية ميلها عن E_r هي :

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{E_\theta}{E_r} = \tan^{-1}\frac{1}{2}\tan\theta \qquad (37-2)$$

ولكي نتمكن من رسم سطوح تساوي الجهد لثنائي القطب الكهربائي فاننا نثبت قيمة الجهد لثنائي القطب ولتكن للسطح الاول ϕ_0 عندما تكون:

$$\left(\frac{P}{4\pi\epsilon_0}\right)\frac{\cos\theta}{r^2} = \phi_0$$

أو

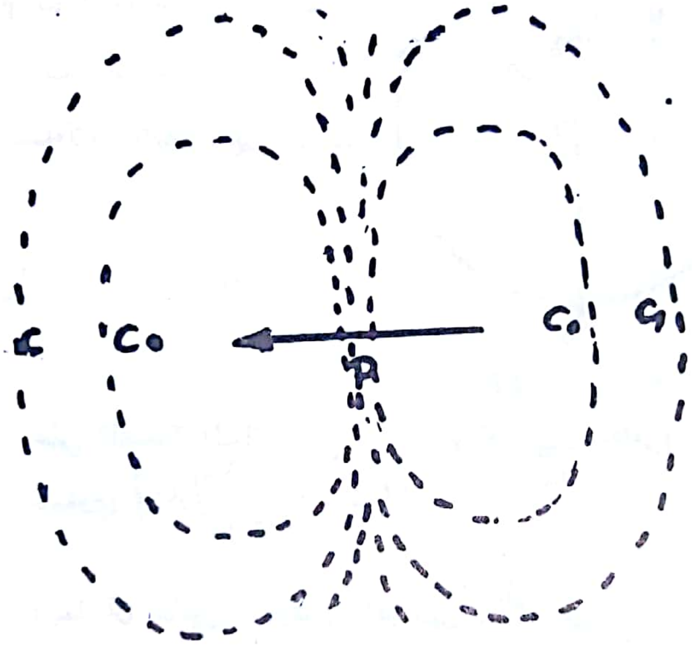
$$r^2 = \left(\frac{P}{4\pi\epsilon_0 \phi_0}\right)\cos\theta = C_0\cos\theta \qquad (38-2)$$

ومن هذه العلاقة وبتغير قيمة C تبعا لقيمة ϕ فاننا نتمكن من رسم مجموعة من سطوح تساوي الجهد التي نحصل عليها من تدوير خطوط تساوي الجهد في الشكل (5-2) على المحور العمودي على منتصف ثنائي القطب وللحصول على المعادلة الخاصة بخطوط المجال لثنائي القطب فاننا نقارن بين E_r ، E_θ نسبة للمتغيرين E_r،E_θ وبملاحظة الشكل (4-2) نجد ان :

$$\frac{E_r}{E_\theta} = \frac{dr}{r\,d\theta} \qquad (39\text{-}2)$$

وباستخدام العلاقتين (2-35) و (2-39) نحصل على

$$\frac{dr}{r} = \frac{2\cos\theta\, d\theta}{\sin\theta} = \frac{2\, d\sin\theta}{\sin\theta} \qquad (40\text{-}2)$$



الشكل (5-2)

وبتكامل طرفي المعادلة (2-40) نحصل

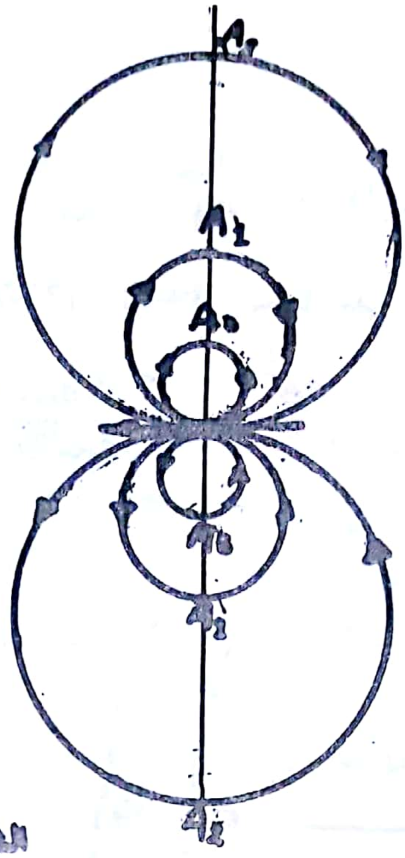
$$\ln r = 2 \ln \sin\theta + A'$$

$$r = A \sin^2\theta \qquad (41\text{-}2)$$

هذه المعادلة تتضمن مجموع خطوط قوى المجال الكهربائي لثنائي القطب وكل قيمة لـ A تعطينا خط مجال خاص بها كما في الشكل (2-6)

القوة المؤثرة على ثنائي قطب في مجال كهربائي

لنبدأ بحالة خاصة يكون فيها ثنائي القطب متجها باتجاه الاحداثي السيني x ولنعتبر أن المجال الكهربائي غير منتظم وان طول ثنائي القطب صغير جدا ويساوي Δx اذا كانت قيمة المجال الكهربائي عند الشحنة (-Q) هي E_x وقيمته عند الشحنة +Q $E_x + \Delta E_x$ او $E_x + (\frac{dE_x}{dx})\Delta x$. وهكذا نجد ان القوة المؤثرة



الشكل (6-2)

على الشحنة السالبة هي ($-E_x Q$) بينما القوة المؤثرة على الشحنة الموجبة تساوي $Q\left[E_x+\left(\frac{dE_x}{dx}\right)\Delta x\right]$.

وبما أن هاتين القوتين باتجاهين متعاكسين لذا فان محصلتهما على ثنائي القطب هي الفرق بين هاتين القوتين

$$F_x = Q\,\Delta x\,\frac{dE_x}{dx}$$

$$F_x = P\,\frac{dE_x}{dx} \qquad (42\text{-}2)$$

واذا كان لكل من ثنائي القطب والمجال الكهربائي مركبات في الاتجاهات الثلاثة (x, y, z) نجد أن :

$$F_x = P_x\,\frac{dE_x}{dx}$$

$$F_y = P_y\,\frac{dE_y}{dy} \qquad (43\text{-}2)$$

$$F_z = P_z\,\frac{dE_z}{dz}$$

اما اذا كان المجال الكهربائي منتظما فان كلا من F_x و F_y و F_z تساوي صفرا لان الكميات $\frac{dE_x}{dx}$ ، $\frac{dE_y}{dy}$ ، $\frac{dE_z}{dz}$ في هذه الحالة تساوي صفرا أيضـــا ٠

الطاقة الكامنة لثنائي قطب كهربائي في مجال كهربائي منتظم

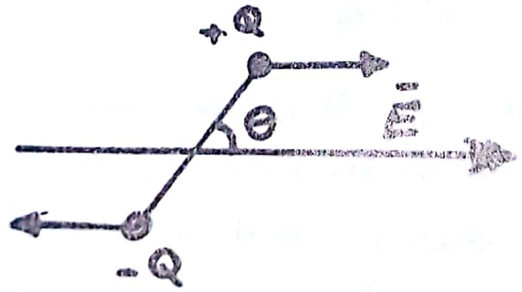
الشكل (2-7) يمثل ثنائي قطب كهربائي يصنع عزمه p زاوية مقدارها θ مع اتجاه المجال الكهربائي المنتظم E فاذا فرضنا أن الجهد عند الشحنة السالبة يساوي ϕ فانه عند الشحنة الموجبة يكون مساويا الى $\phi+\Delta\phi$ والطاقة الكامنة لثنائي القطب تكون :

$$U = Q(\phi+\Delta\phi) - Q\phi = Q\Delta\phi \qquad (44\text{-}2)$$

فاذا كان طول ثنائي القطب مساويا الى Δl :

$$\therefore \Delta\phi = -\bar{E}\cdot\Delta\bar{l} \qquad (45\text{-}2)$$

وهكذا نجد أن



الشكل (2-7)

$$U = -\bar{E}\cdot Q\Delta\bar{l} = -\bar{E}\cdot\bar{p}$$
$$= -EP\cos\theta \qquad (46\text{-}2)$$

وهذه المعادلة تمثل الطاقة الكامنة لثنائي القطب عند وضعه في مجال منتظم والاشارة السالبة التي ظهرت في هذه العلاقة سببها أن الشغل قد انجز من قبل المجال الكهربائي على ثنائي القطب ٠

العزم المؤثر على ثنائي قطب في مجال كهربائي منتظم :

من ملاحظة الشكل (7-2) نجد أن ثنائي القطب في هذه الحالة يتأثر بقوتين متساويتين في المقدار ومتعاكستين في الاتجاه مقدار كل منهما يساوي QE وبالرغم من أن محصلة القوى على ثنائي القطب تساوي صفرا الا أن العزم لا يساوي صفرا والسبب في ذلك أن خط تأثير القوتين لا يقع على استقامة واحدة ، وبهذا نجد أن العزم المؤثر على ثنائي القطب يكون :

$$\Gamma = QE\frac{\Delta l}{2}\sin\theta + QE\frac{\Delta l}{2}\sin\theta \qquad (47\text{-}2)$$

$$\Gamma = PE\sin\theta \qquad (48\text{-}2)$$

ويمكن الحصول على هذه العلاقة مباشرة من المعادلة (46-2) حيث نجد أن

$$\Gamma = \frac{dU}{d\theta} = PE\sin\theta$$

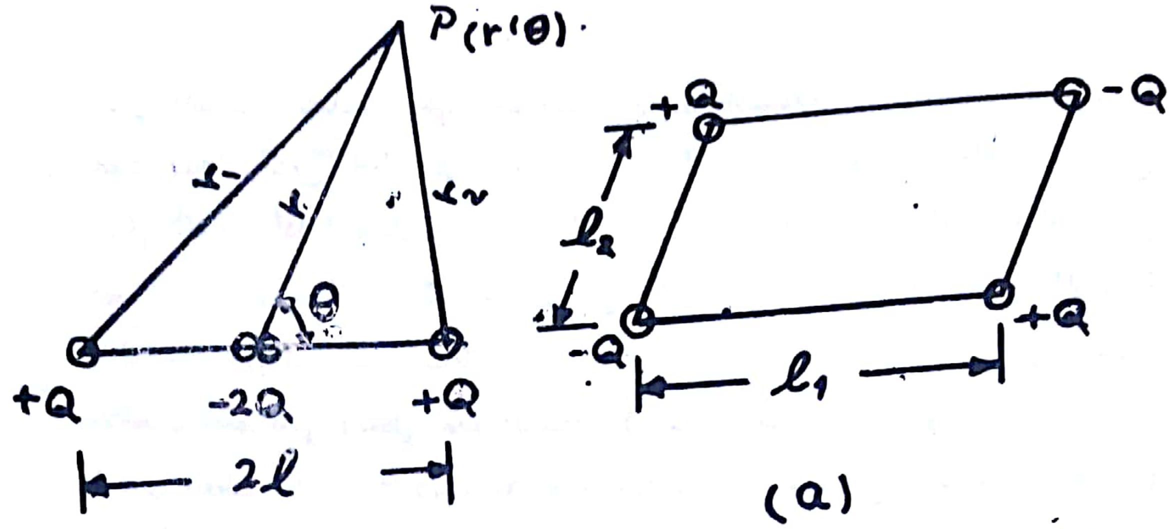
او :

$$\bar{\Gamma} = \bar{P}\times\bar{E} \qquad (49\text{-}2)$$

وخلاصة ذلك أن ثنائي القطب الكهربائي اذا وضع في مجال منتظم فانه يتأثر بهذا المجال بعزم ويحاول أن يدوره باتجاه المجال أما اذا كان المجال غير منتظم فان ثنائي القطب يتأثر بنوعين من الحركة الاولى دورانية بتأثر العزم والاخرى انتقالية بتأثير محصلة القوى المسلطة عليه كما جاء في المعادلة (43-2) .

(7-2) رباعي القطب ومتعدد الاقطاب الكهربائي :

رباعي القطب عبارة من أربعة شحنات مرتبة كما في الشكل (8-2) حيث يمثل الشكل (8a-2) شكل رباعي القطب بصورة عامة ويمثل الشكل (8b-2) رباعي القطب الخطي أو المنتظم ويفترض هنا أيضا أن تكون الازاحة l صغيرة جدا اذا ما قورنت بالمسافة r وسوف نؤكد بدراستنا هنا على رباعي القطب الخطي (Linear Quadrapole) لسهولته ويمكن حساب الجهد لرباعي القطب الخطي على اعتبار أن شحناته تمثل شحنات نقطية .



(b) (a)

الشكل (8-2)

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{r_1} - \frac{2Q}{r} + \frac{Q}{r_2}\right) \qquad (50\text{-}2)$$

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}\left(\frac{r}{r_1} + \frac{r}{r_2} - 2\right) \qquad (51\text{-}2)$$

$$r_1^2 = r^2 + l^2 + 2rl\cos\theta \quad , \quad r_2^2 = r^2 + l^2 - 2rl\cos\theta$$

$$\frac{r}{r_1} = \left[1 + \left(\frac{l}{r}\right)^2 + \frac{2l}{r}\cos\theta\right]^{-1/2}$$

وباستعمال مفكوك تايلر وباهمال الحدود التي تحتوي على معاملات ذات قوى أعلى من $\left(\frac{l}{r}\right)^2$ لصغر l بالنسبة الى r نحصل على:

$$\frac{r}{r_1} = \left[1 - \frac{l}{r}\cos\theta + \frac{l^2}{r^2}\left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right)\right] \qquad (52\text{-}2)$$

وكذلك

$$\frac{r}{r_2} = \left[1 + \frac{l}{r}\cos\theta + \frac{l^2}{r^2}\left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right)\right] \qquad (53\text{-}2)$$

وباستعمال قيمة كل من r/r_1 و r/r_2 من المعادلتين (52-2) و (53-2) في

المعادلة (51-2) نحصل على :

$$\phi = \frac{2Ql^2}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right) \qquad (54\text{-}2)$$

ومن هذا نجد أن الجهد لرباعي قطب خطي في نقطة ما يتناسب عكسيا مع مكعب المسافة عن مركزه بينما نجد أن شدة المجال E_r و E_θ) لو اتبعنا نفس طريقة

ثنائي القطب) تتناسب عكسيا مع القوة الرابعة للمسافة r • وبهذا نجد ان شدة المجال لرباعي القطب تهبط وتقترب من الصفر أسرع مما هي الحالة عليه في ثنائي القطب اذا ابتعدنا عن مركز كل منهما • أما متعدد الاقطاب الكهربائي فهو تعميم لمفهوم كل من ثنائي ورباعي القطب حيث بزيادة الشحنات الموجبة والسالبة التي توضع بمسافات صغيرة عن بعضها البعض نحصل على متعدد الاقطاب الكهربائي ويعطي عدد الشحنات أو عدد الاقطاب اسما لهذا النظام فمثلا أحادي القطب ما هو الا شحنة نقطية واحدة يأتي بعده ثنائي القطب وهو عبارة عن قطبين (شحنتين مختلفتين) ثم رباعي القطب وهو يحتوي على أربعة أقطاب بعده ثماني القطب ويضم ثمانية أقطاب وهكذا نحصل على متعدد الاقطاب الكهربائي ويكون عدد أقطابه مساويا الى (2^n) حيث يمثل الرقم n الاعداد الصحيحة ($n.....3,2,1,0$) ويسمى الحرف n درجة متعدد الاقطاب • ونلاحظ من هذا أن ابسط أنواع متعدد الاقطاب هو ذي درجة الصفر حيث يمثل أحادي القطب الذي يعد صيغة جديدة للشحنة النقطية ثم يأتي بعده متعدد الاقطاب ذي الدرجة 1 وهو ثنائي القطب وهكذا ... ويجب أن نلاحظ أن أحادي القطب لا يحتوي على اي ازاحة بينما يحتوي ثنائي القطب على ازاحة واحدة مقدارها l_1 ورباعي القطب على ازاحتين الاولى l_1 والثانية l_2 ($l_1 = l_2$) لرباعي القطب الخطي) ويحتوي ثماني القطب على ازاحات ثلاث هي l_1 و l_2 و l_3 • كما أشرنا سابقا الى أن جهد ثنائي القطب يتناسب مع $\frac{1}{r^2}$ ولرباعي القطب يتناسب الجهد مع $\frac{1}{r^3}$ وبصورة عامة فان جهد متعدد الاقطاب يتناسب مع $\frac{1}{r^{s+1}}$ حيث تمثل s عدد الازاحات الخاصة بمتعدد الاقطاب • أما شدة المجال فهي تتناسب مع $\frac{1}{r^{s+2}}$ •

15-2 مبرهنة الحل الوحيد (Uniqeness Theorem) :

عند حل بعض المسائل في الكهربائية المستقرة كحلول معادلة لابلاس او الصور الكهربائية فاننا نفترض وجود دالة مستمرة متغيرة تبعا للاحداثيات بحيث يحقق شروط الحدود لذلك الوسط فتكون هذه الدالة هي الحل الصحيح لتلك المسألة ،

ونريد أن نبرهن هنا أنه اذا كان الامر كذلك فان هذا الحل الصحيح هو الحل الصحيح الوحيد لهذه المسألة . ولبرهنة ذلك نفترض ان هناك دالتين هما ϕ_1 و ϕ_2 كل منهما يحقق معادلة لابلاس $(\nabla^2\phi = 0)$ في تلك المنطقة كما تعطي كل منهما حلولا صحيحة للدالة ϕ وكذلك المركبة العمودية لـ $\nabla\phi$. على حدود تلك المنطقة وهو المقدار $\frac{\partial\phi}{\partial n}$. ولسهولة العمل نفترض وجود دالتين جديدتين للاحداثيات

وهي كل من الدالة غير المتجهية $\phi' = \phi_1 - \phi_2$ والدالة المتجهية $\phi'\nabla\phi'$. ولقد تم اختيار هاتين الدالتين لان الافتراض الاصلي يحقق العلاقة

$$\nabla^2\phi' = \nabla^2\phi_1 - \nabla^2\phi_2 = 0 \qquad (55\text{-}2)$$

في كل نقطة من نقاط المنطقة المحدودة وكذلك

$$\phi\frac{\partial\phi'}{\partial n} = (\phi_1 - \phi_2)\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial n} - \frac{\partial\phi_2}{\partial n}\right) \qquad (56\text{-}2)$$

في كل نقطة من نقاط السطح الذي يحيط بتلك المنطقة (الحدود الفاصلة) وذلك لان $\phi_1 = \phi_2$ و $\frac{\partial\phi_1}{\partial n} = \frac{\partial\phi_2}{\partial n}$ على الحدود الفاصلة ، وباستعمال مبرهنة كاوس للدالة $\phi'\nabla\phi'$ نحصل على :

$$\int_\tau \nabla\cdot(\phi'\nabla\phi')\,d\tau = \int_S (\phi'\nabla\phi')\cdot d\bar{S} \qquad (57\text{-}2)$$

حيث ان τ يمثل حجم النقطة المحددة ويمثل S السطح الذي يحتوي ذلك الحجم (السطح الفاصل) . ان التكامل السطحي للطرف الايمن في المعادلة (2-57) $\int(\phi'\nabla\phi')\cdot d\bar{S}$ يساوي صفرا لكل نقطة من نقاط السطح S الذي يحيط بتلك المنطقة وذلك باستعمال المعادلة (2-56) وبهذا يكون التكامل الحجمي للطرف الايسر من المعادلة (2-57) مساويا الى الصفر . وباستعمال المتطابقة المتجهية

$$\nabla\cdot(\phi'\nabla\phi') = \phi'\nabla^2\phi' + (\nabla\phi')^2 \qquad (58\text{-}2)$$

يمكننا كتابة الطرف الايسر من المعادلة (2-57) بالشكل التالي :

$$\int_\tau \nabla\cdot(\phi'\nabla\phi')d\tau=\int_\tau \phi'\nabla^2\phi' d\tau+\int_\tau(\nabla\phi')^2 d\tau=0 \qquad (59\text{-}2)$$

وبما أن $\nabla^2\phi'=0$ في كل نقطة من نقاط هذا الحيز لذا فان :

$$\int_\tau (\nabla\phi')^2 d\tau=0 \qquad (60\text{-}2)$$

او أن

$$(\nabla\phi')^2=\nabla\phi'\cdot\nabla\phi'=\left(\frac{\partial\phi'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi'}{\partial z}\right)^2 \qquad (61\text{-}2)$$

وتكامل هذا المقدار لا يمكن أن يكون سالبا في أي حال من الاحوال لان المقدار $\nabla\phi'$ هو ليس مقدارا خياليا . يستنتج من هذا ان كلا من $\left(\frac{\partial\phi'}{\partial x}\right)^2$ و $\left(\frac{\partial\phi'}{\partial y}\right)^2$ و $\left(\frac{\partial\phi'}{\partial z}\right)^2$ أما أن يكون موجبا او صفرا ، وبما ان التكامل الحجمي لهذا المقدار هو صفر كما في المعادلة (60-2) لذا يكون لدينا

$$\left(\frac{\partial\phi'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi'}{\partial z}\right)^2=0 \qquad (62\text{-}2)$$

$$\frac{\partial\phi'}{\partial x}=\frac{\partial\phi'}{\partial y}=\frac{\partial\phi'}{\partial z}=0 \qquad (63\text{-}2)$$

في كل نقطة من نقاط هذا الحيز وهذا معناه أن ϕ' (أي الفرق بين ϕ_2 ، ϕ_1) يجب أن تكون ثابتة او مساوية الى الصفر وبما ان قيمة ϕ_1 تساوي ϕ_2 على الحدود الفاصلة اذن يجب ان تكون قيمة ϕ' مساوية الى الصفر في كل نقطة من نقاط ذلك الحيز . وبهذا تكون ϕ_1 مساوية الى ϕ_2 في كل نقطة من نقاط الحيز المذكور اي أن هناك قيمة واحدة فقط للجهد هي ϕ والتي تحقق معادلة لابلاس وكذلك شروط الحدود .

(9-2) الصور الكهربائية : Electrical Images

طريقة الصور الكهربائية هي طريقة تستعمل لحساب الجهد او المجال الكهربائي لنظام كهربائي مستقر معين وذلك باستبداله بشحنة نقطية او مجموعة شحنات نقطية بحيث تحقق الشروط الحدودية لذلك النظام . فاذا كان الامر كذلك فان طريقة الحل لحساب الجهد والمجال الكهربائي تعتبر صحيحة حسب نظرية

الحل الوحيد باعتبار ان هذه الطريقة حققت الشروط الحدودية لذلك النظام وبذلك تكون الطريقة التي استعملت باستبدال النظام الكهربائي المستقر بشحنة نقطية او مجموعة شحنات نقطية في حساب كل من الجهد والمجال الكهربائي هي طريقة صحيحة . وتسمى مجموعة الشحنات النقطية بالصور الكهربائية وتسمى هذه الطريقة بطريقة الصور الكهربائية .

ان استعمال طريقة الصور الكهربائية لحل بعض المسائل في الكهربائية المستقرة تتمثل في أبسط انواعها بوضع شحنة مقدارها $+Q$ على بعد D من صفيحة موصلة مستوية واسعة جدا . ان المجال الكهربائي في المنطقة الواقعة بين الشحنة والصفيحة الموصلة مشابه تماما للمجال الكهربائي في تلك المنطقة اذا استبدلت الصفيحة الموصلة بشحنة مقدارها $-Q$ توضع على بعد $(2D)$ من الشحنة $+Q$. وتسمى $-Q$ بالصورة الكهربائية للشحنة $+Q$. ان مصطلح الصورة الكهربائية أخذ من هذه الحالة الخاصة التي تشبه في طبيعتها الصورة المتكونة في مرآة مستوية والتي درسها الطالب في موضوع البصريات الهندسية . ولتوضيح هذا المثال نلاحظ الشكل (9-2) وفيه الشحنة النقطية $+Q$ وضعت على بعد D من سطح مستو موصل يمتد بمساحته الى اللانهاية متصل بالارض (جهده يساوي صفرا) . فاذا أبعدنا هذا السطح الموصل واستبدلناه بشحنة نقطية مقدارها $-Q$ توضع على بعد $2D$ من الشحنة النقطية $+Q$ فان اي نقطة تقع على المستوي العمود في منتصف المسافة بين الشحنتين تكون متساوية البعد عن الشحنتين $+Q$ ، $-Q$. وبهذا يكون جهدها مساويا الى الصفر ويكون هذا المستوي سطح تساوي جهد ، وبهذا تعطي الشحنتان النقطيتان الحل المناسب المكافئ الى الشحنة النقطية $+Q$ والسطح الموصل (أي الشرط الحدودي) . وتسمى الشحنة $-Q$ بالصورة الكهربائية للشحنة $+Q$.

ومما تقدم نلاحظ أن الجهد ϕ في النقطة P بالنسبة للشحنتين النقطتين هو

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'} \qquad (64\text{-}2)$$

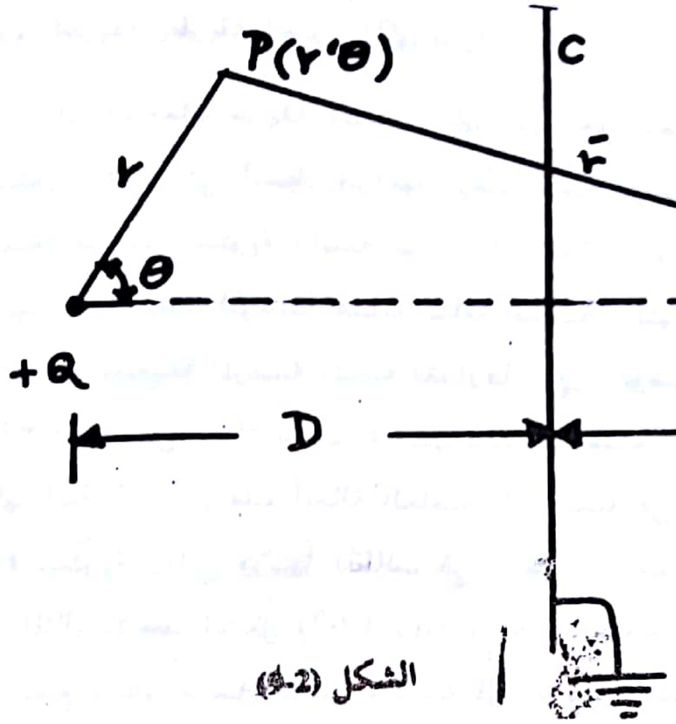
ح ث أن

$$r' = \left(r^2 + 4D^2 - 4rD\cos\theta\right)^{1/2}$$

أما مركبات المجال E_r و E_θ فهي :

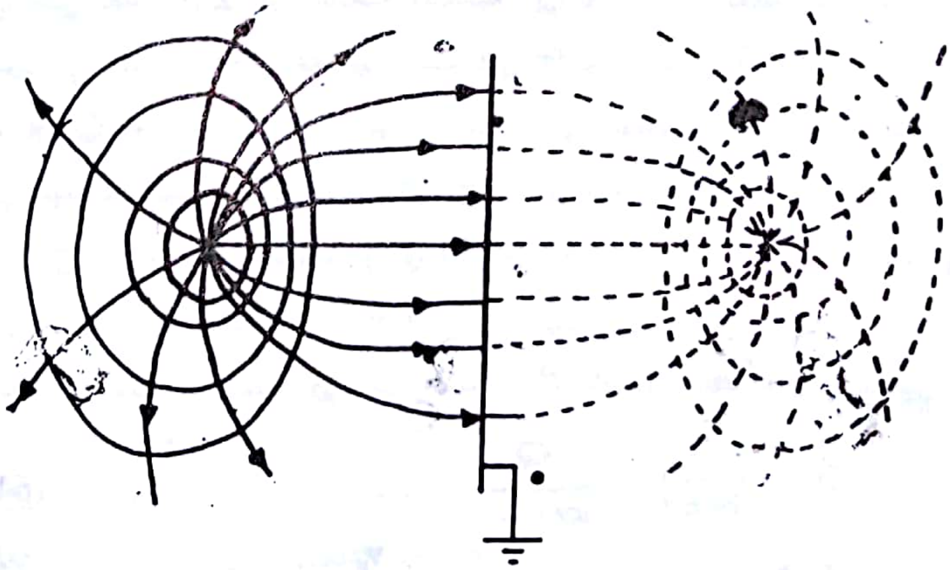
$$E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{Q(r-2D\cos\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \qquad (65a\text{-}2)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{2QD\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \qquad (65b\text{-}2)$$



الشكل (9-2)

الشكل (10-2) يوضح خطوط المجال وسطوح تساوي الجهد لهذه الحالة

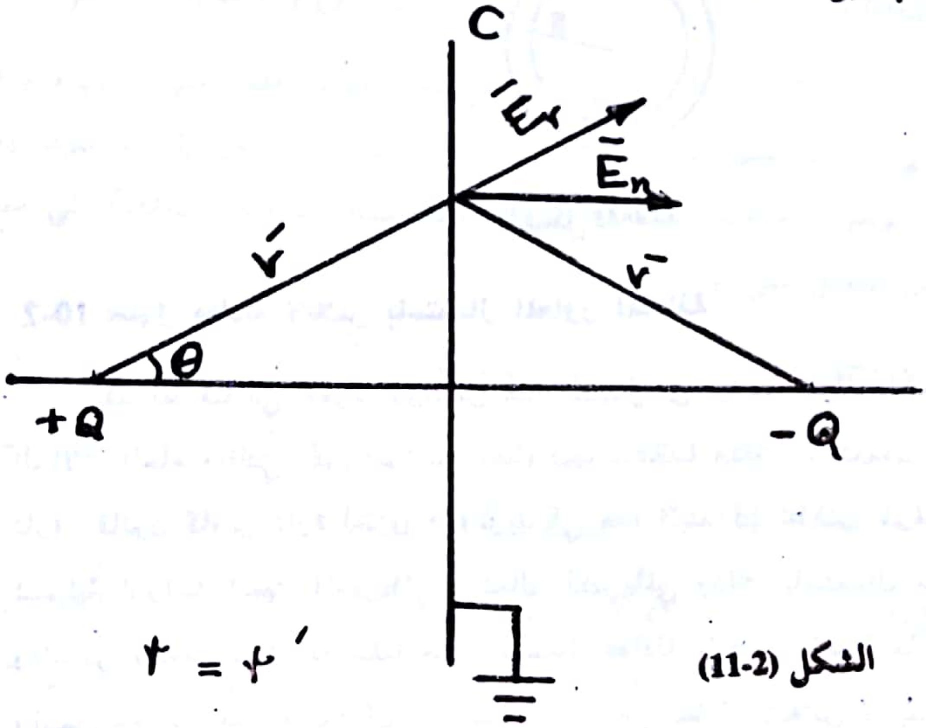


الشكل (10-2)

وكثافة الشحنة المحتثة على السطح الموصل يمكن حسابها من المركبة العمودية لشدة المجال على السطح الموصل $\bar{E}_n$ اذ أن

$$\sigma = -\epsilon_0 E_n \qquad (66\text{-}2)$$

وفي هذا المثال تكون الشحنة المحتثة على السطح الموصل سالبة ويكون اتجاه المجال العمودي على السطح الموصل مشيرا الى اليمين كما في الشكل (11-2) ومن ملاحظة هذا الشكل نجد أن . . .



$r = r'$

الشكل (11-2)

$$E_n = E_+ \cos\theta - E_o \sin\theta$$

$$E_n = \frac{2QD}{4\pi\epsilon_0 r^3} \qquad (67\text{-}2)$$

ومن المعادلتين (66-2) و (67-2) نحصل على :

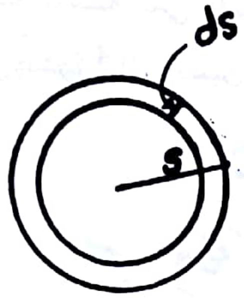
$$\sigma = \frac{-QD}{2\pi r^3} \qquad (68\text{-}2)$$

ومقدار الشحنة المحتثة على السطح الموصل Q يمكن حسابها كالاتي (أنظر الشكل (12-2))

$$Q = \int_0^\infty \sigma \, 2\pi s \, ds = -QD \int_0^\infty \frac{s\, ds}{(s^2+D^2)^{3/2}} = -Q \qquad (69\text{-}2)$$

ومن هذا نجد أن مقدار الشحنة على السطح الموصل مساوية الى الشحنة السالبة

Q – للشحنة النقطية التي استبدلنا السطح الموصل بها • ويجب أن نلاحظ في حل المسائل الخاصة بالصور الكهربائية ان هذه الصور الكهربائية تقع في نقاط خارج المنطقة التي نود أن نحسب فيها شدة المجال حيث نجد الصورة في هـــذا المثال تقع الى يسار السطح الموصل بينما حسبنا المجال في الجهة اليمنى منه •



الشكل (12-2)

10-2 حلول معادلة لابلاس باستعمال المحاور المختلفة

لقد تطرقنا في الجزء الأول من هذا الفصل الى دراسة المجال الكهربائي لبعض الحالات الخاصة التي يكون توزيع المجال فيها منتظما وذلك باستعمال قانون كولوم تارة وقانون كاوس تارة أخرى • ونريد في هذا البند ان نناقش طرقا أخرى اكثر شمولية لدراسة الجهد الكهربائي والمجال الكهربائي وذلك باستعمال معادلة بوازان ولابلاس وسوف نركز دراستنا على استعمال معادلة لابلاس باعتبارها اكثر شمولية وأسهل حلا من معادلة بوازان • وقبل البدء بحل معادلة لابلاس لا بد لنا أن نذكر اننا نستعمل لهذا الحل المحاور المناسبة لحالات الحدود وابعاد وشكل الجسم المراد دراسته • فهناك المحاور المتعامدة والمحاور الاسطوانية والمحاور الكروية ... الخ • والدوال التي تحقق معادلة لابلاس تسمى دوال توافقية (Harmonic Functions) وتسمى الحلول الخاصة بها بالحلول التوافقية (Harmonic Solutions) لذلك نجد هناك دوال توافقية مختلفة تختلف باختلاف المحاور المستعملة, فهناك الدوال التوافقية للمحـاور المتعامدة Rectangular Harmonics والدوال التوافقية للمحـاور الكـروية (Spherical Harmonics) والدوال التوافقيـة للمحاور الاسطوانية (Cylindrical Harmonics) واختيار هذه الدوال ونوعها يعتمد على شكل الجسم وحالات الحدود المستعملة •

الدوال التوافقية للمحاور المتعامدة

يمكن اعتياديا ايجاد حلول لمعادلة لابلاس التي يمكن ان تناسب حالات الحدود فيها وذلك بطريقة فصل المتغيرات (Separation of variables) وهـذا يحـدث لجميع انواع المحاور ففي المحاور المتعامدة يمكن ايجاد حـلا يحقق معادلة لابلاس $(\nabla^2\phi = 0)$ على الشكل التالي :

$$\phi = X(x)\, Y(y)\, Z(z) \qquad (70\text{-}2)$$

حيث أن $X(x)$ ، $Y(y)$ ، $Z(z)$ هي دوال تعتمد فقط على x ، y ، z علـى التوالي ، واذا حقق هذا الحل معادلة لابلاس فان هذا الحل الوحيد سوف يكـون الحل الوحيد الصحيح لمعادلة لابلاس . وباستعمال المعادلة (70-2) في معادلـة لابلاس نحصل على :

$$YZ\frac{d^2X}{dx^2} + XZ\frac{d^2Y}{dy^2} + XY\frac{d^2Z}{dz^2} = 0 \qquad (71\text{-}2)$$

ولم تستعمل هنا التفاضل الجزئي لان الدوال X ، Y ، Z هي دوال لمتغير واحد فقط وبقسمة المعادلة (71-2) على XYZ نحصل على :

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0 \qquad (72\text{-}2)$$

وبما أن الحدين الثاني والثالث لا يعتمدان على x وان مجموع الحدود الثلاثة يساوي صفرا . اذن يجب ان يكون الحد الاول غير معتمد على x وتكون قيمته ثابتة . وهذا يصح بالنسبة للحدين الثاني والثالث وعلى هذا الاساس نحصل على :

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \alpha^2 \qquad (73a\text{-}2)$$

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \beta^2 \qquad (73\text{-}b\text{-}2)$$

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = \gamma^2 \qquad (73c\text{-}2)$$

أذ لن

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$$

وهذا معناه اننا يجب ان نحل هذه المعادلات التفاضلية الثلاث للحصول على الحل الكامل لمعادلة لابلاس وهذا يعتمد على حالات الحدود الفاصلة وشكل الجسم كما سوف نرى ذلك عند حل الامثلة ·

الدوال التوافقية للمحاور الكروية

لقد ذكرنا آنفا ان اختيارنا الى نوع الدوال التوافقية لحل معادلة لابلاس يعتمد على شكل الجسم وحالات الحدود · وفي حالة كون هذه الاجسام كروية فان من الانسب أن نستعمل المحاور الكروية لحل معادلة لإبلاس التي تأخذ الشكل التالي :

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} \qquad (74\text{-}2)$$

وسوف نركز دراستنا هنا على المجالات المتناظرة محوريا أي أن الجهد أو المجال الكهربائي لا يعتمد على المتغير ϕ وبهذا تأخذ معادلة لابلاس الشكل التالي :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)=0 \qquad (75\text{-}2)$$

ولنجرب طريقة فصل المتغيرات لحل هذه المعادلة التفاضلية فنفرض أن :

$$\phi(r,\theta) = R(r)P(\theta) \qquad (76\text{-}2)$$

حيث أن $R(r)$ هي دالة تتغير فقط تبعا مع r وان $P(\theta)$ هي دالة تتغير فقط مع θ · وباستعمال هذه المعادلة في المعادلة (75-2) وبالقسمة على RP نحصل على

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{P\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)=0 \qquad (77\text{-}2)$$

ومن ملاحظة المعادلة (77-2) نجد ان الحد الاول يعتمد فقط على r كما يعتمد الحد الثاني على θ فقط · اذن يجب ان يكون كل منهما مساويا الى مقدار ثابت وان مجموع هذين الثابتين يجب أن يكون صفرا لكي تحقق المعادلة (77-2)

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)=k && a\\&\frac{1}{P\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)=-k && b\end{aligned}\right\} \qquad (78\text{-}2)$$

والان لندرس المعادلة التفاضلية الاولى (78a-2) الخاصة بـ R وبعد اجراء بعض العمليات الرياضية البسيطة تأخذ هذه المعادلة الشكل التالي :

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} - kR = 0 \qquad (79\text{-}2)$$

ومن ملاحظة هذه المعادلة التفاضلية نجد الحل الذي يحققها هو :

$$R = r^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (80\text{-}2)$$

وبتعويض هذه القيمة للدالة R في المعادلة (79-2) نحصل على

$$k = n(n+1) \qquad (81\text{-}2)$$

كما أن تعويض الحل :

$$R = r^{-(n+1)} \qquad (82\text{-}2)$$

في المعادلة (79-2) نجد انه يحققها ايضا ويعطي نفس القيمة K اذن نستنتج من ذلك أن الحل الكامل للمعادلة التفاضلية (79-2) هو مجموع الحلين (80-2) + (81-2)

$$R = \left(Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}}\right) \qquad (83\text{-}2)$$

اذ أن A و B ثوابت لا على التعيين تعتمد قيمتها على شكل الجسم وحالات الحدود . ونلاحظ الان المعادلة التفاضلية الثانية (78b-2) والخاصة بـ θ اذ يمكن كتابتها بالشكل التالي :

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{dP}{d\theta}\right) + n(n+1)\sin\theta\, P = 0 \qquad (84\text{-}2)$$

اذا استخدمنا المقدار $K = n(n+1)$. وعندما نفترض ان $u = \cos\theta$ وان $du = -\sin\theta\, d\theta$ فان المعادلة (84-2) تأخذ الشكل التالي :

$$\frac{d}{du}\left[(1-u^2)\frac{dP}{du}\right] + n(n+1)P = 0 \qquad (85\text{-}2)$$

وتسمى هذه المعادلة بمعادلة لجندر (Legendre's Equation) وحلول المعادلة تسمى متعددة الحدود للجندر وتميز بالعدد n ، $P_n(u)$ او $P_n(\cos\theta)$ أي أن :

$$P = P_n(u) = P_n(\cos\theta) \qquad (86\text{-}2)$$

ويسمى n بدرجة متعددة الحدود للبجندر ونجد حدودا مختلفة لكل قيمة من قيم n
ومن الجدير بالذكر هنا أن المقدار $n' = -(n+1)$ يحقق ايضا المعادلة (85-2)
كما حققت المعادلة الخاصة بـ R وهذا معناه أن المعادلة (85-2) سوف لا تتغير
اذا عوضنا عن كل n فيها بالمقدار n' الذي يساوي $-(n+1)$. نستنتج من
هذا أن

$$P_{-(n+1)}(\cos\theta) = P_n(\cos\theta) \qquad (87\text{-}2)$$

وهذا يدل ان لكل حل من حلول معادلة لابلاس $\phi_1 = A r^n P_n(\cos\theta)$
هناك حل آخر هو :

$$\phi_2 = \frac{B}{r^{n+1}} P_{-(n+1)}(\cos\theta) = \frac{B}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta)$$

وعلى هذا الاساس فان مجموع هذين الحلين هو الحل الكامل لمعادلة لابلاس :

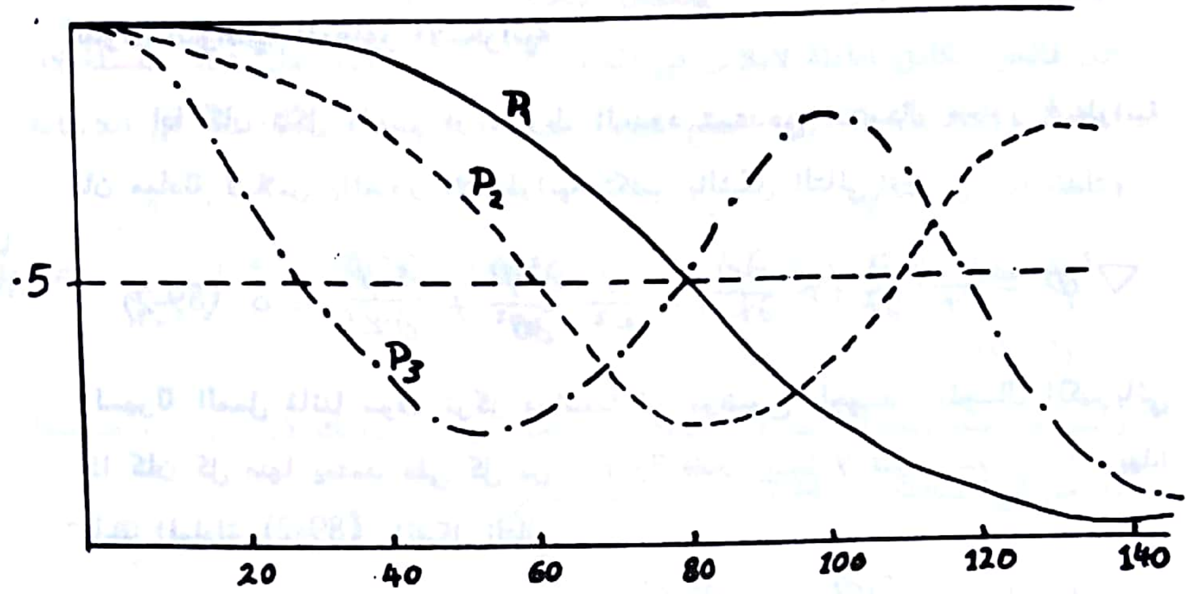
$$\phi = A r^n P_n(\cos\theta) + \frac{B}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta)$$

وقبل أن نترك هذا الموضوع نود أن نشير هنا الى كيفية الحصول على متعـــددة الحدود هذه مبتدئين بالعدد $n = 0$. عندما نعوض $n = 0$ في المعادلة التفاضلية (85-2) نجد أن الحل $P_0 = C$ وهو مقدار ثابت يحقق المعادلة . أما اذا كانت $n = 1$ نجد أن الحل $P_1 = D\cos\theta$ يحقق المعادلة التفاضلية (85-2) واذا كانت $n = 2$ فان الحل $P_2 = F(3\cos^2\theta - 1)$ يحقق المعادلة وهلم جرا ... وتثبت قيم كل من C ، D ، F ... الخ وفق شرط المعايرة $P_n(\pm) = (\pm 1)^n$.

وفيما يلي جدول بالحدود الستة الاولى من متعدد الحدود للبجندر بعد أجراء عملية المعايرة (normalization) ومعنى هذا هو اعطاء الدالة P_n القيمة واحـــد عندما تكون $(\cos\theta = 1)$ حسب الشرط اعلاه وهذا واضح في الشكل (13-2) .
فمثلا تثبت قيمة F في الدالة الخاصة $(n = 2)$ لكي نجعل قيمة P_2 تساوي واحدا عندما نعوض عن $\cos\theta$ بالمقدار واحد كما يلي :

$$P_2 = (3\cos^2\theta - 1)F = (3-1)F = 2F$$

اي يجب أن نضع $F = \frac{1}{2}$ لكي تكون قيمة P_2 مساوية الى واحد .



الشكل (2-13)

وبما أن المعادلة التفاضلية (2-77) تصح لكل القيم الموجبة لـ n من الصفر الى اللانهاية يمكن ان نكتب الحل الشامل لمعادلة لابلاس في المحاور الكروية على شكل سلسلة كالاتي:

$$\phi = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta) \qquad (88\text{-}2)$$

n	P_n
0	1
1	$\cos\theta$
2	$1/2\,(3\cos^2\theta - 1)$
3	$1/2\,(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$
4	$1/8\,(35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3)$
5	$1/8\,(63\cos^5\theta - 70\cos^3\theta + 15\cos\theta)$

مع العلم ان كل حل منفرد لكل قيمة من قيم n هو حل لمعادلة لابلاس .

الدوال التوافقية للمحاور الاسطوانية

اذا كان شكل الجسم او شروط الحدود تستدعي استعمال محاور اسطوانية فان معادلة لابلاس بالمحاور الاسطوانية تكتب بالشكل التالي :

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0 \qquad (89\text{-}2)$$

ولسهولة العمل فاننا سوف نركز دراستنا في موضوع الجهد والمجال الكهربائي اذا كان كل منها يعتمد على كل من r وθ فقط بينما لا تتغير مع z . وبهذا تأخذ المعادلة (89-2) الشكل التالي :

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}=0 \qquad (90\text{-}2)$$

ولنجرب هنا طريقة فصل المتغيرات مرة أخرى فاذا كان هذا ممكنا وفرضنا أن :

$$\phi = R(r)\,C(\theta) \qquad (91\text{-}2)$$

يعطي حلا لمعادلة لابلاس فان استعمال هذه المعادلة بالمعادلة (90-2) يعطينا :

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{C}\frac{d^2C}{d\theta^2}=0 \qquad (92\text{-}2)$$

وبما أن الحد الاول من المعادلة (92-2) يعتمد فقط على r وان الحد الثاني يعتمد فقط على θ فان كلا من هذين الحدين يجب ان يكون مساويا الى كمية ثابتة K .

$$\left.\begin{aligned}\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)&=k' &&a\\ \frac{1}{C}\frac{d^2C}{d\theta^2}&=-k' &&b\end{aligned}\right\} \qquad (93\text{-}2)$$

ومن ملاحظة المعادلة (93-2) نجد أن الحل r^n يحقق هذه المعادلة اذن :

$$\left.\begin{aligned}\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)&=n^2 &&a\\ \frac{1}{C}\frac{d^2C}{d\theta^2}&=-n^2 &&b\end{aligned}\right\} \qquad (94\text{-}2)$$

من ملاحظة المعادلة (94a-2) نجد ان الحل r^{-n} يحقق هذه المعادلة كما أن كلا من الحلين $\cos n\theta$ و $\sin n\theta$ يحققان المعادلة (94b-2) :

اذن فالحل الكامل لمعادلة لابلاس في المحاور الاسطوانية يكون على شكل سلسلة لان المعادلة التفاضلية (92-2) تصح لجميع قيم n الموجبة من الواحد الى اللانهاية وتأخذ الشكل التالي :

$$\phi_n = \sum_{n=1}^{n=\infty}(A_n r^n + B_n r^{-n})\cos n\theta + \sum_{n=1}^{n=\infty}(A_n r^n + B_n r^{-n})\sin n\theta$$

(95-2)

ونجد من هذه المعادلة انها لا تحتوي على الحد $n=0$ وذلك لان $n=0$ عندما تعوض في المعادلة (94-2) تعطينا الحل التالي :

$$R_0 = \ln r \quad , \quad C_0 = \phi$$

والجدول الاتي يبين لنا حلول معادلة لابلاس في المحاور الاسطوانية لبعض القيم الموجبة والسالبة :

n	ϕ_1	ϕ_2
+1	$r\cos\theta$	$r\sin\theta$
−1	$(1/r)\cos\theta$	$(1/r)\sin\theta$
+2	$r^2\cos 2\theta$	$r^2\sin 2\theta$
−2	$(1/r^2)\cos 2\theta$	$(1/r^2)\sin 2\theta$

(11-2) امثلة محلولة :

المثال (1) :

جد شدة المجال خارج سلك مشحون بصورة منتظمة كثافة شحنته الطولية λ.

الحـــل :ـ

لنفترض أن السلك وضع على امتداد X كما مبين في الشكل(14-2) والمطلوب

حساب شدة المجال في نقطة P كل عنصر طول dx من هذا السلك يحمل شحنة dq هي λdx واذا اعتبرنا أن هذا العنصر يمثل شحنة نقطية فان شدة المجال الحاصلة من هذه الشحنة النقطية في نقطة P هي :

$$d\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}\bar{e}_r \quad , \quad \bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\lambda dx}{r^2}\bar{e}_r$$

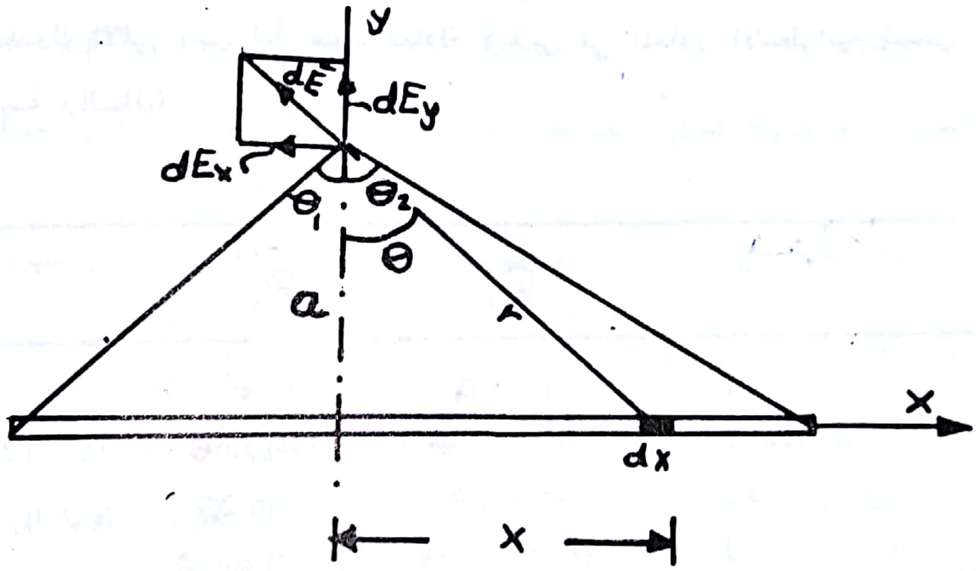
وبما أنه يمكن كتابة كل من :

$$\bar{E} = \bar{i}E_x + \bar{j}E_y$$

$$\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y$$

لان كلا من x ، y ، r في مستو واحد حيث أن :

$$x = r\sin\theta \quad , \quad y = r\cos\theta$$



الشكل (14-2)

لذلك فاننا نحصل على المركبتين E_x ، E_y كالاتي :

$$E_x = E\sin\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\lambda dx}{r^2}\sin\theta$$

$$E_y = E\cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\lambda dx}{r^2}\cos\theta$$

وفي هاتين المعادلتين نجد هناك عدة متغيرات هي x ، θ ، r وسوف نبسط عملنا باستبدال كل من r و x بالزاوية θ ، حيث أن :

$$x = a\tan\theta \quad , \quad dx = a\sec^2\theta\, d\theta \quad , \quad r = a\sec\theta$$

وعند تعويض هذه الكميات في المعادلتين السابقتين ووضع حدود التكامل نحصل على :

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{a}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta \, d\theta$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{a}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta \, d\theta$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

والان لنناقش حالتين خاصتين ٠ الحالة الاولى عندما تقع النقطة p على العمود المنصف للسلك المشحون عندما تكون $\theta_1 = -\theta_2 = \theta$ ويكون

$$E_x = 0$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a}\left[\sin\theta - \sin(-\theta)\right] = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}\sin\theta$$

اذ أن $-\sin\theta = \sin(-\theta)$

والحالة الثانية عندما يكون السلك طويلا جدا اذا ما قورن بالبعد a وبذلك تكون :

$$\theta_1 = -\frac{\pi}{2} \quad , \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$E_x = 0$$

ويكون :

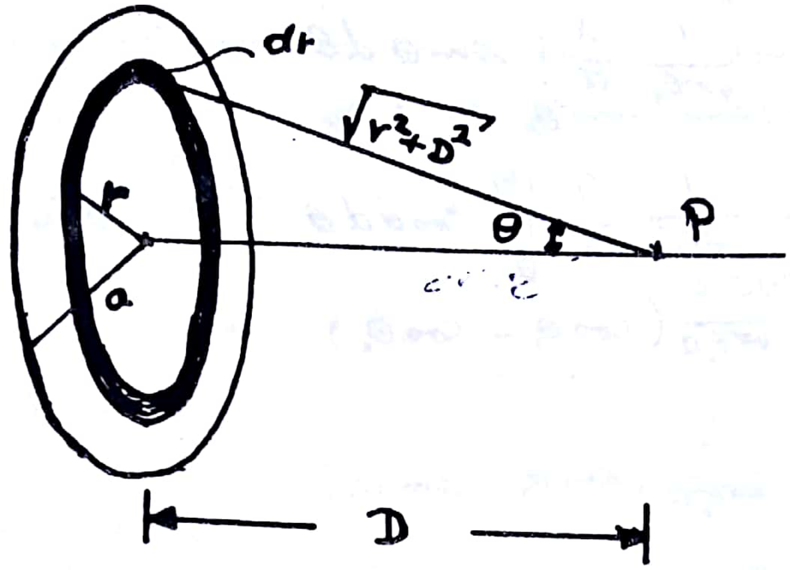
$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin -\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}$$

كما يمكن الحصول على نفس النتيجة لـ E_y بتعويض $\sin\theta = 1$ في المعادلة السابقة ونجد من هذا أنه في كلتا الحالتين السابقتين تكون محصلة المجال بالاتجاه y فقط لان مركبة المجال بالاتجاه x تكون مساوية الى الصفر لتناظر جزيء السلك ٠

المثال (2) :

شدة المجال في نقطة تقع على محور قرص صغير السمك نصف قطره (a)

مشحون بصورة منتظمة بشحنة كثافتها السطحية تساوي σ كما في الشكل (15-2)



الشكل (15-2)

الحـــل :ـ

نأخذ شريحة دائرية من هذا القرص نصف قطرها r وسمكها dr . ومقدار الشحنة على هـذه الشريحـة

$$dq = 2\pi r\, dr\, \sigma$$

وتكون شدة المجال بالنسبة لهذه الشريحة في نقطة P .

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{2\pi r \sigma\, dr}{(r^2+D^2)}$$

ولاسباب متعلقة بتناظر الشكل نجد أن هناك مركبة واحدة فقط لشدة المجال هي مركبة E_x وتكون:

$$E_x = 0 \quad \{ \quad E_y = 0$$

$$E_x = \int dE_x = \int dE \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^a \frac{2\pi r \sigma D\, dr}{(r^2+D^2)^{3/2}}$$

وللحصول على شدة المجال للقرص نكامل المعادلة الاخيرة فنحصل على :

$$E_x = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\,\frac{D}{(r^2+D^2)^{1/2}}\Bigg|_0^a = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1-\frac{D}{a^2+D^2}\right)$$

ومن هذه العلاقة الاخيرة نجد أن شدة المجال في نقطة قريبة من سطح القرص أي

عندما تقترب قيمة D من الصفر هي :

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

ويكون اتجاهها عموديا على مساحة القرص .

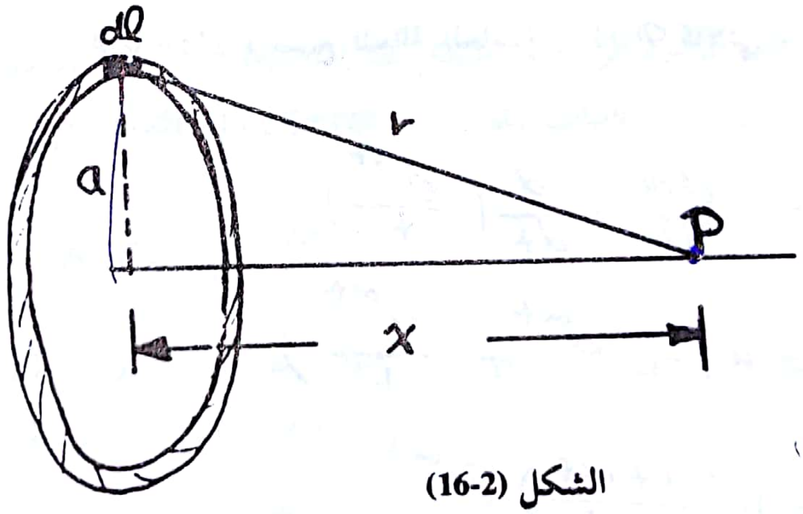
المثـال (7) :

الجهد في نقطة تقع على محور حلقة نصف قطرها a مشحونة بشحنة منتظمة مقدارها q كما في الشكل (16-2) .

الحـــل :ــ

مقدار الشحنة على عنصر تفاضلي مقداره dl هو dq

$$dq = \frac{q}{2\pi a}\, dl$$



الشكل (16-2)

ولحساب الجهد في نقطة P الواقعة على محور الحلقة والتي تبعد بمسافة x عن مركزها . نحسب الجهد بالنسبة للشحنة dq ثم نأخذ التكامل بالنســبة لمحيـط الحلقة :

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{q}{2\pi a}\,\frac{dl}{r}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\,\frac{2\pi a}{2\pi a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (a^2+x^2)^{1/2}}$$

ويمكن حساب شدة المجال من هذه العلاقة وذلك باستعمال العلاقة التالية : $E = -\nabla \phi$.

في هذه الحالة تكون

$$E_x = \frac{d\phi}{dx} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

(لماذا توجد هناك مركبة واحدة للمجال الكهربائي هي بالاتجاه x) ؟

المثـال (4):

اذا علمت ان الجهد لتوزيع كروي معين لشحنة كهربائية هو كالاتي :

$$\phi(r) = k \frac{e^{-\alpha r}}{r}$$

حيث أن كلا من k و α ثوابت . استعمل معادلة الانحدار $E = -\frac{d\phi}{dr}$

للحصول على علاقة خاصة بشدة المجال لهذا النوع من توزيع الشحنات .

الحـــل :ــ

$E = -\nabla \phi$ وتصبح للحالة الخاصة $\phi(r)$ كالاتي :

$$E = -\frac{d\phi}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-\alpha r}}{r}\right)$$

$$= k\left(\frac{\alpha}{r} e^{-\alpha r} + \frac{e^{-\alpha r}}{r^2}\right)$$

$$= k\left(\frac{1 + \alpha r}{r^2}\right) e^{-\alpha r}$$

ويكون اتجاهه باتجاه r .

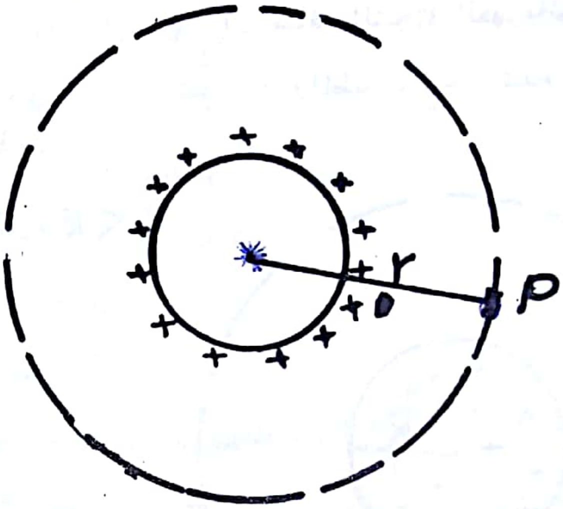
المثـال (5):

كرة مشحونة بشحنة مقدارها Q . استعمل قانون كاوس لايجاد E في أي نقطة خارج الكرة ثم استعمل العلاقة $E = -\nabla \phi$ لاستخراج العلاقة الخاصة بالجهد .

الحــــل :ــ

السطح الكاوسي في هذه الحالة هو كرة وهمية نصف قطرها هو بعد النقطة P عن مركز الكرة r كما في الشكل (17-2) .

$$\int E \cos\theta \, ds = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



الشكل (17-2)

ومن التناظر الموجود في هذه المسألة نجد أن اتجاه E يكون عموديا على السطح الكاوسي وعلى هذا الاساس يكون ($\cos\theta = 1$) وأن الشحنة هي مجموع الشحنة الموجودة على الكرة Q

$$\int E \, ds = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

وبما أن نقاط السطح الكاوسي تبعد بأبعاد متساوية من مركز الكرة لذلك فان شدة المجال على هذا السطح هي متساوية وكل منها يشير الى الخارج باتجاه نصف القطر r .

$$E \int ds = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \qquad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\phi = -\int_{\infty}^{r} E \, dr = -\int_{\infty}^{r} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

المثـال (6):

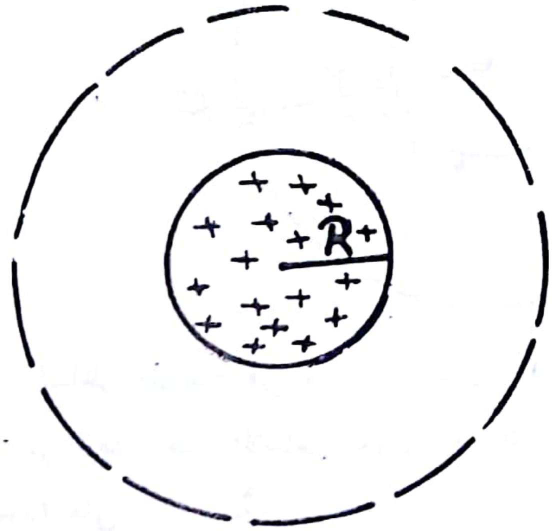
شدة المجال لتوزيع حجمي لشحنة منتظمة على شكل كرة .

الحـــل :ـ

تصور ان لدينا شحنة مقدارها Q موزعة بصورة منتظمة على كرة نصف قطرها R كما في الشكل (2-18) حيث أن كثافة الشحنة الكهربائية في أي نقطة من نقاط هذا الحجم الكروي هي ρ . والمطلوب ايجاد شدة المجال . اولا : في نقطة خارج الكرة $r > R$.

ثانيا : في نقطة داخل الكرة $r < R$

أولا : خارج الكرة :



الشكل (2-18)

نأخذ الطريقة التي أتبعت في حل المثال (5) نفسها مع مراعاة ان الشحنة في هذه الحالة

$$Q = \frac{4}{3}\pi \rho R^3$$

وعند تطبيق قانون كاوس نحصل على :

$$\int E \cos\theta \, ds = \int \frac{\rho \, d\tau}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{4}{3\epsilon_0}\pi \rho R^3$$

$$E = \frac{\pi \rho R^3}{3\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

ثانيا : داخل الكرة :

في هذه الحالة فان الشحنة الفعالة Q' التي يحتويها السطح الكاوسي هي :

$$Q' = Q\frac{\frac{4}{3}\pi\rho r^3}{\frac{4}{3}\pi\rho R^3} = Q\left(\frac{r^3}{R^3}\right)$$

ونطبق قانون كاوس

$$\int E\cos\theta\, ds = \int\frac{\rho\, d\tau}{\epsilon_0} = \frac{Q'}{\epsilon_0}$$

$$E.\,4\pi r^2 = \frac{Q\, r^3}{\epsilon_0 R^3}$$

$$E = \frac{Q r}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

ومن هذه العلاقة نجد أن هناك نقطتين جديرتين بالملاحظة :

١ – ان شدة المجال في مركز الكرة حسب العلاقة الاخيرة = صفرا .

٢ – باستعمال هذه العلاقة او العلاقة السابقة التي حصلنا عليها في الجزء الاول من هذا المثال فان شدة المجال على السطح الخارجي لهذه الكرة هو :

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

وهاتان النقطتان هما حالات الحدود التي يجب أن تحققها العلاقات التي نحصل عليها ليكون الحل صحيحا وهو الحل الوحيد كما جاء في مبرهنة الحل الوحيد . وقبل ان نترك هذا المثال نود أن نشير الى ما يلي :

يمكن كتابة قانون كاوس بالشكل التالي اذا كان توزيع الشحنة توزيعا حجميا

$$\int E\cos\theta\, ds = \int\frac{\rho\, d\tau}{\epsilon_0}$$

فاذا كانت ρ غير منتظمة فلا يمكننا ان نستعمل الطريقة التي اتبعت في حل المثال السابق ثانيا وانما يجب ان نأخذ تغير ρ بنظر الاعتبار . واذا استعملنا المحاور الكروية فاننا نحسب الحجم $d\tau$ الذي يعد عنصر الحجم التفاضلي ويساوي في هذه الحالة الى

$$d\tau = r\, d\theta\; r\sin\theta\, d\varphi\, dr$$

وعلى هذا الاساس يأخذ الطرف الايمن من المعادلة الشكل التالي :

$$\int \frac{\rho\, d\tau}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_{\tau} \rho\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin\theta\, d\theta \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi \int_{r=0}^{r=R} \rho\, r^2 dr$$

لقد وضعت ρ داخل التكامل الخاص بـ r لانها غالبا ما تكون متغيرة مع r

$$\int \frac{\rho\, d\tau}{\epsilon_0} = \frac{4\pi}{\epsilon_0}\int_{r=0}^{r=R} \rho\, r^2 dr$$

فاذا كانت ρ ثابتة فيمكن اخراجها من التكامل وبأخذ التكامل الخاص بـ r.

نحصل على :

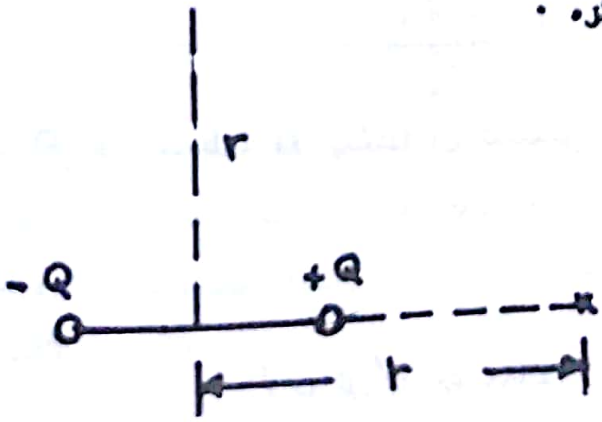
$$\int \frac{\rho\, d\tau}{\epsilon_0} = \frac{4\pi\rho}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{3}R^3\right) = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$= \frac{Q}{\epsilon_0}$$

أما اذا كانت ρ متغيرة مع r فاننا نعوض عنها داخل التكامل الخاص بالدالة التي يمثل تغيرها مع r ثم نختزل التكامل ونكمل حل المسالة .

المثـــال (7) :

أوجد الجهد وشدة المجال لثنائي قطب عزمه p . أولا : في نقطة تقع على امتداد طوله وتبعد مسافة r عن مركزه . ثانيا : في نقطة تقع على العمود المنصف له وتبعد مسافة r من مركزه .



الشكل (19-2)

الحـــل :ـ

انظر الشكل (19-2) ٠

أولا :

$$\phi = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\phi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$E_r = \frac{p\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^3}$$

ثانيا :

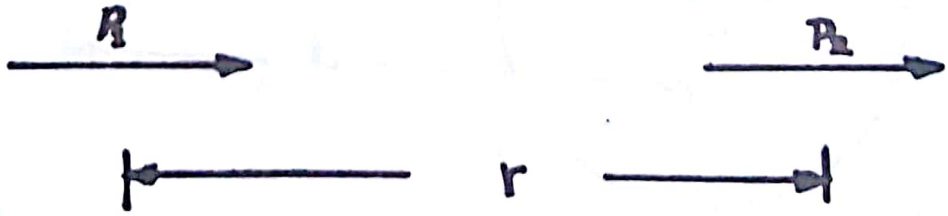
$$E_0 = 0$$

$$\phi = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} = 0$$

$$E_\theta = \frac{p\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

المثـال (8) :

وضع ثنائيا قطب عزم الاول P_1 وعزم الثاني P_2 كما في الشكل (20-2) أوجد القوة ، العزم الذي يؤثر بهما كل ثنائي قطب على الاخر ثم أحسب الطاقـة الكامنة المتبادلة بين الاثنين ٠



الشكل (20-2)

الحـــل :ـ

القـوة

$$F_r = P_2\left(\frac{\partial E_r}{\partial r}\right) = P_2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{P_1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\right)$$

$$= -\frac{3P_1P_2}{2\pi\epsilon_0 r^4}$$

العـزم:

$$\Gamma = PE_r \sin\theta = P_2\left(\frac{P_1}{2\pi\epsilon_0 r^3}\right)\sin\theta = 0$$

الطاقة الكامنة:

$$\bar{P}\cdot\bar{E} = -PE_r \cos\theta$$

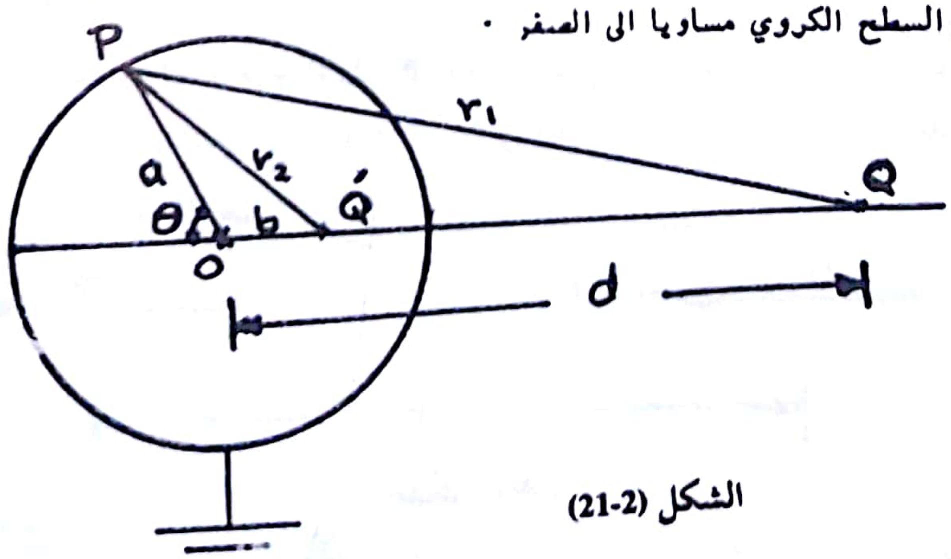
$$= -P_2\left(\frac{P_1}{2\pi\epsilon_0 r^3}\right)\cos\theta = -\frac{P_1P_2}{2\pi\epsilon_0 r^3}$$

المثـال (٩):

وضعت شحنة نقطية مقدارها $+Q$ أمام كرة موصلة نصف قطرها a متصلة بالارض تبعد بمسافة d عن مركزها · جد مقدار وموقع الشحنة الصورة للشحنة النقطية ·

الحـــل :ــ

لحل هذا المثال نتبع طريقة الصور الكهربائية حيث نبعد الكرة الموصلة ونحاول أن نجد مقدار الشحنة (صورة الشحنة) والمكان الذي نضعها فيه لكي تجعل الجهد على السطح الكروي مساويا الى الصفر ·



الشكل (21-2)

نفرض ان الشحنة Q تقع على مسافة d من مركز الكرة الموصلة وان الشحنة الصورة Q' تقع على مسافة b من مركز الكرة كما في الشكل (21-2) · ولنحسب الجهد

بتأثير كل من الشحنتين Q وQ' في نقطة p التي تقع على سطح الكرة التي نصف قطرها a والتي تقع تماما بمكان الكرة الموصلة التي ابعدناها عن مكانها .

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{r_1} + \frac{Q'}{r_2}\right)$$

اذ أن

$$r_1 = (d^2 + 2ad\cos\theta + a^2)^{1/2}$$

$$r_2 = (a^2 + 2ab + b^2)^{1/2}$$

والان لنفرض ان $b = \frac{a^2}{d}$ وبتعويض هذه القيمة لـ b في المعادلتين الخاصتين

بـ r_1 و r_2 نجد أن الجهد في نقطة p هو :

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q + \frac{d}{a}Q'}{(d^2+2ad\cos\theta+a^2)^{1/2}}\right)$$

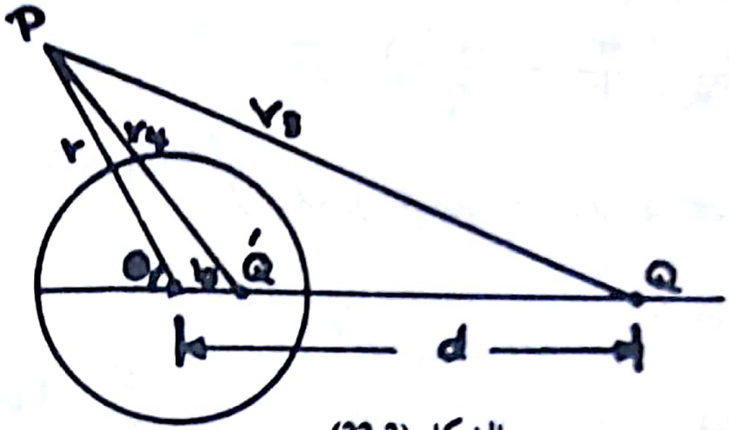
والان لو فرضنا ان

$$Q' = -\frac{a}{d}Q$$

لكان ϕ يساوي صفرا وهي الحالة التي كانت عليها فيما لو بقيت الكرة الموصلة متصلة بالارض (حالات الحدود) . والان لنتصور المثال بالشكل التالي . لو كان لدينا شحنتان نقطيتان احداها Q والاخرى تساوي $-\frac{a}{d}Q$ فان الجهد

يساوي صفرا في أي نقطة تقع على سطح كرة نصف قطرها a بحيث ان $a^2 = bd$ حيث أن (d) هو بعد الشحنة الاولى عن مركز الكرة و b هو بعد الشحنة الثانية عن مركز الكرة أيضا . والان لو اننا وضعنا كرة موصلة متصلة بالارض بمكان هذه الكرة الوهمية التي نصف قطرها a فلن يحدث أي تأثير على المجال والجهد خارج الكرة ، وبهذا تعتبر الشحنة Q' صورة الشحنة Q لهذه الكرة الموصلة المتصلة بالارض وذلك بفعل الشحنة Q القريبة منها . ولاجل ذلك يجب ان نحسب شدة المجال E_r في أي نقطة في الفراغ ، الشكل (2-22) وذلك باستعمال العلاقة $\bar{E} = -\nabla\phi$ ثم نحسب E_r على سطح الكرة ونحسب الشحنة المحتثة على الكرة من العلاقة $\sigma = \epsilon_0 E_r$ فالجهد في نقطة P الواقعة في أي نقطة في

الفراغ كما في الشكل (22-2) آخذين بنظر الاعتبار ان $Q' = -\frac{a}{d} Q$ وان $b = \frac{a^2}{d}$



الشكل (22-2)

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{r_3} - \frac{\frac{a}{d}Q}{r_4}\right)$$

حيث ان

$$r_3 = (d^2 + r^2 + 2rd\cos\theta)^{1/2}$$

$$r_4 = (b^2 + r^2 + 2br\cos\theta)^{1/2}$$

$$r_4 = \left\{\left(\frac{a^2}{d}\right)^2 + r^2 + 2\frac{a^2}{d} r\cos\theta\right\}^{1/2}$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{Q(r + d\cos\theta)}{r_3^3} - \frac{aQ(r + \frac{a^2}{d}\cos\theta)}{d\, r_4^3}\right\}$$

وعلى سطح الكرة عندما تكون $r = a$

$$\sigma = \epsilon_0 E_r = -\frac{Q(d^2 - a^2)}{4\pi a(d^2 + a^2 + 2da\cos\theta)^{3/2}}$$

واذا اردنا أن نحسب الشحنة الكلية على سطح الكرة فاننا نأخذ التكامل السطحي لكثافة الشحنة

$$Q' = \int_0^{\pi} \sigma\, 2\pi a^2 \sin\theta\, d\theta = -\frac{a}{d} Q$$

وهذا هو الجواب المتوقع .

المثال (10) :

أثبت أن جهد الشحنة النقطية (قانون كولوم) يحقق معادلة لابلاس.

الحل :-

ان جهد الشحنة النقطية في نقطة تبعد مسافة r منها حسب قانون كولوم هو كالاتي :

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

وباستعمال معادلة لابلاس بالمحاور الكروية اخذين بنظر الاعتبار أن ϕ دالة تتغير فقط مع r نحصل على :

$$\nabla^2\phi = \nabla^2\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\right)$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{1}{r^2}\right) = 0$$

المثال (11):

استعمل معادلة بوازان لايجاد شدة المجال داخل حجم كروي فيه شحنات علما بان كثافة الشحنة الحجمية ثابتة وتساوي ρ .

الحل :-

معادلة بوازان تكتب في هذه الحالة بالشكل التالي :

$$\nabla^2\phi_i = -\rho/\epsilon_0$$

وبما أن التغير يحصل فقط باتجاه r تأخذ معادلة بوازان الشكل التالي :

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi_i}{dr}\right) = -\rho/\epsilon_0$$

$$\int \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\phi_i}{dr}\right) = \left[-\frac{\rho}{\epsilon_0} r^2 dr\right] \times dr$$

$$r^2 \frac{d\phi_i}{dr} = -\frac{\rho r^3}{3\epsilon_0} + C$$

$$E_i = -\frac{d\phi_i}{dr} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} - \frac{c}{r^2}$$

حيث ان c ثابت التكامل . وبما ان c تجعل قيمة $E = \infty$ في مركز الكرة

∴ يجب ان تكون قيمتها تساوي صفرا . وبهذا يكون لدينا:

$$E_i = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

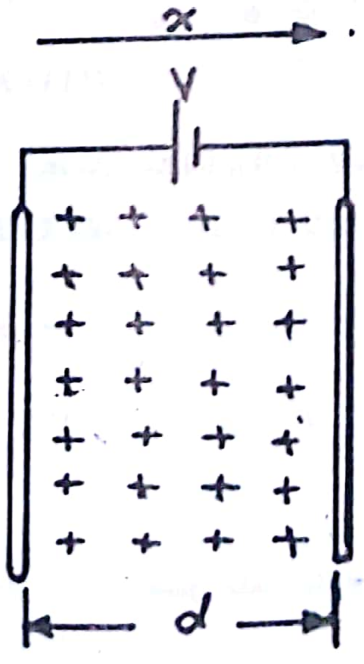
المثال (12): $\propto$

ربطت صفيحتا متسعة ذات لوحين متوازيين المسافة بينهما d ببطارية فرق جهدها يساوي V . فاذا كانت كثافة الشحنة في الفراغ بين الصفيحتين تساوي ρ وهي منتظمة (الشكل 23-2) ، أوجد في كل نقطة داخل المتسعة العلاقة الخاصة لكل من

(١) الجهد بالنسبة للصفيحة الموجبة

(2) شدة المجال .

(3) كثافة الشحنة σ على كل من صفيحتي المتسعة .



$V = -\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} + Aa$

$\therefore A = \frac{-V}{a} + \frac{\rho a}{2\epsilon_0}$

الشكل (23-2)

الحـــل :ـ

(١) نلاحظ من طبيعة المثال أن الجهد ϕ يتغير باتجاه واحد عموديا على مستوى

الصفيحتين ، وليكن الاتجاه x ولحل هذا المثال نستعمل معادلة بوازان .

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

وبما أن تغير الجهد يحدث فقط بالاتجاه x تأخذ معادلة بوازان الشكل التالي :

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

وحالات الحدود في هذا المثال هي 1- عندما يكون $x=0$ فان $\phi=\phi_0$

2- عندما يكون $x=d$ فان $\phi=\phi_0 - V$

بأخذ التكامل لطرفي معادلة بوازان نحصل على :

$$\frac{d\phi}{dx} = -\frac{\rho x}{\epsilon_0} + A$$

$$\phi = -\frac{\rho x^2}{2\epsilon_0} + Ax + B$$

اذ أن A، B هي ثوابت التكامل التي تعتمد قيمتها على حالات الحدود .

وعند استعمال حالة الحدود الاولى في المعادلة الاخيرة نحصل على

$$B = \phi_0$$

وعند استعمال حالة الحدود الثانية في نفس المعادلة نحصل على

$$A = -\frac{V}{d} + \frac{\rho d}{2\epsilon_0}$$

وبتعويض هذه القيم لكل من A و B في المعادلة التي حصلنا عليها لـ ϕ ينتج

$$\phi = -\frac{\rho x^2}{2\epsilon_0} + \left(\frac{\rho d}{2\epsilon_0} - \frac{V}{d}\right)x + \phi_0$$

(2) بما أن تغير الجهد هو فقط بالاتجاه x

$$E_x = -\nabla\phi = -\frac{d\phi}{dx}$$

$$E_x = \left[\frac{V}{d} + \frac{\rho}{2\epsilon_0}(2x-d)\right]$$

نلاحظ من هذه العلاقة انه اذا كانت ρ تساوي صفرا فان قيمة $E_x = \frac{V}{d}$

$$\frac{d\phi^2}{dx^2}$$

وهي العلاقة التي تربط بين شدة المجال الكهربائي والجهد للمتسعة ذات اللوحين المتوازيين الاعتيادية

(3) لحساب σ على كل من اللوحين نستعمل العلاقتين التاليتين :

$$\sigma_+ = \epsilon_0 (E_x)_{x=0} \quad \text{على اللوح الموجب}$$

$$\sigma_- = -\epsilon_0 (E_x)_{x=d} \quad \text{على اللوح السالب}$$

وبهذا نحصل على :

$$\sigma_+ = \epsilon_0 \frac{V}{d} - \frac{\rho d}{2} = \epsilon_0 E_0 - \frac{\rho d}{2}$$

$$\sigma_- = -\frac{\epsilon_0 V}{d} - \frac{\rho d}{2} = -\epsilon_0 E_0 - \frac{\rho d}{2}$$

اذ أن E_0 هي شدة المجال المنتظم بين الصفيحتين في حالة عدم وجود شحنة في الفراغ بين اللوحين. من هاتين العلاقتين الاخيرتين نلاحظ أن كثافة الشحنة على كل من الصفيحتين في حالة عدم وجود شحنة في الفراغ بين الصفيحتين هي :

$$\sigma_+ = \epsilon_0 E_0$$

$$\sigma_- = -\epsilon_0 E_0$$

المثال (13):

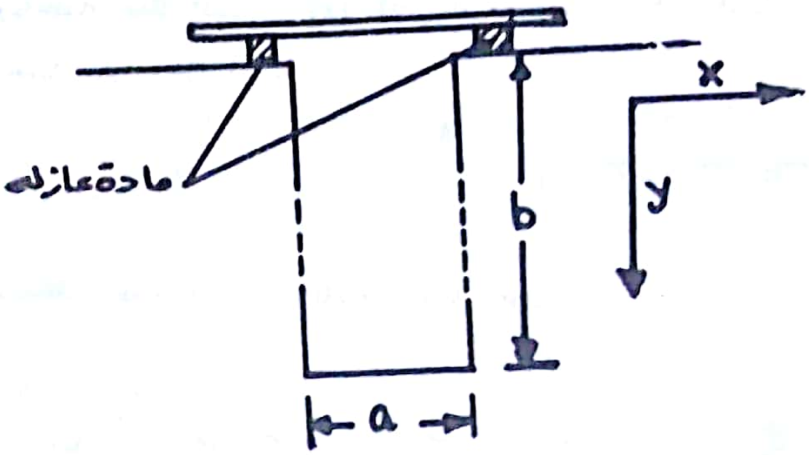
صنع شق عميق على شكل متوازي مستطيلات داخل قطعة كبيرة من مادة موصلة ثم غطي هذا الشق بصفيحة موصلة معزولة جهدها:

$$\phi = \phi_0 \sin \frac{\pi}{a} x$$

اوجد الجهد في أي نقطة داخل الشق ، الشكل (24-2) .

الحل :-

من ملاحظة الشكل (24-2) نستنتج انه يجب أن تستعمل الحلول التوافقية المتعامدة لحل هذه المسالة اخذين بنظر الاعتبار أن ϕ تتغير مع كل من x، y ولا تتغير مع z ومن ملاحظة هذا الشكل مع المعادلة المعطاة لـ ϕ في هذا المثال نجد حالات الحدود التالية :



الشكل (24-2)

عندما تكون $x = 0$ فان $\phi = 0$

عندما تكون $x = a$ فان $\phi = 0$

عندما تكون $y = 0$ فان $\phi = \phi_0 \sin \frac{\pi}{a} x$

عندما تكون $y = b$ فان $\phi = 0$

وبما أن الجهد لا يعتمد على المتغير z فان المعادلة (73-2) تأخذ الشكل التالي :

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \alpha^2 \quad , \quad \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \beta^2 \quad , \quad \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0$$

حيث أن $\alpha^2+\beta^2 = 0$ أي أن $\beta^2 = -\alpha^2$

وبهذا نجد أن: $\frac{d^2X}{dx^2} = -\beta X^2 \quad , \quad \frac{d^2Y}{dy^2} = \beta^2 Y$

والحل العام لهاتين المعادلتين التفاضليتين هو :

$$X = A_n \cos \beta_n x + B_n \sin \beta_n x$$

$$Y = C_n e^{\beta_n y} + D_n e^{-\beta_n y}$$

(1) وباعتماد حالة الحدود الاولى التي تتحقق عندما تكون القيمة $A=0$ وبهذا نحصل على الحل الكامل :

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \beta_n x \left(C_n e^{\beta_n y} + D_n e^{-\beta_n y} \right)$$

(2) وتتحقق حالة الحدود الثانية عندما تكون : $\beta_n = \frac{n\pi}{a}$ ...

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{a} x \left(C_n e^{\frac{n\pi}{a} y} + D_n e^{\frac{-n\pi}{a} y} \right)$$

(3) وتتحقق حالة الحدود الثالثة عندما تكون $C_n = 0$ آخذين بنظر الاعتبار ان الشق عميق جدا $b \gg a$ اذ أن $\exp.(-\frac{n\pi}{a})=0$ لذلك يأخذ الحل الشكل التالي :

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} B_n' \sin \frac{n\pi}{a} x \, e^{-\frac{n\pi}{a} y}$$

اذ ان الثابت B_n' استبدل بحاصل ضرب الثابتين D_n A_n •

(4) وحالة الحدود الاخيرة تتحقق عندما تكون $B_1' = \phi_o$ وتحذف بقية المعاملات الاخرى الخاصة بـ B_n' وبهذا نحصل على :

$$\phi = \phi_o \sin \frac{\pi}{a} x \, e^{-\frac{\pi}{a} y}$$

وبما أن هذا الحل حقق معادلة لابلاس لجميع حالات الحدود المبينة في المثال اذن يكون هذا الحل هو الحل الوحيد الصحيح حسب مبرهنة الحل الوحيد •

المثــال (14) :

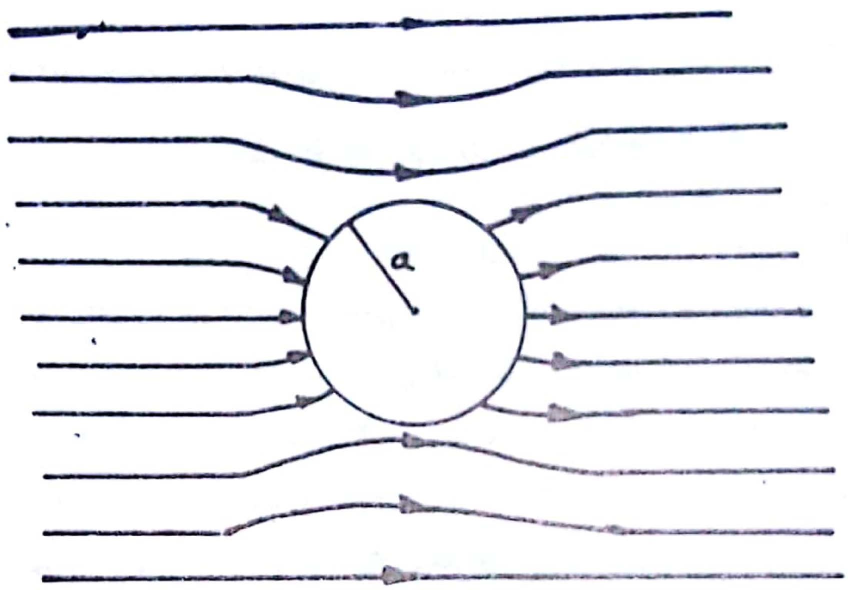
وضعت كرة موصلة صغيرة نصف قطرها a معزولة لا تحمل شحنات داخل مجال كهربائي منتظم شدته E_o كما في الشكل (2-25) استعمـل حلـول معادلة لابلاس في المحاور الكروية لايجاد الجهد ثم شدة المجال في أي نقطة خارج هـذه الكرة •

الحـــل :ـ

العلاقة بين شدة المجال والجهد في اي نقطة في الفراغ قبل أن نضع الكرة في هذا المجال او في اية نقطة بعيدة جدا عن مركز الكرة $r \gg a$ هي

$$E = -\frac{d\phi}{dz}$$

$$\phi = -E_0 z = -E_0 r \cos\theta$$



الشكل (25-2)

وبما أن الحيز الذي وضعت به الكرة لا يحتوي على شحنات طليقة لذا فاننا سوف نستعمل معادلة لابلاس $\nabla^2\phi = 0$ لايجاد الجهد وشدة المجال في أيـة نقطة خارج الكرة الموصلة ولاسباب تتعلق بطبيعة المثال والتناظر فيه فان الجهد على سطح الكرة يكون مساويا الى الصفر • وعلى هذا الاساس فاننا نلاحظ حالتي الحدود التاليتين :

(١) عندما تكون $r = a$ $\phi = 0$

عندما تكون $r \gg a$ $\phi = -E_0 r \cos\theta$

والعلاقة الثانية ناتجة من كون المجال لا يتأثر بالكرة حيث اعتبرنا أن نصف قطرها صغير جدا في نقاط بعيدة عن مركزها • ولحل هذه المسالة نرجع الى متعددة الحدود لليجندر (Legendre's Polynomials) فنجد أن الحل الوحيد الذي يناسب حالات الحدود في هذه المسالة هي عندما يكون $n = 1, n = 0$ اذ أن بقية الحلول

تحتوي على معاملات θ cos ذات أس أكبر من الواحد والتي لا تنسجم وحالات الحدود الموجودة وعندما ناخذ هذا بنظر الاعتبار نجد أن الحل المناسب لهذه المسالة هو :

$$\phi = A_0 + \frac{B_0}{r} + A_1 r \cos\theta + \frac{B_1}{r^2}\cos\theta$$

ولايجاد الثوابت A_0 ، A_1 ، B_0 ، B_1 يجب ان نطبق حالات الحدود على هـذه المعادلة :

(1) عندما تكون $r \to \infty$ تكون $\phi = E_0 r \cos\theta$

$$\phi = -E_0 r \cos\theta = A_0 + A_1 r \cos\theta$$

حيث ان الحدين الثاني والرابع لم يظهرا في هـذه العلاقة لان r واقعة في المقام وقيمتها اقتربت من اللانهاية معنى ذلك ان الحدين يساويان صفرا · وبملاحظة العلاقة الاخيرة التي تصح لكل قيمة من قيم θ نستنتج ان A_0 يجب ان تساوي صفرا وأن $A_1 = -E_0$ وبهذا نكون قد استخرجنا قيمة كل من الثابتين A_0 ، A_1

(2) على سطح الكرة اي عندما $r = a$ فان $\phi = 0$ عندما نطبق هذا في المعادلة الاصلية آخذين بنظر الاعتبار $A_0 = 0$ وان $A_1 = -E_0$ نحصل على :

$$\phi = 0 = \frac{B_0}{a} - E_0 a \cos\theta + \frac{B_1}{a^2}\cos\theta$$

وبما ان هذه العلاقة تصح لكل قيم الزاوية θ نستنتج أن $B_0 = 0$ وان $B_1 = E_0 a^3$

وبهذا نكون قد حصلنا على الثابتين B_0 و B_1 والان لنعوض قيم كل من A_0 ، A_1 ، B_0 ، B_1 التي حصلنا عليها من تطبيق حالات الحدود في المعادلة الاصلية فنحصل على :

$$\phi = -E_0 r \cos\theta + \frac{E_0 a^3}{r^2}\cos\theta$$

$$\phi = -E_0 r \cos\theta \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)$$

ويعتبر هذا هو الحل الوحيد والصحيح للجهد حسب نظرية الحل الوحيد لانه حقق معادلة لابلاس وكذلك حالات الحدود في المسالة · حيث نجد من المعادلة الاخيرة

ان $\phi = 0$ عندما تكون $r = a$ وان $\phi = -E_0 r \cos\theta$ عندما تكون $r \Rightarrow \infty$

وللحصول على شدة المجال E نستعمل العلاقة $\bar{E} = -\nabla\phi$ اذ ان :

$$E_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = E_0 \cos\theta \left(1 + 2\frac{a^3}{r^3}\right)$$

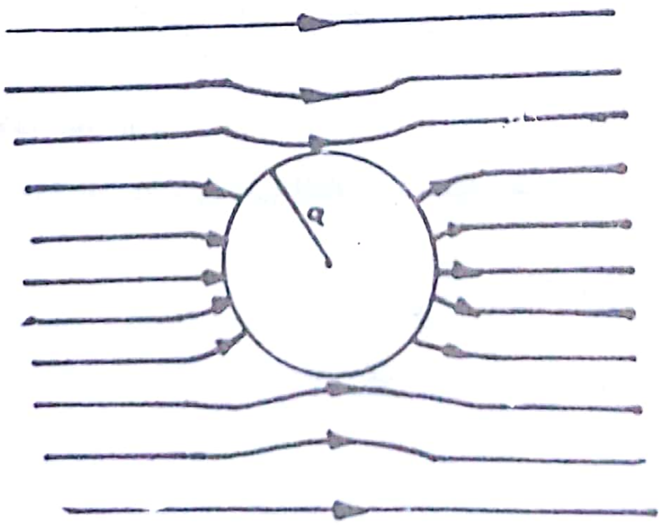
$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -E_0 \sin\theta \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)$$

المثال (15) :

وضعت اسطوانة من مادة موصلة معزولة لا تحمل شحنات نصف قطر قاعدتها (a) في مجال كهربائي منتظم شدته E_0 بحيث يكون اتجاه المجال عموديا على محور الاسطوانة كما في الشكل (2-26) . استعمل حلول معادلة لابلاس في المحاور الاسطوانية لايجاد الجهد وشدة المجال في اية نقطة خارج هذه الاسطوانة .

الحل :

نفرض أن a صغيرة بحيث أن الاسطوانة لا تؤثر على شدة المجال في نقاط



الشكل (2-26)

بعيدة جدا عن الاسطوانة أي أن العلاقة $\phi = -E_0 r \cos\theta$ تصح في هذه النقاط .
نلاحظ أن الحيز الذي وضعت فيه الكرة خال من الشحنات الطليقة لذا فاننا سوف

نستعمل معادلة لابلاس $\nabla^2\phi=0$ لحل هذه المسالة وهي تصح لكل النقاط (خارج الاسطوانه) التي يوجد فيها المجال الكهربائي . وحالات الحدود في هذه المسالة هي :

عندما تكون $r=a$ فان $\phi=0$

عندما تكون $r\gg a$ فان $\phi=-E_0 r\cos\theta$

وبما ان $\cos\theta$ هو الدالة الوحيدة لـ θ التي ظهرت في حالات الحدود لذا فاننا نتوقع الحل التالي :

$$\phi = Ar\cos\theta + \frac{B\cos\theta}{r}$$

ولايجاد الثوابت A و B يجب أن نطبق حالات الحدود

(1) عندما تكون $r\Rightarrow\infty$ فان $\phi=-E_0 r\cos\theta$

$$\phi = -E_0 r\cos\theta = Ar\cos\theta$$

حيث أن الحد الثاني يصبح صفرا لأن r تقترب من اللانهاية . ومن هذا نجد أن $A=-E_0$.

(2) عندما تكون $r=a$ فان $\phi=0$

$$\phi=0=-E_0 a\cos\theta+\frac{B\cos\theta}{a}$$

ومن هذه العلاقة نجد أن:

$$B=-a^2E_0$$

وبتعويض قيم الثابتين A ، B في المعادلة الاصلية نحصل على الحل التالي :

$$\phi=-E_0 r\cos\theta+\frac{E_0a^2}{r}\cos\theta$$

$$\phi=-E_0 r\cos\theta\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)$$

وبما أن هذه العلاقة تحقق معادلة لابلاس وانها تحقق حالات الحدود فانها تمثل الحل الصحيح الوحيد لهذه المسالة . ولايجاد شدة المجال في أي نقطة خارج الاسطوانة نستعمل العلاقة $E=-\nabla\phi$ اذ أن ...

$$E_r=-\frac{\partial\phi}{\partial r}=E_0\cos\theta+E_0\frac{a^2}{r^2}\cos\theta$$

$$= E_0 \cos\theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -E_0 \sin\theta + E_0 \frac{a^2}{r^2} \sin\theta$$

$$= -E_0 \sin\theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$$

أسئلة وتمارين

(1-2) عرف المجال الكهربائي ، ما هو الفرق بين المجال الكهربائي الاستاتيكي والمجال الكهربائي الديناميكي .

(2-2) ما هي سطوح تساوي الجهد ، وهل يمكن لها أن تتقاطع ؟

(3-2) اثبت ان اتجاه شدة المجال يكون عموديا على سطوح تساوي الجهد .

(4-2) حلقة على شكل مربع طول ضلعه a تحمل شحنة مقدارها Q^{+} موزعة بصورة منتظمة عليها ،اشتق معادلة للمجال الكهربائي في اي نقطة واقعة على محور هذه الحلقة تبعد بمسافة x عن مركزها . اذا كانت $a = 50$ cm و $Q = 10^{-8}$ Coul أوجد شدة المجال في النقاط التالية والتي تبعد 10cm ، 15cm ، 20cm ، 25 cm عن مركز الحلقة .

$\frac{KQ}{r^2}$

$\frac{KQ}{10}$

(5-2) استعمل العلاقة التي حصلت عليها في التمرين الرابع لحساب الجهد في تلك النقطة .

(6-2) شحنت حلقة نصف قطرها a موضوعة في المستوي y ، x بشحنة كثافتها الطولية λ وكانت $\lambda = A \sin\theta$ حيث أن A مقدار ثابت وأن الزاوية θ هي الزاوية التي تقابل محيط الحلقة ويقع راسها في مركزها . اشتق علاقة خاصة بشدة المجال في أية نقطة على محور الحلقة .

(7-2) شحنة مقدارها $+Q$ موزعة على غلاف كروي بحيث تكون كثافتها الحجمية منتظمة فاذا كان نصف قطر الغلاف الداخلي a والخارجي b ما مقدار القوة التي يسلطها هذا الغلاف الكروي على شحنة نقطية مقدارها +q

موضوعة في نقطة تبعد C من مركز الدائرة $(C > b)$.

(8-2) سطح كروي نصف قطره R كثافة الشحنة السطحية عليه منتظمة وتساوي σ احسب مقدار القوة التي تسلطها هذه الشحنة على شحنة نقطية موضوعة في نقطة تبعد بمسافة C من مركز السطح الكروي $C > R$ (ملاحظة : استعمل التكامل المزدوج لحل هذه المسالة) .

(9-2) شحنة موزعة على حجم كروي بحيث تتبع كثافة الشحنة الحجمية العلاقتين التاليتين

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \qquad r \leq a$$

$$\rho = 0 \qquad r \geq a$$

اذ أن a هو نصف قطر هذه الكرة ..

(أ) أحسب الشحنة الكلية لهذه الكرة . (ب) احسب شدة المجال E والجهد ϕ في أي نقطة تقع خارج هذه الكرة . (جـ) أحسب كلا من E و ϕ في نقطة تقع داخل الكرة . (د) اثبت ان شدة المجال تاخذ قيمتها العظمى في النقطة p التي تبعد بمسافة $0.745\,a$ من مركز الكرة .

(10-2) اسطوانة طويلة جدا طولها ℓ ونصف قطرها R تحتوي على شحنة كثافتها الحجمية منتظمة وتساوي ρ . أثبت ان شدة المجال في خارج وداخل الاسطوانة

$$E = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \qquad r > R$$

$$E = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r \qquad r < R$$

اذ أن r هو بعد النقطة عن محور الاسطوانة .

في حالة توزيع الشحنة على طول الاسطوانة بحيث تكون كثافتها الطولية λ أوجد العلاقة بين ρ و λ ثم استعمل العلاقة الاولى لايجاد شدة المجال خارج الاسطوانة بدلالة λ .

(11-2) اسطوانتان طويلتان جدا متحدتا المحور نصف قطر الخارجية a ونصف قطـــر الداخليـــة b شـــحنت الاســـطوانة الخارجيـــة بشـــحنة كثافتها السطحية $+\sigma$ والداخلية $-\sigma$ (يمثل هذا النظام متسمـــة اسطوانيـــة) استخرج E شدة المجال في أي نقطة تقع بين هاتين الاسطوانتين .

(12-2) استعمل العلاقة التي حصلت عليها في التمرين (2-11) مع العلاقة :

$$E = -\nabla \phi$$

لايجاد فرق الجهد بين الاسطوانتين ϕ_{ab} ومنه السعة لوحدة الطول .

(13-2) استعمل $dE = \frac{K\sigma ds}{r^2}$ وبدون استعمال التكامل لاثبات ان شدة المجـــال داخل غلاف كروي تساوي صفرا .

(14-2) شحنة موزعة على حجم كروي نصف قطره R بحيث تكون كثافة الشحنة الحجمية في أي نقطة من هذا الحيـــز تتبع العـــلاقة $\rho = K r^{\alpha}$ حيث ان K ، α ثوابت و r بعد النقطة عن مركز هذا الحيز الكروي . أوجد قيمة E في كل نقطة تكون فيها $r < R$.

(15-2) استعمل العلاقة بين ρ و r في السؤال (2-14)، ارسم شكلا بيانيا بين E و r لكل من الحالات (أ) $\alpha = 1$ (ب) $\alpha = 0$ (جـ) $\alpha = -1$.

(16-2) اذا كانت كثافة الشحنة السطحية على غلاف نصف كروي تساوي σ أثبت ان شدة المجال في مركز تكور هذا الغلاف هي :

$$E = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}$$

(17-2) شحنة موزعة على حيز كروي غير محدود توزيعا حجميا تتبع فيه كثافة الشحنة الحجمية العلاقة التالية $\rho = \rho_0 \frac{e^{-\alpha r^2}}{r}$ حيث ان ρ_0 ، α ثوابت .

اوجد شدة المجال في أي نقطة تقع داخل هذا الحيز .

(18-2) غلاف كروي نصف قطره الداخلي a والخارجي b يحتوي على شـــحنة كثافتها الحجمية تتغير تبعا للعلاقة $\rho = \rho_0 e^{\alpha r^3}$ حيث ان ρ_0 ، α ثوابت

اوجد شدة المجال في أي نقطة داخل هذا الغلاف .

(19-2) غلاف كروي نصف قطره الداخلي a والخارجي b يحتوي على شحنـــة

كثافتها الحجمية تتغير حسب العلاقة $\rho = \frac{\rho_0}{r}$ اذن أن ρ_0 مقدار

ثابت وان كثافة الشحنة للمنطقتين $0 < r < a$ ، $\infty > r > b$ تساوي

صفرا . اوجد[1] شدة المجال في المناطق التالية (أ) $r = 0$ الى $r = a$

(ب) $r = a$ الى $r = b$ (ج) $r = b$ الى $r = \infty$ (2) الجهد

الكهربائي في النقاط $r = a$ ، $r = b$ ، $r = 0$.

(20-2) غلاف كروي نصف قطره R مشحون بحيث ان الجهد داخل هذا الغلاف $\phi_i = M r \cos\theta$ والجهد خارج الغلاف $\phi_o = (M a^3 \cos\theta)/r^2$ حيث أن M هو مقدار ثابت . أوجد كثافة الشحنة السطحية σ على سطح هذا الغلاف .

(21-2) شعاع من الالكترونات اسطواني الشكل طويل نصف قطره a يتحرك بسرعة v_0 ويحمل تيارا مستمرا (بسبب حركة الالكترونات) مقداره I_0 في الفراغ . فاذا كان توزيع الشحنة في هذا الشعاع منتظما بالنسبة لوحدة المساحة . أوجد شدة المجال (أ) في نقطة تقع خارج الشعاع $r > a$ (ب) في نقطة داخل الشعاع $r < a$.

ملاحظة : بالرغم من أن هناك شحنة متحركة (وجود تيار) الا أن الشحنة في اي جزء من الشعاع في اي لحظة هي ثابتة . لذلك يمكننا استعمال قانون كاوس لحل هذه المسألة . الجواب (أ) $E_r = \frac{I_0}{2\pi\epsilon_0 r v_0}$

(ب) $E_r = \frac{I_0 r}{2\pi\epsilon_0 a^2 v_0}$

(22-2) غلافان كرويان متحدا المركز نصف قطر الداخلي فيهما يساوي a ونصف قطر الخارجي b فاذا كان :

(1) $\phi_a = C\cos\theta$ على سطح الغلاف الداخلي $r = a$

(2) $\phi_b = D$ على سطح الغلاف الخارجي $r = b$

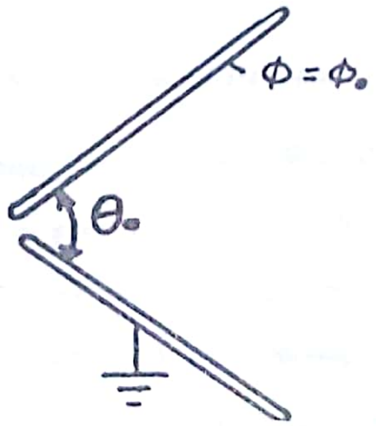
اذ أن C و D مقداران ثابتان . اشتق بدلالة a ، b ، C ، D والمحاور الكروية علاقة خاصة بالجهد في أي نقطة تقع بين هذين الغلافين .

(23-2) غلاف كروي غير موصل نصف قطره a الجهد على سطحه يتبع العلاقة التالية :

$$\phi_a = A \cos\theta$$

اذ أن A مقدار ثابت . أوجد الجهد ϕ (1) في أي نقطة داخل هذا الغلاف (2) في أي نقطة خارج الغلاف (3) كثافة الشحنة السطحية σ على سطح هذا الغلاف .

(24-2) اذا كان الجهد على أي نقطة على سطح اسطوانة غير موصلة طويلة جدا نصف قطرها a بسبب الشحنة الموجودة على سطح هذه الاسطوانة تتبع العلاقة التالية $\phi = A \sin\theta$ اذ أن A مقدار ثابت . اشتق علاقة للجهد (1) في أية نقطة داخل الاسطوانة (2) في أية نقطة خارج الاسطوانة .



الشكل (27-2)

(25-2) لوحان موصلان وضعا بصورة مائلة كما في الشكل (27-2) ربط اللوح الاسفل بالارض وربط الثاني بمصدر جهده الكهربائي ϕ_0 . أهمل تأثير الحافات واستعمل معادلة لابلاس في المحاور الاسطوانية لايجاد صيغة لشدة المجال بين اللوحين . أوجد كثافة الشحنة على كل من اللوحين :
ملاحظة : ان كلا من الجهد وشدة المجال يتغيران مع θ فقط .

(26-2) اذا كان الجهد على احد لوحي متسعه ذات صفيحتين متوازيتين $\phi = 0$ وعلى اللوح الاخر الذي يبعد بمسافة d عن اللوح الاول $\phi = \phi_0$ وهو مقدار ثابت، فاذا كان الفراغ بين اللوحين يحتوي شحنات كثافتها الحجمية $\rho = k x$. اذ أن k مقدار ثابت و x هو البعد عن اللوح الذي جهده $\phi = 0$ اشتق علاقة للجهد ثم لشدة المجال في أي نقطة داخل

المتسمة ثم اوجد كثافة الشحنة على السطح الداخلي لكل لوح .

(27-2) اسطوانتان متحدتا المحور طويلتان جدا نصف قطر الداخلية a ونصف قطر الخارجية b الجهد على الاسطوانة الداخلية $\phi=\phi_a$ وعلى الخارجية $\phi=\phi_b$ فاذا كان الفراغ بين الاسطوانتين يحتوي على شحنات كثافتها الحجمية $\rho=kr$ ، اذ أن k مقدار ثابت و r البعد عن محور الاسطوانتين. اشتق علاقة خاصة بالجهد في أي نقطة بين الاسطوانتين وأخرى خاصة بشدة المجال في تلك النقطة ثم اوجد كثافة الشحنة على كل من الاسطوانتين .

(28-2) كرة موصلة نصف قطرها a تحتوي على شحنة مقدارها Q وضعت في مجال كهربائي منتظم شدته E_0 اوجد الجهد وشدة المجال في أي نقطة خارج الكرة ثم أوجد كثافة الشحنة على السطح الخارجي للكرة .

(29-2) في الصمام الثنائي تنبعث الكترونات من القطب السالب وتتجه نحو القطب الموجب فلو افترضنا ان قطبي الصمام عبارة عن لوحين متوازيين . وان الالكترونات تنبعث من القطب السالب بسرعة ابتدائية $v_0=0$ ، اثبت ان كثافة التيار لهذا الصمام تتبع العلاقة التالية: $J=2.34\times10^{-6}\frac{V^{3/2}}{d^2}$ اذ أن V هو فرق الجهد ، d المسافة بين القطبين .

ملاحظة : تسمى هذه العلاقة بقانون جايلد لانكماير.

الشكل (28-2)

(30-2) وضع ثنائيا قطب عزم الاول p_1 وعزم الثاني p_2 كما في الشكل (28-2) بحيث كانت المسافة بين مركزيهما تساوي r . (أ) احسب القوة والعزم الذي يؤثر كل منهما على الاخر ثم أحسب الطاقة الكامنة المتبادلة بينهما .

(31-2) احسب الشغل اللازم لازاحة شحنة مقدارها $+Q$ من اللانهاية الى نقطة

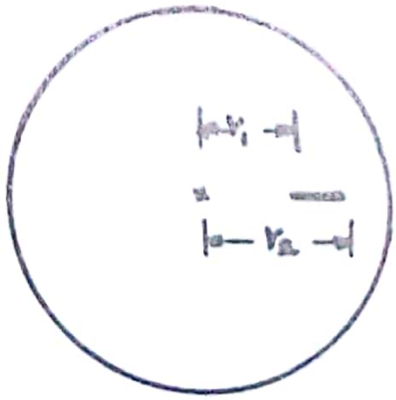
احداثياتها (θ, r) من مركز ثنائي قطب عزمه p .

(32-2) في المثالين (14) و(15) من هذا الفصل احسب كثافة الشحنة على سطح كل من الكرة الموصلة والاسطوانة الموصلة .

(33-2) مجال كهربائي منتظم شدته E_0 ، وضع فيه ثنائي قطب كهربائي ما هو مقدار عزم ثنائي القطب لكي يكون الجهد في أي نقطة بعيدة عنه مساويا للجهد في حالة وضع كرة موصلة خالية من الشحنات نصف قطرها a في هذا المجال المنتظم .

(34-2) وضعت شحنة مقدارها $+Q$ في نقطة P التي تبعد بمسافة $2a$ من مركز كرة موصلة نصف قطرها a خالية من الشحنات ومعزولة . احسب كثافة الشحنة على سطح الكرة في النقطتين على امتداد القطر الذي يمر بالنقطة P .

(35-2) وضعت شحنة خطية كثافتها λ في داخل كرة موصلة مجوفة وعلى استقامة نصف قطرها a خالية من الشحنات ومعزولة كما في الشكل (2 - 29) وكانت نهايتا الشحنة الخطية تبعدان بمسافة r_1 ، r_2 من مركز الكرة . أوجد الصورة الكهربائية التي يمكن بها استبدال الكرة الموصلة لحساب الجهد في داخل الكرة .



الشكل (2-29)

(36-2) شحنة مقدارها $+Q$ وضعت بالقرب من كرة موصلة نصف قطرها a مشحونة بشحنة مقدارها q . فاذا كانت الشحنة $+Q$ تبعد بمسافة D من

مركز الكرة حيث ان $D > a$ فما هي الصورة الكهربائية التي يمكن ان تستبدل بها الكرة الموصلة لحساب الجهد في أي نقطة خارج الكرة .

(37-2) ثنائي قطب كهربائي عزمه $\bar{p} = \bar{j}3 + \bar{k}4$ موضوع في نقطة الاصـــل لمحاور متعامدة فاذا كانت شدة المجال الكهربائي في تلك المنطقة قبل وضع ثنائي القطب هي $\bar{E} = \bar{i}(6+y) + \bar{j}(4+z)$. احسب كلا من القوة والعزم على ثنائي القطب الكهربائي .