(2-8) طريقة الصور الكهربائية

طريقة الصور الكهربائية هي طريقة تستعمل لحساب الجهد او المجال الكهربائي لنظام كهربائي مستقر معين وذلك باستبداله بشحنة نقطية او مجموعة شحنات نقطية بحيث تحقق الشروط الحدودية لذلك النظام . فاذا كان الامر كذلك فان طريقة الحل لحساب الجهد والمجال الكهربائي تعتبر صحيحة حسب نظرية الحل الوحيد باعتبار ان هذه الطريقة حققت الشروط الحدودية لذلك النظام وبذلك تكون الطريقة التي استعملت باستبدال النظام الكهربائي المستقر بشحنة نقطية او مجموعة شحنات نقطية في حساب كل من الجهد والمجال الكهربائي هي طريقة صحيحة . وتسمى مجموعة الشحنات النقطية بالصور الكهربائية وتسمى هذه الطريقة بطريقة الصور الكهربائية .

ان استعمال طريقة الصور الكهربائية لحل بعض المسائل في الكهربائية المستقرة تتمثل في أبسط انواعها بوضع شحنة مقدارها $+Q$ على بعد D من صفيحة موصلة مستوية واسعة جدا . ان المجال الكهربائي في المنطقة الواقعة بين الشحنة والصفيحة الموصلة مشابه تماما للمجال الكهربائي في تلك المنطقة اذا استبدلت الصفيحة الموصلة بشحنة مقدارها $-Q$ توضع على بعد $(2D)$ من الشحنة $+Q$. وتسمى $-Q$ بالصورة الكهربائية للشحنة $+Q$. ان مصطلح الصورة الكهربائية أخذ من هذه الحالة الخاصة التي تشبه في طبيعتها الصورة المتكونة في مرآة مستوية والتي درسها الطالب في موضوع البصريات الهندسية . ولتوضيح هذا المثال نلاحظ الشكل (2-9) وفيه الشحنة النقطية $+Q$ وضعت على بعد D من سطح مستو موصل يمتد بمساحته الى اللانهاية متصل بالارض (جهده يساوي صفرا) . فاذا أبعدنا هذا السطح الموصل واستبدلناه بشحنة نقطية مقدارها $-Q$ توضع على بعد $2D$ من الشحنة النقطية $+Q$ فان اي نقطة تقع على المستوي العمود في منتصف المسافة بين الشحنتين تكون متساوية البعد عن الشحنتين $+Q$ ، $-Q$. وبهذا يكون جهدها مساويا الى الصفر ويكون هذا المستوي سطح تساوي جهد ، وبهذا تعطي الشحنتان النقطيتان الحل المناسب المكافيء الى الشحنة النقطية $+Q$ والسطح الموصل (أي الشرط الحدودي) . وتسمى الشحنة $-Q$ بالصورة الكهربائية للشحنة $+Q$.

ومما تقدم نلاحظ أن الجهد ϕ في النقطة P بالنسبة للشحنتين النقطتين هو

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'} \qquad (64\text{-}2)$$

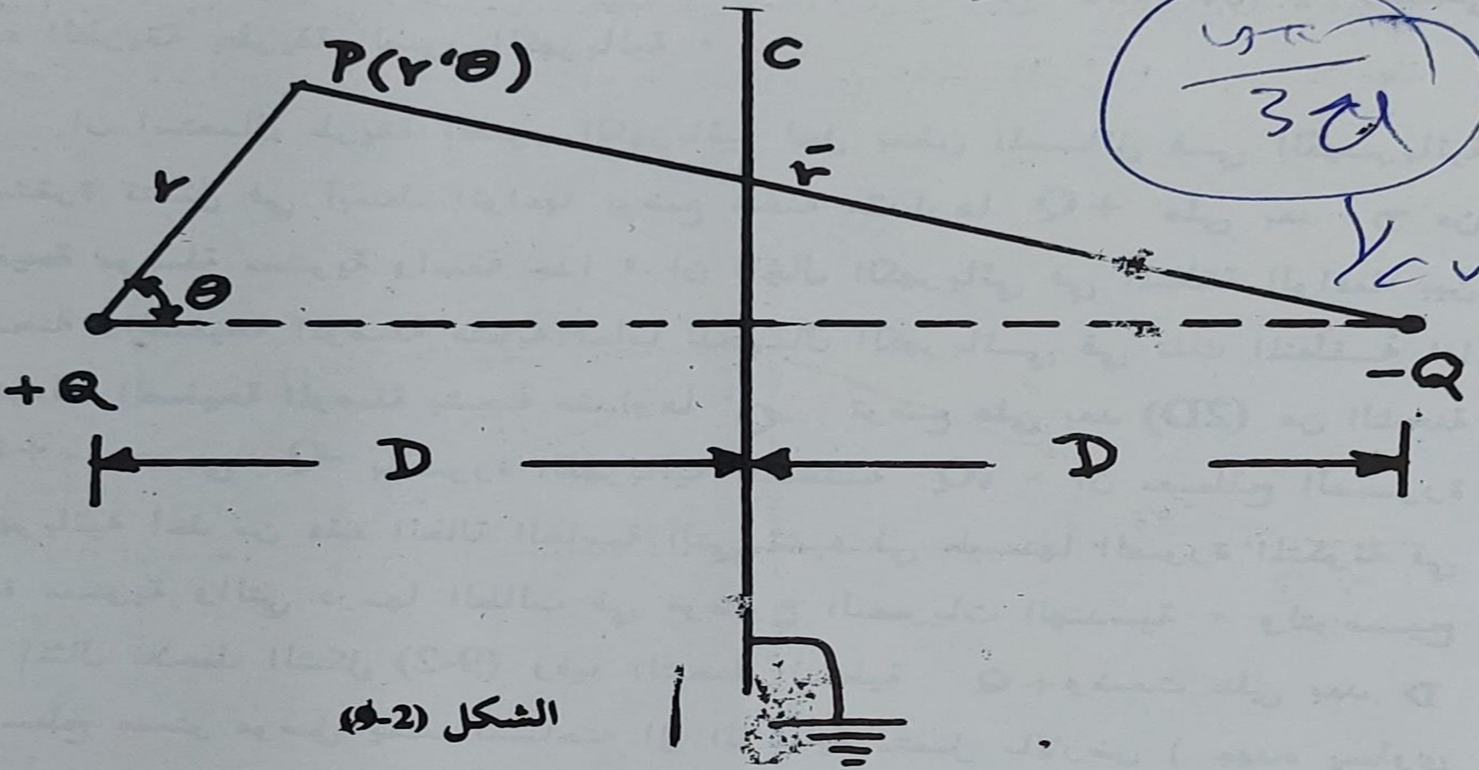
حيث أن

$$r' = \left(r^2 + 4D^2 - 4rD\cos\theta\right)^{1/2}$$

أما مركبات المجال E_r و E_θ فهي:

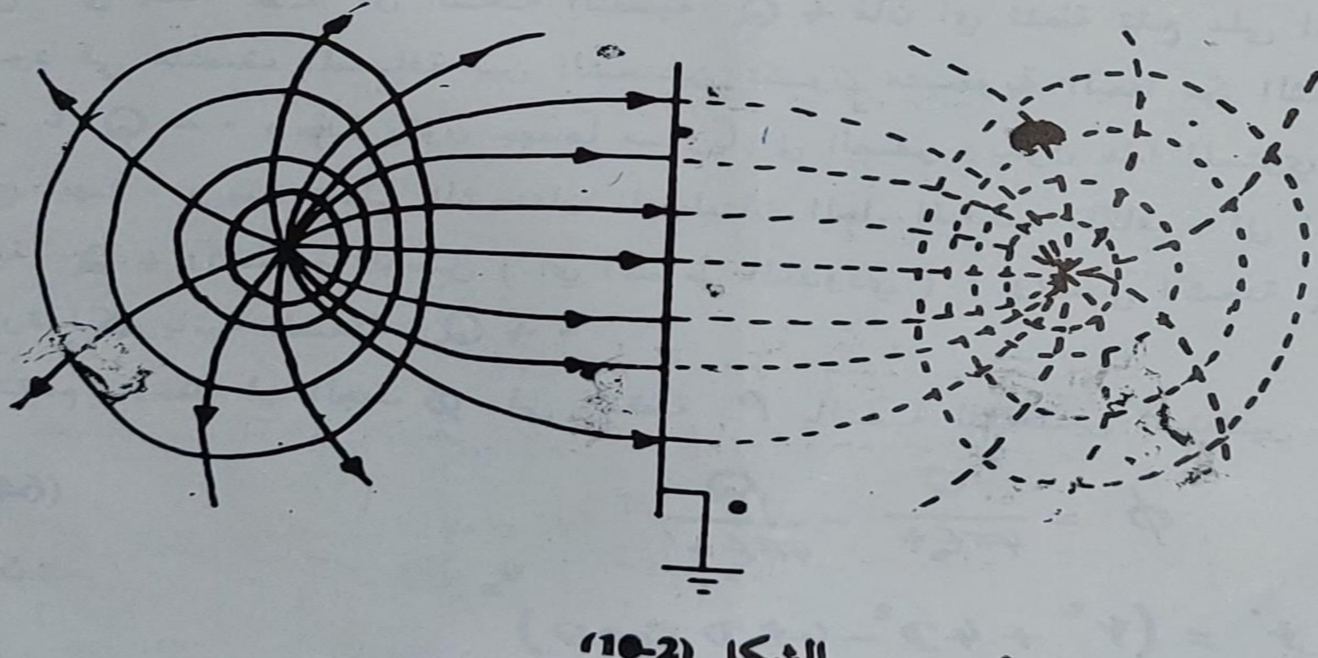
$$E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{Q(r - 2D\cos\theta)}{4\pi\epsilon_0 r'^3} \qquad (65a\text{-}2)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{2QD\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \qquad (65b\text{-}2)$$



الشكل (9-2)

الشكل (10-2) يوضح خطوط المجال وسطوح تساوي الجهد لهذه الحالة

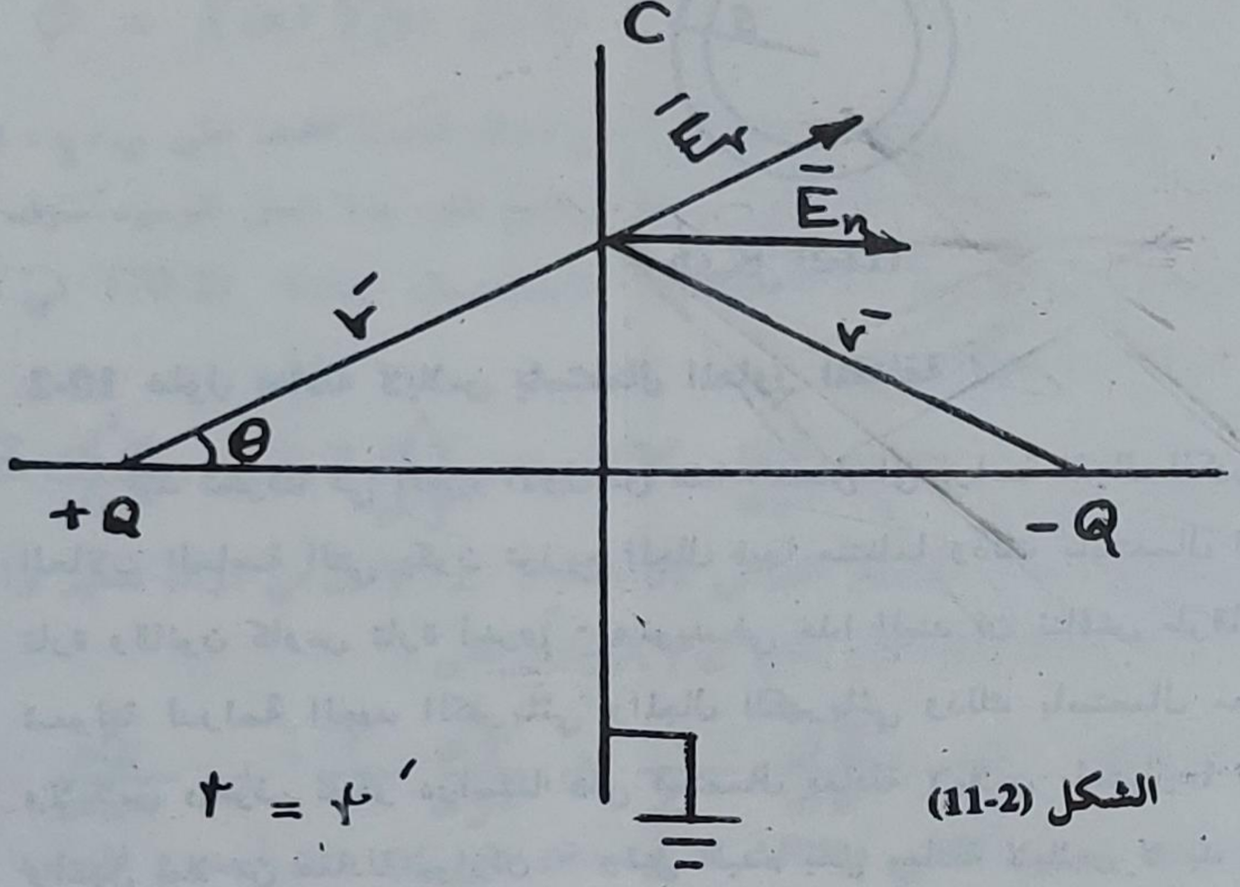


الشكل (10-2)

وكثافة الشحنة المحتثة على السطح الموصل يمكن حسابها من المركبة العمودية لشدة المجال على السطح الموصل $\bar{E}n$ اذ أن

$$\sigma = -\epsilon_0 E_n \tag{66-2}$$

وفي هذا المثال تكون الشحنة المحتثة على السطح الموصل سالبة ويكون اتجاه المجال العمودي على السطح الموصل مشيرا الى اليمين كما في الشكل (11-2) ومن ملاحظة هذا الشكل نجد أن ...



$r = r'$ الشكل (11-2)

$$E_n = E_r \cos\theta - E_0 \sin\theta$$

$$E_n = \frac{2QD}{4\pi\epsilon_0 r^3} \tag{67-2}$$

ومن المعادلتين (66-2) و (67-2) نحصل على :

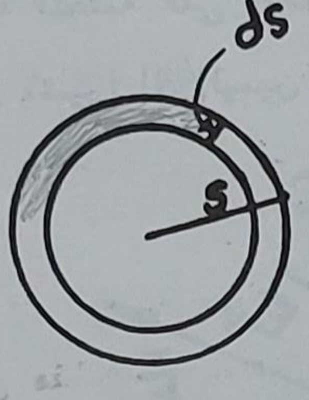
$$\sigma = \frac{-QD}{2\pi r^3} \tag{68-2}$$

ومقدار الشحنة المحتثة على السطح الموصل Q يمكن حسابها كالاتى (أنظر الشكل (12-2))

$$Q = \int_0^\infty \sigma\, 2\pi S\, dS = -QD\int_0^\infty \frac{S\,dS}{(S^2+D^2)^{3/2}} = -Q \tag{69-2}$$

ومن هذا نجد أن مقدار الشحنة على السطح الموصل مساوية الى الشحنة السالبة

Q - للشحنة النقطية التي استبدلنا السطح الموصل بها . ويجب أن نلاحظ في حل المسائل الخاصة بالصور الكهربائية ان هذه الصور الكهربائية تقع في نقاط خارج المنطقة التي نود أن نحسب فيها شدة المجال حيث نجد الصورة في هــــذا المثال تقع الى يسار السطح الموصل بينما حسبنا المجال في الجهة اليمنى منه .



الشكل (12-2)

10-2 حلول معادلة لابلاس باستعمال المحاور المختلفة

لقد تطرقنا في الجزء الأول من هذا الفصل الى دراسة المجال الكهربائي لبعض الحالات الخاصة التي يكون توزيع المجال فيها منتظما وذلك باستعمال قانون كولوم تارة وقانون كاوس تارة أخرى . ونريد في هذا البند ان نناقش طرقا أخرى اكثر شمولية لدراسة الجهد الكهربائي والمجال الكهربائي وذلك باستعمال معادلة بوازان ولابلاس وسوف نركز دراستنا على استعمال معادلة لابلاس باعتبارها اكثر شمولية وأسهل حلا من معادلة بوازان . وقبل البدء بحل معادلة لابلاس لا بد لنا أن نذكر أننا نستعمل لهذا الحل المحاور المناسبة لحالات الحدود وابعاد وشكل الجسم المراد دراسته . فهناك المحاور المتعامدة والمحاور الاسطوانية والمحاور الكروية ... الخ . والدوال التي تحقق معادلة لابلاس تسمى دوال توافقية (Harmonic Functions) وتسمى الحلول الخاصة بها بالحلول التوافقية (Harmonic Solutions) لذلك نجد هناك دوال توافقية مختلفة تختلف باختلاف المحاور المستعملة. فهناك الدوال التوافقية للمحــاور المتعامدة Rectangular Harmonics والدوال التوافقيـة للمحــاور الكــروية (Spherical Harmonics) والدوال التوافقيـة للمحـاور الاسطوانية (Cylindrical Harmonics) واختيار هذه الدوال ونوعها يعتمد على شكل الجسم وحالات الحدود المستعملة .

الدوال التوافقية للمحاور المتعامدة

يمكن اعتياديا ايجاد حلول لمعادلة لابلاس التي يمكن ان تناسب حالات الحدود فيها وذلك بطريقة فصل المتغيرات (Separation of variables) وهذا يحدث لجميع انواع المحاور ففي المحاور المتعامدة يمكن ايجاد حلا يحقق معادلة لابلاس $(\nabla^2\phi = 0)$ على الشكل التالي :

$$\phi = X(x)\,Y(y)\,Z(z) \qquad (70\text{-}2)$$

حيث أن $X(x)$ ، $Y(y)$ ، $Z(z)$ هي دوال تعتمد فقط على x ، y ، z على التوالي ، واذا حقق هذا الحل معادلة لابلاس فان هذا الحل الوحيد سوف يكون الحل الوحيد الصحيح لمعادلة لابلاس · وباستعمال المعادلة (2-70) في معادلة لابلاس نحصل على :

$$YZ\frac{d^2X}{dx^2} + XZ\frac{d^2Y}{dy^2} + XY\frac{d^2Z}{dz^2} = 0 \qquad (71\text{-}2)$$

ولم نستعمل هنا التفاضل الجزئي لان الدوال X ، Y ، Z هي دوال لمتغير واحد فقط وبقسمة المعادلة (2-71) على XYZ نحصل على :

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0 \qquad (72\text{-}2)$$

وبما أن الحدين الثاني والثالث لا يعتمدان على x وان مجموع الحدود الثلاثة يساوي صفرا · اذن يجب ان يكون الحد الاول غير معتمد على x وتكون قيمته ثابتة · وهذا يصح بالنسبة للحدين الثاني والثالث وعلى هذا الاساس نحصل على :

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \alpha^2 \qquad (73a\text{-}2)$$

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \beta^2 \qquad (73\text{-}b\text{-}2)$$

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = \gamma^2 \qquad (73c\text{-}2)$$

إذ لن

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$$

وهذا معناه اننا يجب ان نحل هذه المعادلات التفاضلية الثلاث للحصول على الحل الكامل لمعادلة لابلاس وهذا يعتمد على حالات الحدود الفاصلة وشكل الجسم كما سوف نرى ذلك عند حل الامثلة .

الدوال التوافقية للمحاور الكروية

لقد ذكرنا آنفا ان اختيارنا الى نوع الدوال التوافقية لحل معادلة لابلاس يعتمد على شكل الجسم وحالات الحدود . وفي حالة كون هذه الاجسام كروية فان من الانسب أن نستعمل المحاور الكروية لحل معادلة لإبلاس التي تأخذ الشكل التالي :

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \qquad (74\text{-}2)$$

وسوف نركز دراستنا هنا على المجالات المتناظرة محوريا أي أن الجهد أو المجال الكهربائي لا يعتمد على المتغير ϕ وبهذا تأخذ معادلة لابلاس الشكل التالي :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) = 0 \qquad (75\text{-}2)$$

ولنجرب طريقة فصل المتغيرات لحل هذه المعادلة التفاضلية فنفترض أن :

$$\phi(r, \theta) = R(r)\, P(\theta) \qquad (76\text{-}2)$$

حيث أن $R(r)$ هي دالة تتغير فقط تبعا مع r وان $P(\theta)$ هي دالة تتغير فقط مع θ . وباستعمال هذه المعادلة في المعادلة (2-75) وبالقسمة على RP نحصل على

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{P \sin\theta} \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{dP}{d\theta}\right) = 0 \qquad (77\text{-}2)$$

ومن ملاحظة المعادلة (2-77) نجد ان الحد الاول يعتمد فقط على r كما يعتمد الحد الثاني على θ فقط . اذن يجب ان يكون كل منهما مساويا الى مقدار ثابت وان مجموع هذين الثابتين يجب ان يكون صفرا لكي تحقق المعادلة (2-77)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{R} \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) = k && a \\ &\frac{1}{P \sin\theta} \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{dP}{d\theta}\right) = -k && b \end{aligned}\right\} \qquad (78\text{-}2)$$

والان لندرس المعادلة التفاضلية الاولى (78a-2) الخاصة بـ R وبعد اجراء بعض العمليات الرياضية البسيطة تاخذ هذه المعادلة الشكل التالي :

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - kR = 0 \qquad (79\text{-}2)$$

ومن ملاحظة هذه المعادلة التفاضلية نجد الحل الذي يحققها هو :

$$R = r^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (80\text{-}2)$$

وبتعويض هذه القيمة للدالة R في المعادلة (79-2) نحصل على

$$k = n(n+1) \qquad (81\text{-}2)$$

كما أن تعويض الحل :

$$R = r^{-(n+1)} \qquad (82\text{-}2)$$

في المعادلة (79-2) نجد انه يحققها ايضا ويعطي نفس القيمة K الان نستنتج من ذلك ان الحل الكامل للمعادلة التفاضلية (79-2) هو مجموع الحلين (80-2) و (81-2)

$$R = \left(A r^n + \frac{B}{r^{n+1}} \right) \qquad (83\text{-}2)$$

اذ ان A ، B ثوابت لا على التعيين تعتمد قيمتها على شكل الجسم وحالات الحدود . ولنلاحظ الان المعادلة التفاضلية الثانية (78b-2) والخاصة بـ θ اذ يمكن كتابتها بالشكل التالي :

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{dP}{d\theta}\right) + n(n+1)\sin\theta \, P = 0 \qquad (84\text{-}2)$$

اذا استخدمنا المقدار $K = n(n+1)$. وعندما نفترض ان $u = \cos\theta$ وان $du = -\sin\theta \, d\theta$ فان المعادلة (84-2) تاخذ الشكل التالي :

$$\frac{d}{du}\left[(1-u^2)\frac{dP}{du}\right] + n(n+1)P = 0 \qquad (85\text{-}2)$$

وتسمى هذه المعادلة بمعادلة لجندر (Legendre's Equation) وحلول المعادلة تسمى متعددة الحدود للجندر وتميز بالعدد n ، $P_n(u)$ او $P_n(\cos\theta)$ اي ان :

$$P = P_n(U) = P_n(\cos\theta) \qquad (86\text{-}2)$$

ويسمى n بدرجة متعددة الحدود لليجندر ونجد حدودا مختلفة لكل قيمة من قيم n
ومن الجدير بالذكر هنا أن المقدار $n' = -(n+1)$ يحقق أيضا المعادلة ~~(85-2)~~
كما حققت المعادلة الخاصة بـ R وهذا معناه أن المعادلة (85-2) سوف لا تتغير
اذا عوضنا عن كل n فيها بالمقدار n' الذي يساوي $-(n+1)$ ، نستنتج من
هذا أن

$$P_{-(n+1)}(\cos\theta) = P_n(\cos\theta) \qquad (87\text{-}2)$$

وهذا يدل ان لكل حل من حلول معادلة لابلاس $\phi_1 = A r^n P_n(\cos\theta)$
هناك حل آخر هو :

$$\phi_2 = \frac{B}{r^{n+1}} P_{-(n+1)}(\cos\theta) = \frac{B}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta)$$

وعلى هذا الاساس فان مجموع هذين الحلين هو الحل الكامل لمعادلة لابلاس :

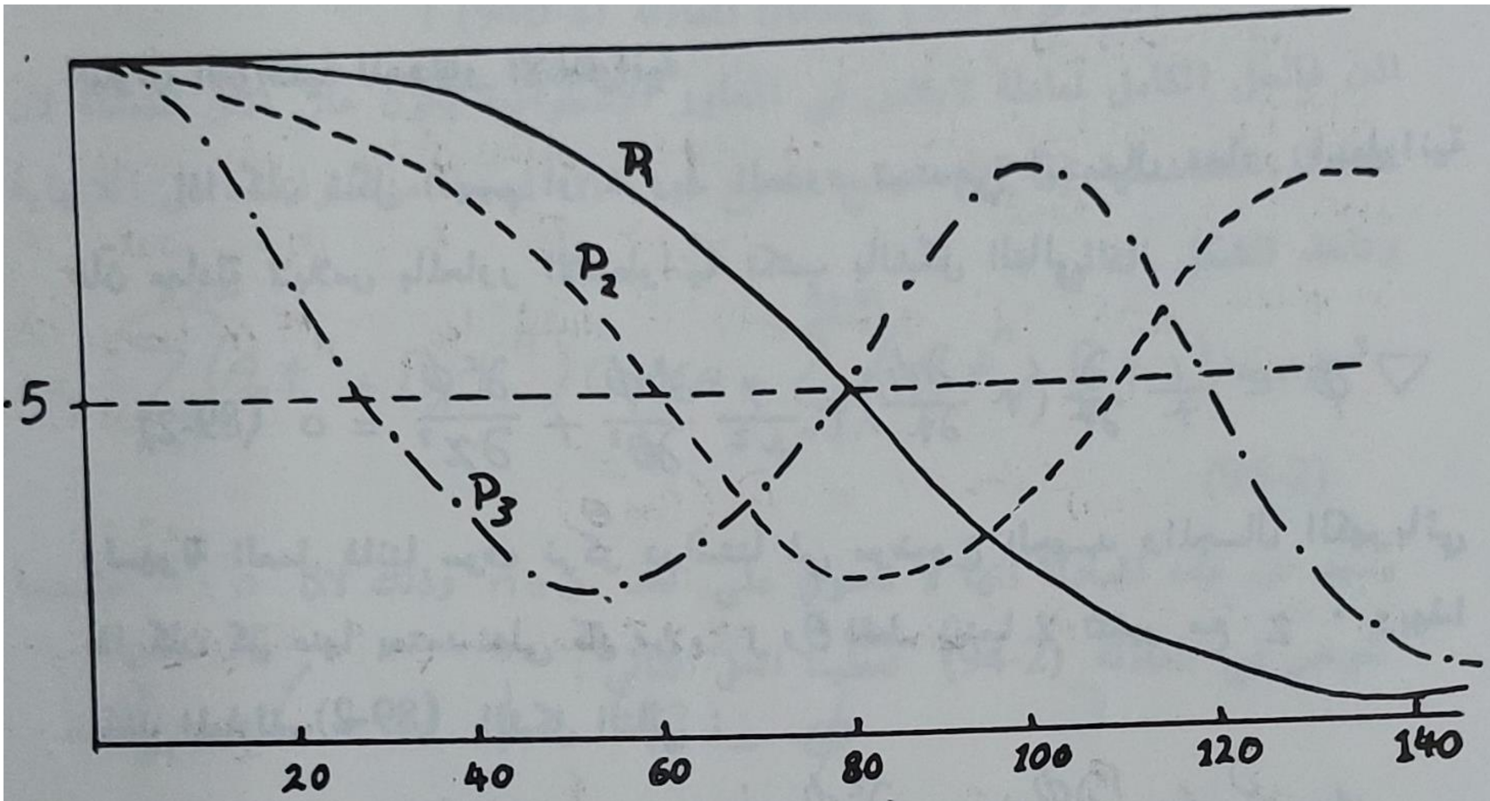
$$\phi = A r^n P_n(\cos\theta) + \frac{B}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta)$$

وقبل أن نترك هذا الموضوع نود أن نشير-هنا الى كيفية الحصول على متعددة الحدود هذه مبتدئين بالعدد $n = 0$. عندما نعوض $n = 0$ في المعادلة التفاضلية (85-2) نجد أن الحل $P_0 = C$ وهو مقدار ثابت يحقق المعادلة . أما اذا كانت $n = 1$ نجد أن الحل $P_1 = D\cos\theta$ يحقق المعادلة التفاضلية (85-2) واذا كانت $n = 2$ فان الحل $P_2 = F(3\cos^2\theta - 1)$ يحقق المعادلة وهلم جرا ... وتثبت قيم كل من C ، D ، F ... الخ وفق شرط المعايرة $P_n(\pm) = (\pm 1)^n$.

وفيما يلي جدول بالحدود الستة الاولى من متعدد الحدود لليجندر بعد أجراء عملية المعايرة (normalization) ومعنى هذا هو اعطاء الدالة P_n القيمة واحد عندما تكون $(\cos\theta = 1)$ حسب الشرط اعلاه وهذا واضح في الشكل (13-2) .
فمثلا تثبت قيمة F في الدالة الخاصة $(n = 2)$ لكي نجعل قيمة P_2 تساوي واحدا عندما نعوض عن $\cos\theta$ بالمقدار واحد كما يلي :

$$P_2 = (3\cos^2\theta - 1)F = (3-1)F = 2F$$

اي يجب أن نضع $F = \frac{1}{2}$ لكي تكون قيمة P_2 مساوية الى واحد .



الشكل (13-2)

وبما أن المعادلة التفاضلية (77-2) تصح لكل القيم الموجبة لـ n من الصفر الى اللانهاية يمكن ان نكتب الحل الشامل لمعادلة لابلاس في المحاور الكروية على شكل سلسلة كالاتي :

$$\phi = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta) \qquad (88\text{-}2)$$

n	P_n
0	1
1	$\cos\theta$
2	$1/2\ (3\cos^2\theta - 1)$
3	$1/2\ (5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$
4	$1/8\ (35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3)$
5	$1/8\ (63\cos^5\theta - 70\cos^3\theta + 15\cos\theta)$

مع العلم أن كل حل منفرد لكل قيمة من قيم n هو حل لمعادلة لابلاس ٠

الدوال التوافقية للمحاور الاسطوانية

اذا كان شكل الجسم او شروط الحدود تستدعي استعمال محاور اسطوانية فان معادلة لابلاس بالمحاور الاسطوانية تكتب بالشكل التالي :

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \qquad (89\text{-}2)$$

ولسهولة العمل فاننا سوف نركز دراستنا في موضوع الجهد والمجال الكهربائي اذا كان كل منها يعتمد على كل من r وθ فقط بينما لا تتغير مع Z ٠ وبهذا تأخذ المعادلة (2-89) الشكل التالي :

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = 0 \qquad (90\text{-}2)$$

ولنجرب هنا طريقة فصل المتغيرات مرة أخرى فاذا كان هذا ممكنا وفرضنا أن :

$$\phi = R(r)\,C(\theta) \qquad (91\text{-}2)$$

يعطي حلا لمعادلة لابلاس فان استعمال هذه المعادلة بالمعادلة (2-90) يعطينا :

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{C}\frac{d^2C}{d\theta^2} = 0 \qquad (92\text{-}2)$$

وبما أن الحد الاول من المعادلة (2-92) يعتمد فقط على r وان الحد الثاني يعتمد فقط على θ فان كلا من هذين الحدين يجب ان يكون مساويا الى كمية ثابتة K ٠

$$\left.\begin{aligned} &\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = k' && a \\ &\frac{1}{C}\frac{d^2C}{d\theta^2} = -k' && b \end{aligned}\right\} \qquad (93\text{-}2)$$

ومن ملاحظة المعادلة (2-93) نجد أن الحل r^n يحقق هذه المعادلة اذن ٠

$$\left.\begin{aligned} &\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = n^2 && a \\ &\frac{1}{C}\frac{d^2C}{d\theta^2} = -n^2 && b \end{aligned}\right\} \qquad (94\text{-}2)$$

من ملاحظة المعادلة (94a-2) نجد ان الحل r^{-n} يحقق هذه المعادلة كما أن كلا من الحلين $\cos n\theta$ ، $\sin n\theta$ يحققان المعادلة (94b-2) :

اذن فالحل الكامل لمعادلة لابلاس في المحاور الاسطوانية يكون على شكل سلسلة لان المعادلة التفاضلية (92-2) تصح لجميع قيم n الموجبة من الواحد الى اللانهاية وتأخذ الشكل التالي :

$$\phi_n = \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(A_n r^n + B_n r^{-n}\right)\cos n\theta + \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(A_n r^n + B_n r^{-n}\right)\sin n\theta \qquad (95\text{-}2)$$

ونجد من هذه المعادلة انها لا تحتوي على الحد $n=0$ وذلك لان $n=0$ عندما تعوض في المعادلة (94-2) تعطينا الحل التالي :

$$R_0 = \ln r \quad , \quad C_0 = \phi$$

والجدول الاتي يبين لنا حلول معادلة لابلاس .في المحاور الاسطوانية لبعض القيم الموجبة والسالبة :

n	ϕ_1	ϕ_2
+1	$r\cos\theta$	$r\sin\theta$
−1	$(1/r)\cos\theta$	$(1/r)\sin\theta$
+2	$r^2\cos 2\theta$	$r^2\sin 2\theta$
−2	$(1/r^2)\cos 2\theta$	$(1/r^2)\sin 2\theta$