الفصل الاول

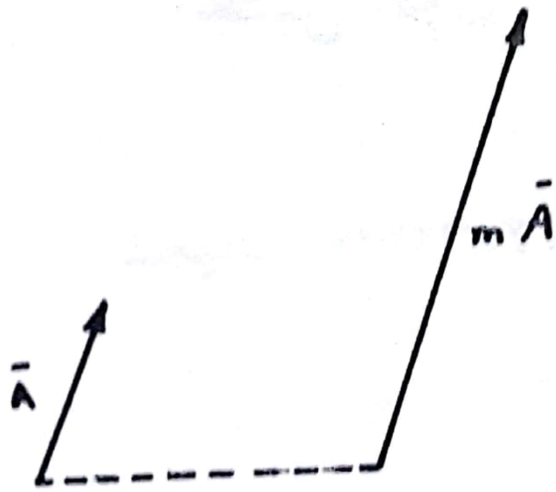
المتجهات VECTORS

(1-1) تمهيد :

عند دراسة الظواهر المختلفة المتعلقة بموضوعات الكهرومغناطيسية من الضروري عادة استخدام المتجهات . فالى جانب الطرق الرياضية المستخدمة للتعبير عن اي معادلة بشكل مختصر ومفهوم هناك طرق اخرى تنسب للمتجهات ساعدت كثيراً في التعرف على الافكار والظواهر الفيزيائية المتعددة الممثلة بمعادلات بصورة واضحة ودقيقة . ان الكميات الفيزيائية على نوعين ، الاول ويسمى الكميات العددية Scalars والثاني الكميات المتجهه او المتجهات Vectors . فالكمية العددية هي الكمية التي تعين تعييناً تاماً اذا عرف مقدارها فقط مثل الحرارة ، الكتلة ، الزمن ، الكثافة وغيرها من هذه الكميات . أما الكمية المتجهة او المتجه فهو الكمية التي لايمكن تعيينها تعييناً تاماً الا اذا عرف مقدارها والاتجاه الذي تؤثر فيه مثل السرعة ، التعجيل ، القوة وغيرها من هذه الكميات ، ويمكن ان يمثل المتجه برسم سهم بين نقطتين اذ تدل المسافة بينهما على مقدار المتجه ويدل اتجاه السهم على اتجاه المتجه .

(2-1) مقدار المتجه وحاصل الضرب بكمية عددية :

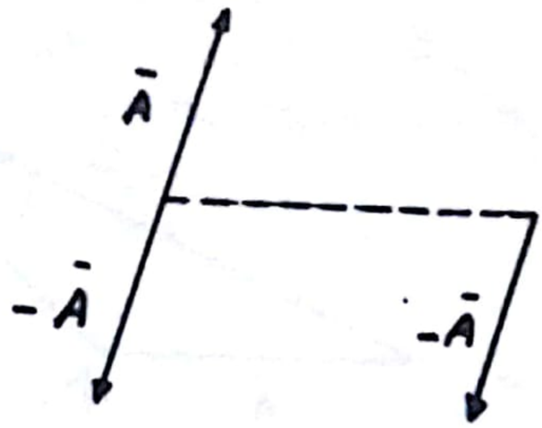
لكي نميز بين الكميات العددية والمتجهات نرمز للاولى بحروف مجردة وللثانية بحروف يرسم فوقها خط . وهكذا فان $\bar{A}$ يمثل متجها مقداره كمية عددية تساوي A . وقد نأخذ بعض الاحيان بالرمز $[\bar{A}]$ ليدل على مقدار المتجه $\bar{A}$ ، لذا فأن $[\bar{A}]$ يمثل كمية عددية موجبة . ان حاصل ضرب أي متجه مثل $\bar{A}$ بكمية عددية مثل m يكون $m\bar{A}$ وهو عادة يساوي متجهاً رسم باتجاه $\bar{A}$ ومقداره يعادل m من المرات بقدر المتجه $\bar{A}$ كما هو موضح في الشكل (1-1) .



الشكل (1-1)

أما اذا كانت m سالبة فهذا يعني ان المتجه $m\bar{A}$ له اتجاه معاكس لاتجاه $\bar{A}$، وهكذا فالمتجه $-\bar{A}$ يعد ناتجاً من حاصل الضرب بين الكمية العددية 1- والمتجه $\bar{A}$. نستنتج مما تقدم ان المتجه $-\bar{A}$ يختلف عن المتجه $\bar{A}$ في كونه باتجاه معاكس لاتجاه $\bar{A}$ كما مبين في الشكل (2-1) .

ومما تجدر ملاحظته هنا أن المتجه $\bar{A}$ والمتجه $-\bar{A}$ قد لايكون خط تأثيرهما واحداً ويحصل ذلك في حالة العزوم الازدواجية .



الشكل (2-1)

(3-1) جمع وطرح المتجهات :

لايجاد حاصل جمع متجهين مثل $\bar{A}$ و $\bar{B}$، لاحظ الشكل (3-1). نرسم سهماً باتجاه $\bar{A}$ ليدل طوله على مقدار المتجه $\bar{A}$ ثم نرسم سهماً آخراً باتجاه $\bar{B}$ ليدل طوله على مقدار المتجه $\bar{B}$ بحيث تقع نقطة تأثيره على رأس السهم الدال للمتجه $\bar{A}$، فحاصل جمعهما هو السهم الذي تقع نقطة تأثيره على نقطة تأثير السهم الدال للمتجه $\bar{A}$ ويقع رأسه على رأس السهم الدال للمتجه $\bar{B}$ كما هو واضح في الشكل (4-1). اذن المتجه $\bar{C}$ يمثل المحصلة لهذين المتجهين بالمقدار والاتجاه.

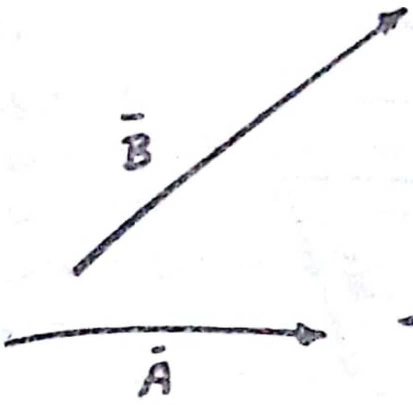
ان عملية الجمع هذه يمكن أن يعبر عنها بالمعادلة المتجهية التالية :

$$\bar{A} + \bar{B} = \bar{C} \qquad (1\text{-}1)$$

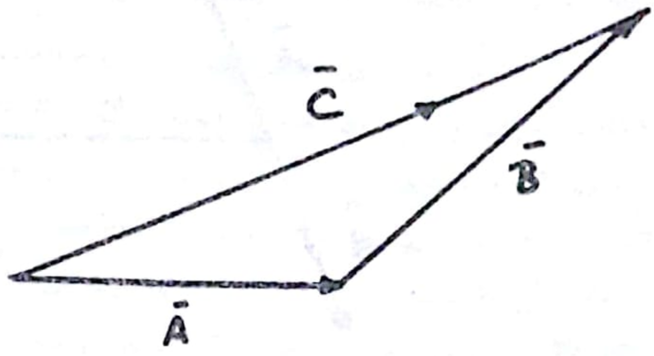
ومن طبيعة حاصل الجمع هذا يكون واضحاً أن

$$\bar{B} + \bar{A} = \bar{A} + \bar{B} \qquad (2\text{-}1)$$

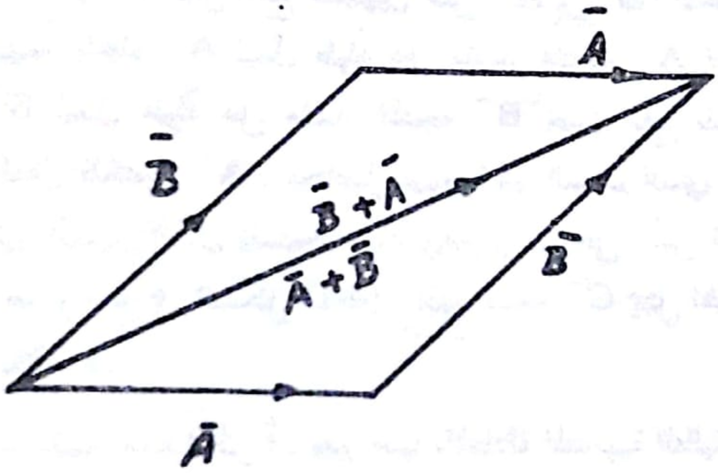
وتسمى هذه العملية بخاصية التبادل كما يلاحظ في اكمال رسم متوازي الاضلاع الذي تتمثل أضلاعه بالمتجهين $\bar{A}$ و $\bar{B}$، أنظر الشكل (5-1).



الشكل (1-3)



الشكل (1-4)

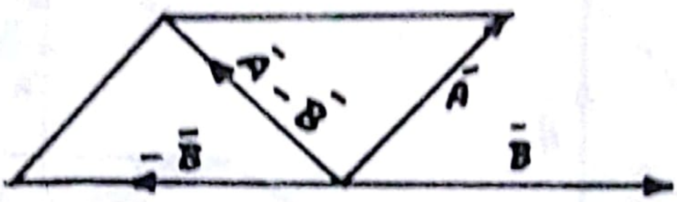


الشكل (1-5)

من هذا الشكل نجد ان حاصل الجمع يخضع لقانون التبادل (Commutative law) ولايجاد حاصل الجمع المتجهي لعدد من المتجهات نستخدم طريقة رسم متوازي الاضلاع لاستخراج محصلة أي متجهين منها ويكون عندئذ طول السهم النهائي دالاً لمحصلة جمع هذه المتجهات . لنعتبر مثلاً المتجهات

هذا النوع من حاصل الجمع يكون خاضعاً لقانون الترافق (Associative law) .

يمكننا الان ان نجري عملية طرح متجه مثل $\bar{B}$ من متجه آخر مثل $\bar{A}$ ويتم ذلك بأن نعكس اولاً اتجاه المتجه $\bar{B}$ أي نضرب هذا المتجه بالكمية العددية (-1) كما اسلفنا سابقاً ومن ثم نضيف الى الناتج المتجه $\bar{A}$ كما في الشكل (1-7) .

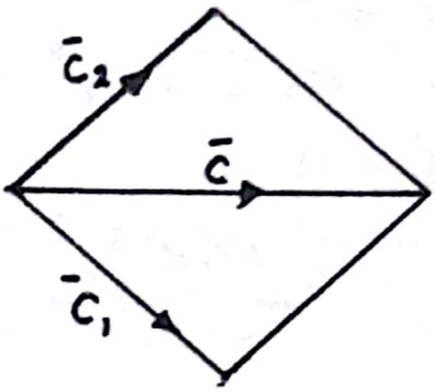


الشكل (1-7)

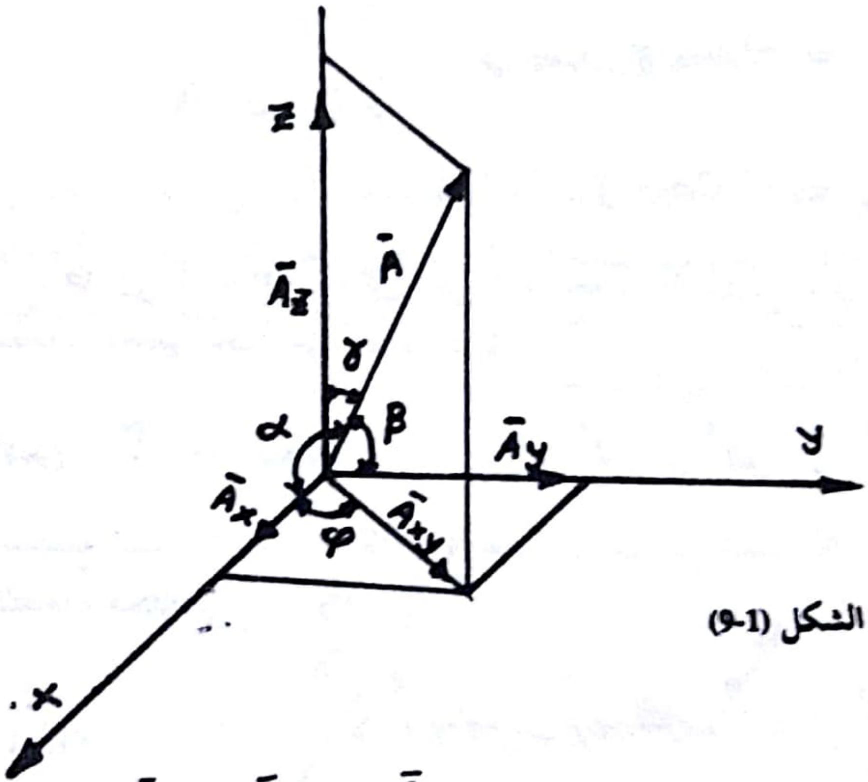
(1-4) تحليل المتجهات :

تسمى العملية المعكوسة لجمع المتجهات بتحليل المتجهات . فاذا فرض أن هناك اي متجه فمن الممكن ايجاد متجهين واقعين في مستوٍ واحد مع ذلك المتجه بحيث يكون حاصل جمعهما مساوياً الى المتجه الاصلي .

فالشكل (1-8) يوضح المتجهين $\bar{C_1}$ و $\bar{C_2}$ ويعد كل منهما مركبة للمتجه الاصلي $\bar{C}$ كما يمكن ايضاً تعيين ثلاثة متجهات ليس من الضروري ان تقع جميعها في مستوٍ واحد مع المتجه $\bar{C}$ بحيث يصبح حاصل جمعها مساوياً الى المتجه الاصلي. ولاجل ذلك تستخدم ثلاثة محاور متعامدة z, y, x لتحليل اي متجه الى ثلاثة اتجاهات . لنتأمل الشكل (1-9) الذي يبين كيفية تحليل المتجه $\bar{A}$ الى ثلاث كميات موازية لهذه المحاور المتعامدة . يحلل المتجه $\bar{A}$ اولاً الى مركبتين إحداهما $\bar{A_z}$ باتجاه المحور z والاخرى $\bar{A_{xy}}$ باتجاه الخط المتكون من تقاطع مسقط المتجه $\bar{A}$ مع المستوى (xy) اما المتجه $\bar{A_{xy}}$ فيحلل بدوره الى مركبتين كذلك احداهما $\bar{A_x}$ باتجاه المحور x والاخرى $\bar{A_y}$ باتجاه المحور y . يكون واضحاً الان أن حاصل جمع المتجهات الثلاثة المتعامدة $\bar{A_z}$ ، $\bar{A_y}$ ، $\bar{A_x}$ يساوي المتجه الاصلي $\bar{A}$ أي أن : —



الشكل (8-1)



الشكل (9-1)

$$\bar{A} = \bar{A}_{xy} + \bar{A}_z$$

$$\bar{A} = \bar{A}_x + \bar{A}_y + \bar{A}_z \qquad (6\text{-}1)$$

أو

ان اتجاه أي متجه بالنسبة لاي محاور متعامدة يحدد بعد معرفة جيوب تمام الزوايا المحصورة بين المتجه وتلك المحاور وتسمى هذه بجيوب تمام اتجاه المتجه ويمكن ان تكتب بالشكل التالي :

$$\cos(\bar{A}, x) = \cos\alpha = l$$
$$\cos(\bar{A}, y) = \cos\beta = m$$
$$\cos(\bar{A}, z) = \cos\gamma = n \qquad (7\text{-}1)$$

أذ ان الزوايا α, β, γ هي الزوايا المرافقة للمحاور x, y, z على التناظر وبمساعدة الشكل السابق نحصل ايضاً على المعادلات التالية :

$$A_x = A \sin\gamma \cos\varphi \qquad (8\text{-}1)$$

$$A_y = A \sin\gamma \sin\varphi$$

$$A_z = A \cos\gamma$$

أذ ان φ هي الزاوية المحصورة بين المحور x والمتجه $\bar{A}_{xy}$ وبتربيع طرفي كل من هذه المعادلات وجمعها نحصل على العلاقة التالية :

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \qquad (9\text{-}1)$$

ونستطيع ايضاً اذا تأملنا الشكل مرة اخرى أن نعبر عن المقدار A بدلالة مركباته المتعامدة هكذا :

$$A = \left\{ (Al)^2 + (Am)^2 + (An)^2 \right\}^{1/2} \qquad (10\text{-}1)$$

حيث ان :

$$A_x = A\cos\alpha = Al$$

$$A_y = A\cos\beta = Am \qquad (11\text{-}1)$$

$$A_z = A\cos\gamma = An$$

وأن

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

(5-1)* وحدة المتجه : Unit vector

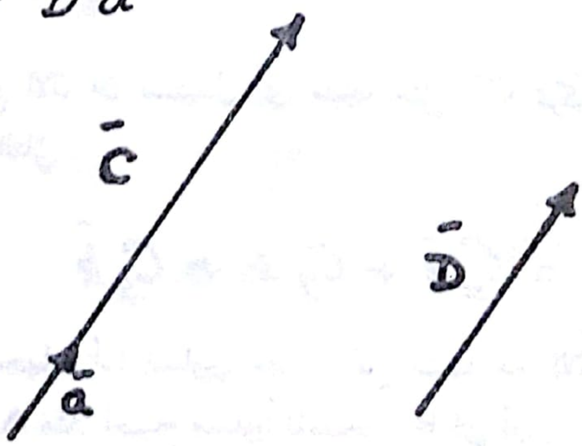
نحتاج احياناً ان نعبر عن اي متجه $\bar{A}$ بحاصل ضرب بين كمية عددية ومتجه رسم بموازاة $\bar{A}$ ومقداره وحدة واحدة والذي يسمى بوحدة المتجه ويعبر عنه بالمعادلة التالية :

$$\bar{a} = \frac{\bar{A}}{A}$$

$$\bar{A} = A\,\bar{a}$$

ومن الجدير بالذكر أن وحدة المتجه هذه خالية من وحدات القياس، فالشكل (1-10) يوضح وحدة متجه ($\bar{a}$) رسم على خط تأثير المتجه $\bar{C}$ وموازياً له واذا أردنا الان ان نرسم متجهاً آخر مثل $\bar{D}$ ليكون بموازاة المتجه $\bar{C}$ نستخدم وحدة المتجه $\bar{a}$ للدلالة على ذلك المتجه، أي أن

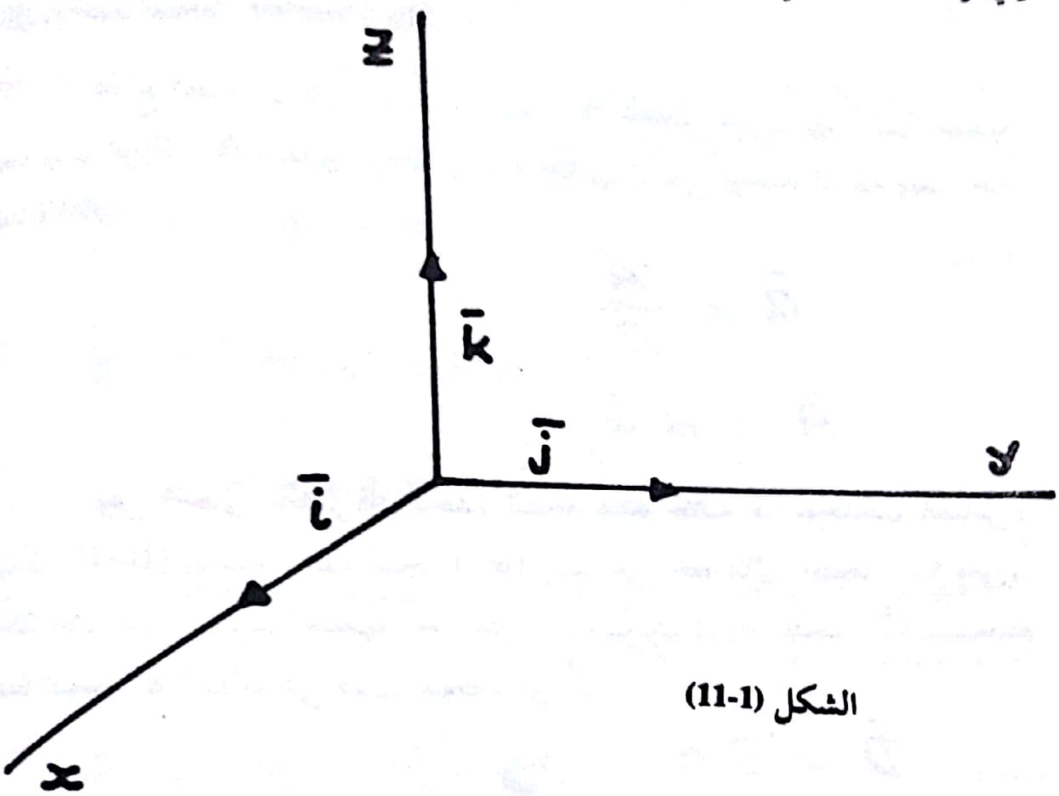
$$\bar{D} = D\,\bar{a}$$



الشكل (1-10)

وهناك متجهات أساسية استخدمت كثيراً لتحليل اي متجه الى ثلاثة اتجاهات متعامدة . والمتجهات الاساسية هذه هي مجموعة متجهات متعامدة بعضها

على بعض ومقدار كل منها يساوي وحدة واحدة . وأذا كانت المتجهات الاساسية توازي المحاور المتعامدة z, y, x بالاتجاه الموجب فيرمز اليها بالرمز $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ على التوالي ويلاحظ ذلك في الشكل (11-1) .



الشكل (11-1)

لذا نستطيع الان ان نستبدل أي متجه مثل $\bar{C}$ بمركباته الموازية لهذه المحاور الثلاثة بالشكل التالي :

$$\bar{C} = C_x \bar{i} + C_y \bar{j} + C_z \bar{k}$$

ويتساوى متجهان أذا تساوي مقدار كل منهما مع الاخر وكانا باتجاه واحد . فلو ان المتجه $\bar{A}$ مثلاً أصبح مساوياً للمتجه $\bar{B}$ اي أن :

$$\bar{A} = \bar{B}$$

أمكننا كتابة العلاقة التالية :

$$A_x \bar{i} + A_y \bar{j} + A_z \bar{k} = B_x \bar{i} + B_y \bar{j} + B_z \bar{k}$$

ولكي تتحقق المساواة لما بين المتجهين لابد أن تتساوى مركباتهما المتعامدة على التناظر . وهكذا نجد أن :

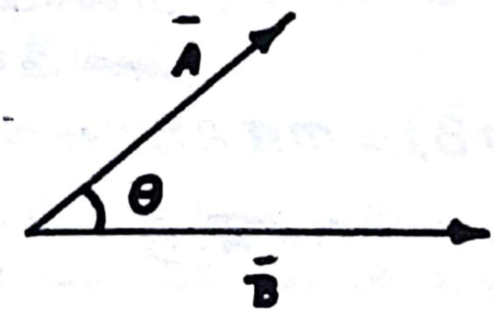
$$A_x = B_x$$

$$A_y = B_y$$

$$A_z = B_z$$

(6-1) الضرب العددي لمتجهين : Scalar Product

يعرف الشغل كما جاء في مواضيع الفيزياء الاساسية بأنه حاصل ضرب الازاحة في مركبة القوة التي هي باتجاه تلك الأزاحة. لذا فأن استخدام متجهي القوة والازاحة ينتج عنهما كمية عددية هي الشغل. أذن من الممكن أن نضرب متجهين او اكثر بالطريقة السابقة لنحصل من عملية الضربّ على كمية عددية. ان عملية حاصل الضرب هذه بين متجهين تسمى حاصل الضرب العددي التي يعبر عنها بالنسبة للمتجهين $\bar{A}$ و $\bar{B}$ بالصيغة التالية، لاحظ الشكل (12-1) :



الشكل (12-1)

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = AB \cos\theta \qquad (12-1)$$

اذ أن θ هي الزاوية المحصورة بين المتجهين. تتم هذه العملية بعد معرفة مسقط أحد المتجهين على خط تأثير الاخر ثم يضرب مقدار هذا المسقط بمقدار

المتجه الاخر . ومما يلاحظ هنا أن حاصل الضرب العددي هذا قد يتضمن متجهات يختلف بعضها عن البعض الاخر بوحدات القياس وقد يكون حاصل الضرب أيضاً كمية موجبة او سالبة يعتمد ذلك على قيمة الزاوية θ ان كانت اصغر او اكبر من $90°$.

يمكن ان يعبر عن الشغل الان بالشكل التالي :

$$W = \int \bar{F} \cdot d\bar{\ell} \tag{13-1}$$

اذ أن $d\bar{l}$ تمثل الازاحة على المسار الذي يسلكه الجسيم. ومما تجدر ملاحظته هنا أنه اذا كانت الزاوية θ المحصورة بين المتجهين تساوي صفراً فعندئذ تصبح العلاقة (12-1) بالشكل التالي :

$$A \cdot \bar{B} = A B$$

واذا كانت الزاوية بينهما تساوي $90°$ فيكون :

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = 0$$

لنلاحظ الان حاصل الضرب العددي للمتجهين $m\bar{A}$ و $n\bar{B}$. لو اننا الان اجرينا عملية حاصل الضرب حسب التعريف أنف الذكر لكان :

$$(m\bar{A}) \cdot (n\bar{B}) = |m\bar{A}||n\bar{B}| \cos\alpha \tag{14-1}$$

اذ ان α هي الزاوية المحصورة بين المتجهين .

أو

$$(m\bar{A}) \cdot (n\bar{B}) = mn\, A B \cos\alpha$$

$$= mn\, \bar{A} \cdot \bar{B} \tag{15-1}$$

نرى من هذه النتيجة الاخيرة أن عملية الضرب الاعتيادية تطبق على الاعداد m و n بينما عملية الضرب التي عرفت سابقاً في هذا البند لايمكن تطبيقها الا على المتجهات فقط .

أصبح واضحاً الان أن حاصل الضرب العددي يخضع لقانون التبادل لان العدد $AB \cos\alpha$ لايعتمد على كيفية ترتيب الحدود عند أجراء عملية الضرب هذه . وهكذا يمكننا أن نكتب العلاقة التالية :

$$\bar{A}\cdot\bar{B} = \bar{B}\cdot\bar{A}$$

لنناقش الان حاصل الضرب العددي $(\bar{C} + \bar{B})\cdot\bar{A}$، من تعريف حاصل الضرب العددي علينا أن نجد اولاً مسقط المتجه $(\bar{C} + \bar{B})$ على خط تأثير المتجه $\bar{A}$ ومن ثم نقوم بعملية الضرب التي سبق توضيحها. الا اننا يمكن أن نوضح عملية الضرب هذه بطريقة أخرى حيث أن مسقط مجموع متجهين على اتجاه معين يساوي مجموع مساقط هذين المتجهين على الاتجاه نفسه، أي أن :

$$\bar{A}\cdot(\bar{B}+\bar{C}) = \bar{A}\cdot\bar{B} + \bar{A}\cdot\bar{C} \tag{16-1}$$

هذه العملية تسمى بعملية التوزيع وحاصل الضرب هذا يكون خاضعاً لقانون التوزيع. لنطبق الآن حاصل الضرب العددي على وحدات المتجهات $\bar{i}$ ، $\bar{j}$ ، $\bar{k}$. بما أن هذه المتجهات متعامدة بعضها على بعض ومقدار كل منها يساوي وحدة واحدة ينتج ان حاصل الضرب العددي بين هذه المتجهات يساوي وحدة واحدة اذا كانت متشابهة ويساوي صفراً اذا كانت غير متشابهة وتكتب عمليات حاصل الضرب هذه بالطريقة التالية :

$$\begin{aligned} \bar{i}\cdot\bar{i} &= \bar{j}\cdot\bar{j} = \bar{k}\cdot\bar{k} = 1 \\ \bar{i}\cdot\bar{j} &= \bar{j}\cdot\bar{k} = \bar{k}\cdot\bar{i} = 0 \end{aligned} \tag{17-1}$$

ولو عبرنا الان عن المتجهين $\bar{A}$ و $\bar{B}$ بدلالة مركباتهما المتعامدة بالنسبة للمحاور x, y, z لكان حاصل الضرب العددي لهذين المتجهين كما تبينه المعادلة التالية :

$$\bar{A}\cdot\bar{B} = (A_x\bar{i} + A_y\bar{j} + A_z\bar{k})\cdot(B_x\bar{i} + B_y\bar{j} + B_z\bar{k})$$

او

$$\bar{A}\cdot\bar{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{18-1}$$

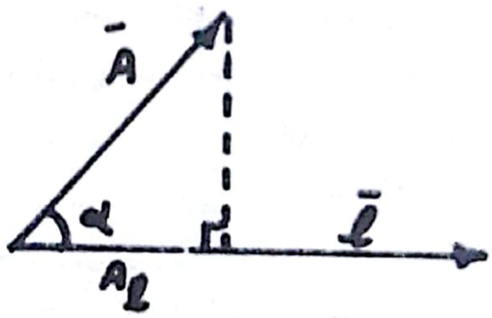
نستنتج من ذلك ان حاصل الضرب العددي هو مجموع حاصل الضرب

الاعتيادي بين المركبات المتناظرة للمتجهين . واذا ضرب متجه بنفسه حسب عملية حاصل الضرب العددي لمتجهين ينتج مربعاً لعدد مساو الى مقدار ذلك المتجه، أي أن :

$$\bar{A}.\bar{A} = |\bar{A}||\bar{A}| = A^2 \qquad (19\text{-}1)$$

وقد تعكس هذه العملية، أي أن مربع اي عدد يمكن اعتباره حاصل ضرب عددي لمتجهين متساويين مقدار كل منهما يساوي ذلك العدد، ومما يلاحظ من حاصل الضرب العددي أيضاً استخدامه للدلالة على مقادير المركبات المتعامدة لاي متجه رسم بأتجاه معين فالشكل (13-1) يوضح متجهاً مثل $\bar{A}$ رسم بأتجاه معين يصنع زاوية α مع الاتجاه $\bar{l}$، اذن مركبة $\bar{A}$ بهذا الاتجاه هي :

$$A_l = |\bar{A}| \cos\alpha \qquad (20\text{-}1)$$



الشكل (13-1)

لنفترض الان أن هناك وحدة متجه $\bar{e}_l$ موازية للاتجاه $\bar{l}$ فحاصل الضرب العددي للمتجهين $\bar{A}$ و $\bar{e}_l$ حسب التعريف الوارد سابقاً يكون :

$$\bar{A}.\bar{e}_l = |\bar{A}||\bar{e}_l| \cos\alpha \qquad (21\text{-}1)$$

وبما ان $[\bar{e}_l]$ يساوي وحدة واحدة يصبح واضحاً أن :

$$\bar{A}.\bar{e}_l = |\bar{A}| \cos\alpha \qquad (22\text{-}1)$$

وبالرجوع الى المعادلة (22-1) يحصل أن :

$$A_l = \bar{A} \cdot \bar{e}_l$$

وبالمثل يمكننا كتابة العلاقات التالية :

$$A_x = \bar{A} \cdot \bar{i}$$

$$A_y = \bar{A} \cdot \bar{j} \qquad (23\text{-}1)$$

$$A_z = \bar{A} \cdot \bar{k}$$

واخيراً لو فرضنا ان $\bar{r}$ يمثل متجهاً يرسم من نقطة الاصل لمحاور متعامدة الى النقطة P التي احداثياتها هي (z, y, x) ، فمن الممكن التعبير عن هذا المتجه بدلالة مركباته المتعامدة ، لاحظ الشكل (14-1) :

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \qquad (24\text{-}1)$$

او

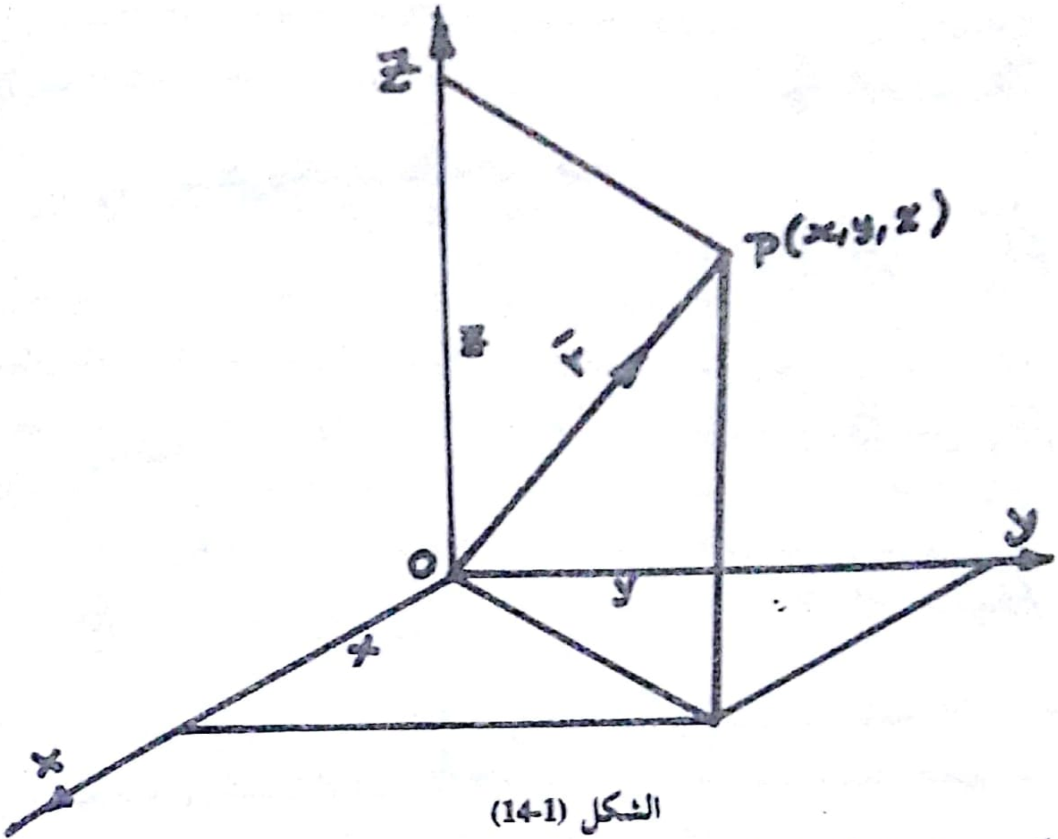
$$\bar{r} = (\bar{r} \cdot \bar{i})\bar{i} + (\bar{r} \cdot \bar{j})\bar{j} + (\bar{r} \cdot \bar{k})\bar{k}$$

يسمى المتجه $\bar{r}$ في هذه الحالة بمتجه الموضع (Position vector) وبما أن n, m, l هي جيوب تمام اتجاه المتجه $\bar{r}$ ، تؤول العلاقة الاخيرة الى :

$$\left(\frac{1}{r}\right)\bar{r} = l\bar{i} + m\bar{j} + n\bar{k} \qquad (25\text{-}1)$$

(7-1) الضرب المتجهي لمتجهين :

يعرف مقدار عزم قوة ما حول محور معين بأنه حاصل ضرب القوة في المسافة العمودية من المحور على خط تأثير تلك القوة . وبما أن العزم وهو متجه ينتج من حاصل ضرب متجهين هما القوة والمسافة ، اذن لابد من أن نبحث عن عملية



الشكل (1-14)

اخرى مناسبة لحاصل الضرب كي تصف هذا العزم. لذا فقد حدد حاصل الضرب هذا بين المتجهين $\bar{A}$ و $\bar{B}$ حسب العلاقة التالية، لاحظ الشكل (1-15).

(1-26)

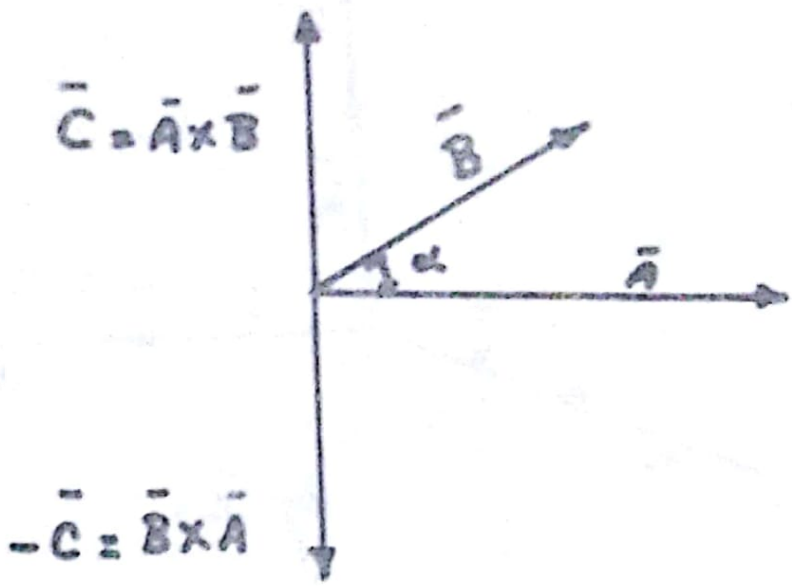
$$\bar{A} \times \bar{B} = \bar{C}$$

اذ ان $\bar{C}$ متجه آخر مقداره يساوي:

$$|\bar{C}| = A\,B \sin\alpha \qquad (1\text{-}27)$$

اذ ان α هي الزاوية الصغرى المحصورة بين المتجهين. أما اتجاهه فخاضع لقاعدة اليد اليمنى، اذ يحدد اتجاهه حسب اتجاه ابهام اليد اليمنى عندما تدور بقية أصابع اليد الاربع من المتجه $\bar{A}$ الى المتجه $\bar{B}$ خلال الزاوية الصغرى α بين المتجهين. ويكون هذا المتجه $\bar{C}$ عمودياً على كل من المتجهين $\bar{A}$ و $\bar{B}$ أي عمودياً على المستوى الذي يضم هذين المتجهين.

وكما جاء في حاصل الضرب العددي للمتجهين $m\bar{A}$ و $n\bar{B}$ تطبق عملية ضرب العددين m و n بالطريقة الاعتيادية عندما يراد ايجاد حاصل الضرب



الشكل (15-1)

المتجهي بين المتجهين . ان حاصل الضرب المتجهي لايخضع لقانون التبادل ذلك لان :

$$\bar{A} \times \bar{B} = -\bar{B} \times \bar{A}$$

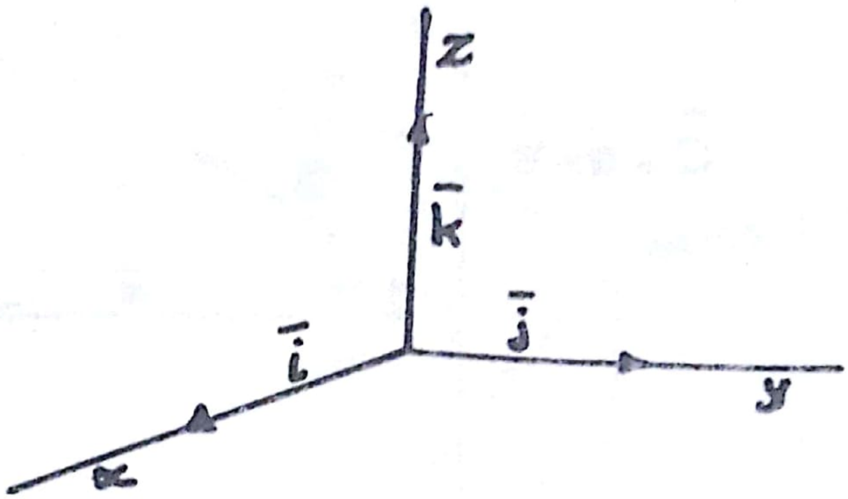
ويمكننا ان نبين هنا كما بينا في حالة حاصل الضرب العددي لمتجهين ، ان حاصل الضرب المتجهي يخضع لقانون التوزيع ، أي ان :

$$\bar{C} \times (\bar{A} + \bar{B}) = \bar{C} \times \bar{A} + \bar{C} \times \bar{B}$$

لنركز اهتمامنا الان على حاصل الضرب المتجهي للمتجهات الاساسية $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ يكون حاصل الضرب المتجهي هنا مساوياً الى الصفر اذا كان المتجهان متشابهين ، أي ان :

$$\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = 0 \qquad (28\text{-}1)$$

ويكون مقدار حاصل الضرب لمتجهين متعامدين منها مثل $(\bar{i} \times \bar{j})$ مساوياً الى وحدة واحدة ، الا أن اتجاهه حسب قاعدة اليد اليمنى لحاصل الضرب يكون باتجاه المحور z ، وعليه تكتب المعادلة المتجهية التالية ، لاحظ الشكل (16-1) .



الشكل (16-1)

$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$$

ولمعرفة اتجاه المتجه الحاصل من الضرب المتجهي هذا للمتجهات الاساسية تتبع طريقة الترتيب الدوري لهذه المتجهات، فالشكل (17-1) يوضح ترتيب المتجهات $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ بطريقة دورية على دائرة مع حركة عقرب الساعة. لذا يكون حاصل الضرب لأي متجهين منها هو المتجه الثالث وبالاتجاه الموجب، لو اننا تحركنا مع اتجاه حركة عقرب الساعة من المتجه الاول الى المتجه الثاني على هذه الدائرة، وبعكسه سيكون المتجه سالباً وعليه يكون :

$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$$

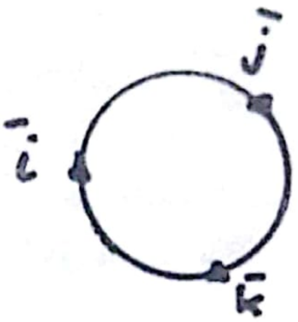
$$\bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}$$

$$\bar{k} \times \bar{i} = \bar{j} \qquad (29\text{-}1)$$

$$\bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k}$$

$$\bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i}$$

$$\bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}$$



الشكل (17-1)

ومن الضروري جداً معرفة مفكوك حاصل الضرب المتجهي للمتجهين A^- و B^- بدلالة مركباتهما المتعامدة لاهمية ذلك في مواضيع النظرية الكهرومغناطيسية ، فاذا اتبعنا الطرق التي سبق ذكرها في هذا البند فان عملية حاصل الضرب تكون بالشكل التالي :

$$\bar{A} \times \bar{B} = (A_x \bar{i} + A_y \bar{j} + A_z \bar{k}) \times (B_x \bar{i} + B_y \bar{j} + B_z \bar{k})$$

$$= (A_y B_z - A_z B_y)\bar{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\bar{j} +$$

$$(A_x B_y - A_y B_x)\bar{k} \qquad (30\text{-}1)$$

ويمكن كتابة العلاقة الاخيرة على شكل محدد هكذا : —

$$\bar{A} \times \bar{B} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (31-1)$$

(8-1) الضرب الثلاثي العددي والمتجهي :

لما كان الضرب المتجهي للمتجهين B^- و C^- ينتج متجهاً ثالثاً لذا يمكننا ان نكون منه ومن متجه آخر مثل المتجه A^- نوعين من الضرب الثلاثي الأول ويسمى بالضرب الثلاثي العددي والثاني ويسمى بالضرب الثلاثي المتجهي .

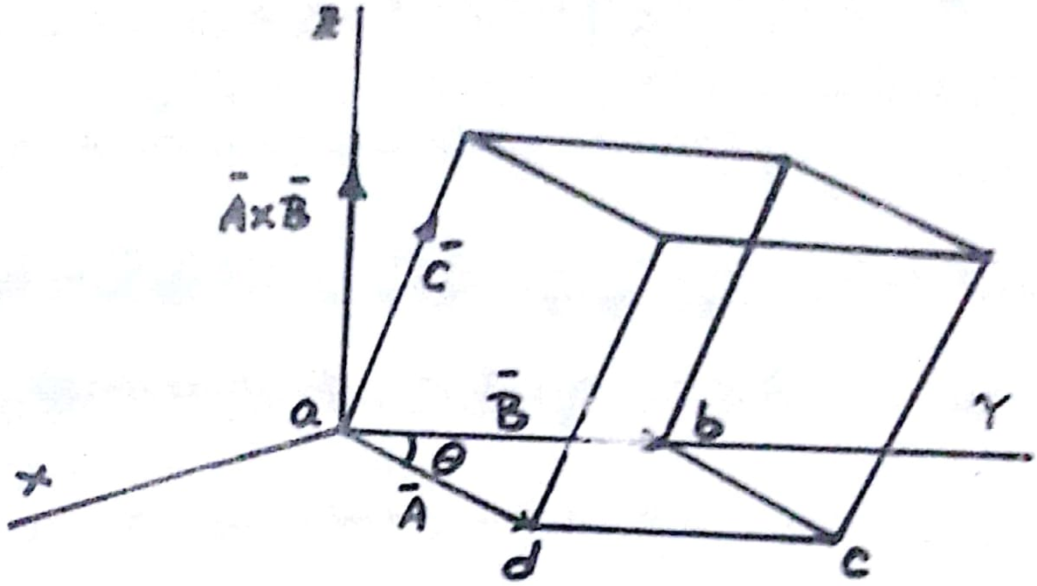
الضرب الثلاثي العددي : Triple scalar product

ان عملية الضرب التي تحصل بين المتجهات الثلاثة A^- ; B^- , C^- بالصيغة $C^-.(A^- \times B^-)$ تسمى بالضرب الثلاثي العددي وهي كمية عددية . لنتأمل الشكل (18-1) الذي يبين المتجهات A^-, B^-, C^- وقد التقت جميعها بنقطة واحدة هي نقطة الاصل لثلاثة محاور متعامدة x, y, z حيث رسم المتجهان A^- , B^- في مستوى المحورين x, y . ومن تعريف حاصل الضرب المتجهي لمتجهين يكون : —

$$|\bar{A} \times \bar{B}| = AB \sin\theta \quad (32-1)$$

اذ أن θ هي الزاوية المحصورة بين المتجهين A^- , B^- ، وهذه الكمية تساوي مساحة متوازي الاضلاع (abcd) الذي تتمثل اضلاعه بالمتجهين A^- و B^- . أما المتجه $A^- \times B^-$ فيكون اتجاهه بأتجاه المحور z كما يلاحظ في الشكل . أصبح الآن واضحاً ان الكمية $C^-.(A^- \times B^-)$ نتجت من ضرب المركبة C_z في مساحة متوازي الاضلاع (abcd) وبما ان C_z هي ارتفاع متوازي المستطيلات المتكون من المتجهات A^- , B^- , C^- يكون حاصل الضرب الثلاثي العددي مساوياً الى V حجم متوازي المستطيلات ، اي ان :

$$V = (\bar{A} \times \bar{B}) \cdot \bar{C} \quad (33-1)$$



الشكل (1-18)

ان التفسير الهندسي لحاصل الضرب هذا يوصلنا اذن الى النتيجة التالية :

$$V = (\bar{A}\times\bar{B})\cdot\bar{C} = (\bar{B}\times\bar{C})\cdot\bar{A} = (\bar{C}\times\bar{A})\cdot\bar{B} \quad (34\text{-}1)$$

ويلاحظ ان الترتيب الدوري للمتجهات A^- , B^- , C^- بقي ثابتاً في الحالات الثلاث لحاصل الضرب وهو في كل حالة مساو الى حجم متوازي المستطيلات المنوه عنه سابقاً . واذا تغير ترتيب المتجهات في العلاقة (1-34) تغيرت علامة الضرب وذلك لان :

$$\bar{A}\times\bar{B} = -\bar{B}\times\bar{A}$$

كما اشرنا سابقاً ، وهذا يعني ان اشارة الضرب تعتمد على الترتيب الدوري للمتجهات . وعليه يكون :

$$\bar{A}\cdot(\bar{B}\times\bar{C}) = -(\bar{C}\times\bar{B})\cdot\bar{A} \quad (35\text{-}1)$$

ومن الجدير بالملاحظة أن الضرب الثلاثي العددي لاتتغير قيمته اذا ما حصل تبادل موضعي في علامتي الضرب العددي والمتجهي ، أي أن :

$$\bar{A}\cdot(\bar{B}\times\bar{C}) = (\bar{A}\times\bar{B})\cdot\bar{C}$$

ومن السهل التعبير عن حاصل الضرب الثلاثي العددي للمتجهات ، C^- ، B^- ، A^- بدلالة مركباتها المتعامدة وهكذا يمكن كتابة العلاقة التالية :

$$\bar{A}\cdot(\bar{B}\times\bar{C}) = A_x(B_y C_z - B_z C_y) + A_y(B_z C_x - B_x C_z) + A_z(B_x C_y - B_y C_x) \qquad (36\text{-}1)$$

وقد تكتب هذه العلاقة على شكل محدد كالاتي :

$$\bar{A}\cdot(\bar{B}\times\bar{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \qquad (37\text{-}1)$$

الضرب الثلاثي المتجهي : Triple vector product

ان عملية الضرب التي تحصل بين المتجهات الثلاثة A^- ، B^- ، C^- وبالشكل $A^- \times (B^- \times C^-)$ تسمى بالضرب الثلاثي المتجهي وان حاصل الضرب هو متجه ولنرمز له بالحرف Q ، اي ان :

$$\bar{Q} = \bar{A}\times(\bar{B}\times\bar{C}) \qquad (38\text{-}1)$$

ويتضح من تعريف الضرب المتجهي لمتجهين أن المتجه Q^- عمودي على كل من المتجهين A^- و $(B^- \times C^-)$. وبما ان المتجه $(B^- \times C^-)$ عمودي على المتجهين B^- و C^- اذن يكون المتجه Q^- في المستوى الذي يضم المتجهين B^- و C^- ، ومن الممكن كتابة حاصل الضرب هذا بدلالة المركبات المتعامدة للمتجهات الثلاثة كما يأتي :

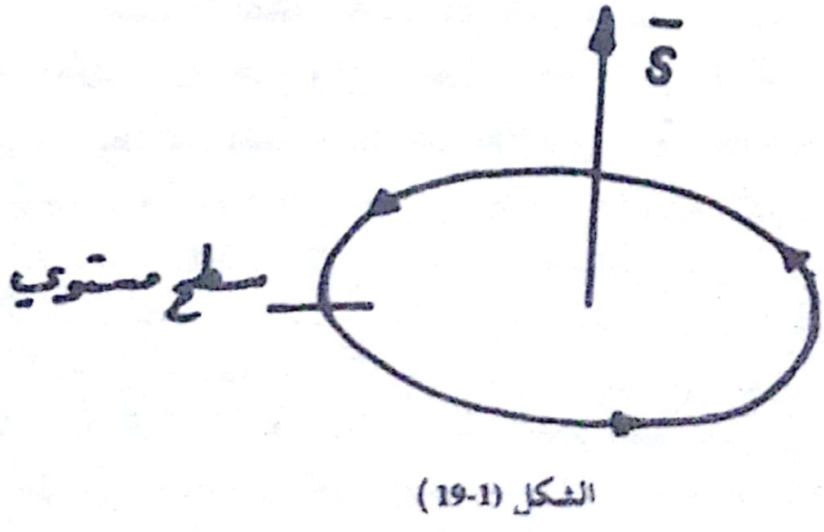
$$\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) = (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z)(B_x \bar{i} + B_y \bar{j} + B_z \bar{k}) - (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)(C_x \bar{i} + C_y \bar{j} + C_z \bar{k}) \quad (39\text{-}1)$$

$$\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) = (\bar{A} \cdot \bar{C})\bar{B} - (\bar{A} \cdot \bar{B})\bar{C} \quad (40\text{-}1)$$

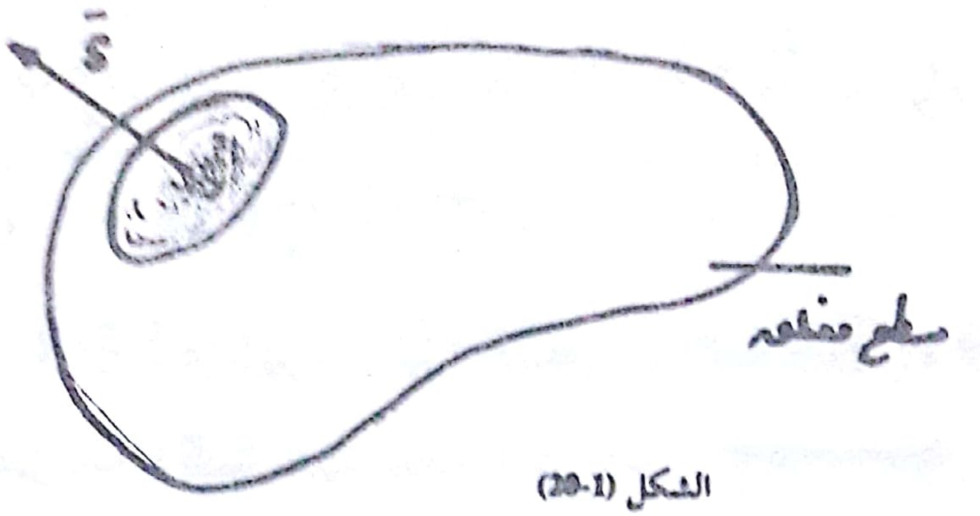
(9-1) تمثيل المساحة بكمية متجهه : Representation of area by a vector

نلاحظ السطح المستوى الموضح بالشكل (1-19)، فاذا كان لهذا السطح مقداراً ممثلاً بمساحته واتجاهاً محدداً بالعمود المقام عليه فهو متجه . ولتعيين الاتجاه الموجب للعمود المقام على ذلك السطح نتبع الطريقة التالية :

اذا كان السطح جزءاً من سطح كبير مغلق يصبح اتجاه العمود المرسوم نحو الخارج موجباً كما يلاحظ في الشكل (1-20) واذا كان السطح ليس جزءاً من سطح مغلق كما في الشكل (1-19) فلابد ان نعطي صفة موجبة لحدود هذا السطح لتعيين الاتجاه الموجب للعمود . وقد اتبعت القاعدة التالية لهذا الغرض . اذا دارت الاصابع الاربع لليد اليمنى حول حدود السطح عكس حركة عقرب الساعة الذي عدَّ الاتجاه الموجب لحدود السطح فالابهام يحدد الاتجاه الموجب للعمود المقام على ذلك السطح .



الشكل (1-19)



الشكل (20-1)

(10-1) تفاضل المتجهات : Differentiation of Vectors

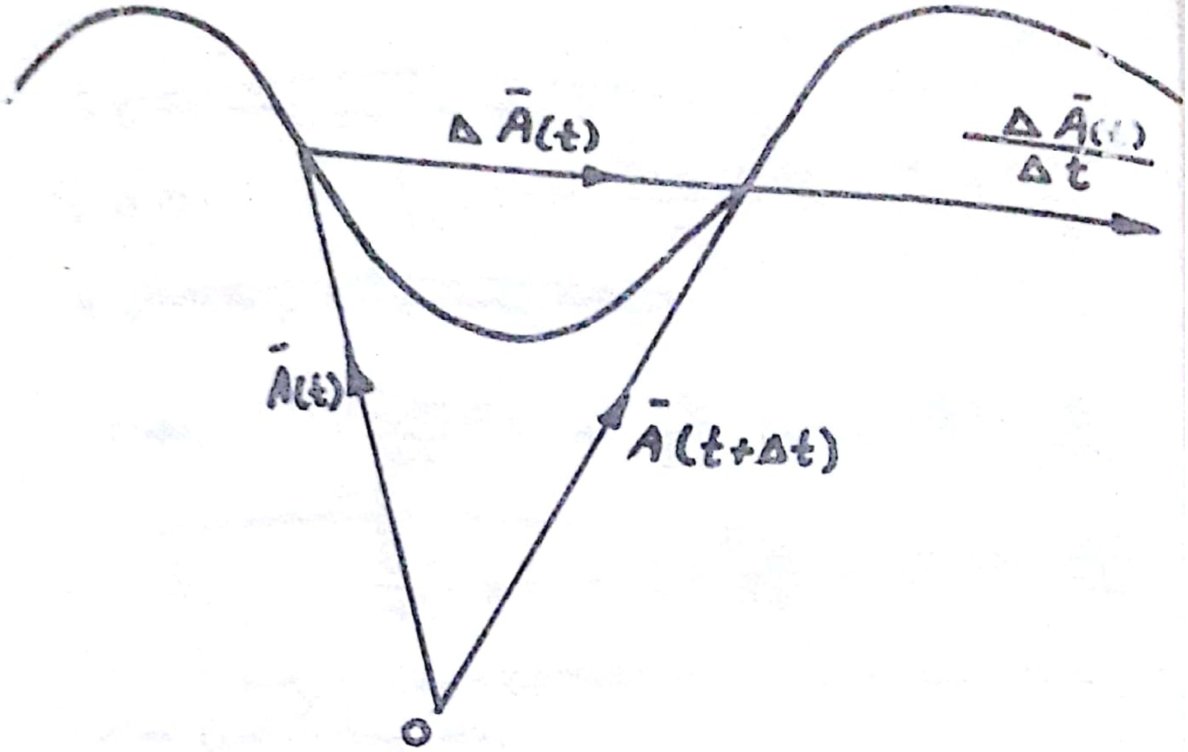
يتم تفاضل متجه ما بنفس الطريقة التي يتم بها تفاضل أي كمية عددية .
فاذا فرض أن المتجه $\bar{A}$ دالة للمتغير العددي (t) تكون عملية التفاضل بالنسبة لهذا المتغير بالشكل التالي :

(41-1)

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{A}(t+\Delta t) - \bar{A}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{A}}{\Delta t}$$

حيث أن المتجه $\Delta \bar{A}$ يمثل التغير الحاصل في المتجه $\bar{A}(t)$ الذي يحدد بالطرق المعروفة لطرح وجمع متجهين ، لاحظ الشكل (21-1)

واذا كان المتغير t يمثل الزمن فان نهاية المتجه $\bar{A}(t)$ ستعتبر موضع جسيم يتحرك في خط منحني مع الزمن . وخلال فترة زمنية قصيرة Δt يتغير المتجه $\bar{A}(t)$ فيصبح $\bar{A}(t + \Delta t)$. وبما أن الخصائص المتجهية لاي متجه لاتتغير عندما يقسم المتجه على كمية عددية يكون اذن المتجه $\Delta \bar{A}/\Delta t$ باتجاه $\Delta \bar{A}$ كما يلاحظ في الشكل (21-1) . واذا اقتربت Δt من الصفر اقترب المتجه $\bar{A}(t + \Delta t)$ من المتجه $\bar{A}(t)$ حتى ينطبق عليه تماماً عندما تكون الزاوية المحصورة بينهما مساوية الى الصفر ويصبح عندها اتجاه المتجه $d\bar{A}/dt$ منطبقاً على المماس للمنحني في نهاية المتجه A(t) . نرى من هذه النتيجة اننا نستطيع معرفة



الشكل (1-21)

السرعة المماسية للجسيم في اية لحظة اثناء حركته على هذا المنحنى. ولما كان المتجه A^{-} يشار اليه عادة بدلالة مركباته المتعامدة حسب العلاقة.

(1-42)

$$\bar{A}(t) = \bar{i}\, A_x(t) + \bar{j}\, A_y(t) + \bar{k}\, A_z(t)$$

تصبح المعادلة (1-41) على الشكل التالي :

(1-43)

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = \bar{i}\,\frac{dA_x}{dt} + \bar{j}\,\frac{dA_y}{dt} + \bar{k}\,\frac{dA_z}{dt}$$

من هذا نستنتج ان مشتقة اي متجه مثل A^{-} هي متجه آخر مركباته تعد مشتقات لمركبات المتجه الاصلي. وبما أن مشتقة متجه لمتغير عددي تستنتج بالطرق المعروفة لطرح المتجهات وقسمتها على كميات عددية بتطبيق اسس الرياضيات الاعتيادية عليها فقد اصبحت قواعد التكامل والتفاضل تستخدم في حالة جمع متجهين او أكثر.

$$\frac{d}{dt}(\bar{A} + \bar{B}) = \frac{d\bar{A}}{dt} + \frac{d\bar{B}}{dt} \qquad (1\text{-}44)$$

أو في حالة حاصل ضرب كمية عددية بمتجه

$$\frac{d}{dt}(m\bar{A}) = \bar{A}\frac{dm}{dt} + m\frac{d\bar{A}}{dt} \qquad (45\text{-}1)$$

او في حالة الضرب العددي والمتجهي لمتجهين :

$$\frac{d}{dt}(\bar{A}.\bar{B}) = \bar{B}.\frac{d\bar{A}}{dt} + \bar{A}.\frac{d\bar{B}}{dt} \qquad (46\text{-}1)$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{A}\times\bar{B}) = \frac{d\bar{A}}{dt}\times\bar{B} + \bar{A}\times\frac{d\bar{B}}{dt}$$

وينبغي ان يُزاعي ترتيب الحدود عند أخذ مشتقة الضرب المتجهي كما يلاحظ في المعادلة الاخيرة أعلاه.

(11-1) انحدار المجال : Field gradient

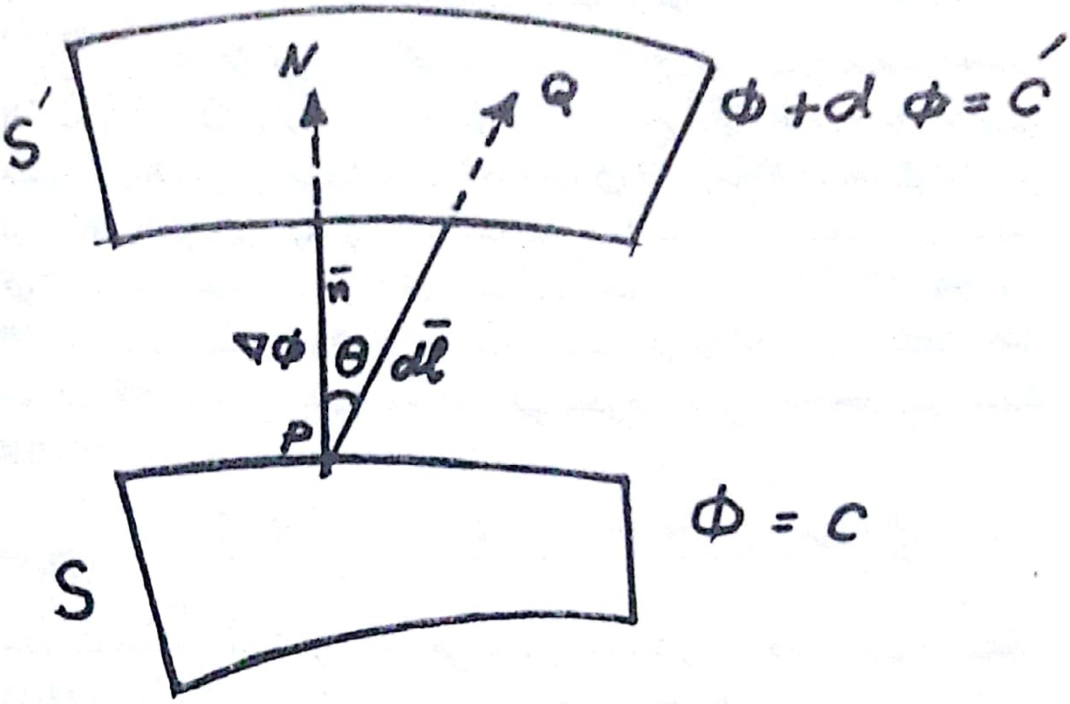
لنتصور كمية عددية مثل الجهد. فاذا كان لهذه الكمية قيماً منفردة في كل نقطة من نقاط حيز معين (اي تمثل بدالة احادية القيمة) كونت مايسمى بالمجال العددي ضمن ذلك الحيز. لنفرض ϕ تلك الكمية في نقطة P وهي دالة للمتغيرات x, y, z وان $\phi + d\phi$ قيمتها في نقطة أخرى Q تبتعد عن الاولى مسافة تفاضلية $\bar{dl}$ ضمن الحيز كما في الشكل (22-1).

من الممكن الان الاستعانة بمبرهنة تيلر للوصول الى المعادلة التالية :

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz \qquad (47\text{-}1)$$

نلاحظ من المعادلة (47-1) ان طرفها الايسر كمية عددية، بينما طرفها الايمن مجموع ثلاثة حدود جاءت نتيجة حاصل ضرب عددي لمتجهين، الاول $\bar{dl}$ ويعبر عنه بالعلاقة

$$d\bar{l} = \bar{i}\,dx + \bar{j}\,dy + \bar{k}\,dz \qquad (48\text{-}1)$$



الشكل (1-22)

والثاني يرمز له بالرمز $\nabla\phi$ (يقرأ دل ϕ) ويكتب بالصيغة التالية :

$$\nabla\phi = \bar{i}\,\frac{\partial\phi}{\partial x} + \bar{j}\,\frac{\partial\phi}{\partial y} + \bar{k}\,\frac{\partial\phi}{\partial z} \qquad (49\text{-}1)$$

نستنتج أذن ان حاصل الضرب العددي للمتجهين $\bar{dl}$ و $\nabla\phi$ هو كمية عددية مساوية الى $d\,\phi$ ، أي ان

$$d\,\phi = (\nabla\phi)\cdot d\bar{l} \qquad (50\text{-}1)$$

فأذا كانت ϕ تمثل الجهد فان $\nabla\phi$ الذي حدد بالمعادلة (1-50) يسمى انحدار الجهد ويطبق لاي نظام من الاحداثيات من ضمنها الاحداثيات المتعامدة . وقد يكتب هذا المتجه كذلك بصيغة اخرى هي grad ϕ ، ولمعرفة اهمية $\nabla\phi$ نلاحظ مرة اخرى العلاقة (1-50) التي قد تكتب بالشكل التالي :

$$d\phi = |\nabla\phi|\, dl \cos\theta \qquad (51\text{-}1)$$

اذ ان θ هي الزاوية المحصورة بين $\bar{dl}$ و $\nabla\phi$. نرى ان التغير الحاصل للكمية العددية ϕ يكون اكبر ما يمكن عندما تصبح الزاوية المحصورة بين المتجهين مساوية الى الصفر اي عندما يكون $\bar{dl}$ باتجاه $\nabla\phi$. وهكذا فالمتجه $\nabla\phi$ يشير الى الاتجاه الذي تتغير فيه ϕ مع الأزاحة اسرع ما يمكن. اما السهم الدال للمتجه $\nabla\phi$ فيكون باتجاه تتزايد فيه الكمية ϕ كما يلاحظ من الشكل (22-1) . وعلى هذا الاساس يكون للمتجه $(-\nabla\phi)$ مقدار مساو الى $\nabla\phi$ الا انه يكون باتجاه معاكس للاتجاه الذي يكون فيه تزايد ϕ أكبر ما يمكن. لنلاحظ الآن المعادلة التالية :

$$\phi(x, y, z) = C \qquad (52\text{-}1)$$

هذه المعادلة تمثل قيمة ϕ الثابتة على سطح ما وتساوي C كما هو مبين في الشكل (22-1) . فأذا تغيرت C تولدت لدينا سطوح جديدة من هذا النوع تسمى بسطوح تساوي الجهد . ان العمود dl_n الذي أقيم على السطح S في نقطة P يقطع السطح S في نقطة N ويحصل أن

$$dl_n = \bar{n} \cdot d\bar{l} \qquad (53\text{-}1)$$

أذ ان $\bar{n}$ تمثل وحدة متجه بأتجاه العمود المقام على السطح S في نقطة P . ومما تقدم نستطيع كتابة العلاقة التالية :

(54-1)

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial l_n}\, dl_n = \frac{\partial\phi}{\partial l_n}\, \bar{n}\cdot d\bar{l} = (\nabla\phi)\cdot d\bar{l}$$

$$\therefore\ \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial l_n}\, \bar{n} \qquad (55\text{-}1)$$

اما اذا وقعت النقطة Q على السطح S فلا يحصل أي تغير في الكمية ϕ عندما يتم الانتقال من P الى Q وهذا يعني أن $d\phi$ تساوي صفراً .

$$\therefore d\phi = (\nabla\phi)\cdot d\bar{l} = 0 \qquad (56\text{-}1)$$

ويتضح من هذه العلاقة الاخيرة أن $\nabla\phi$ متجه عمودي على السطح S،
نستنتج مما تقدم ان $\nabla\phi$ متجه مقداره أقصى معدل لتغير ϕ بالنسبة للازاحة واتجاهه باتجاه ذلك التغير.

(12-1) المؤثر ∇ :

لاحظنا في البند السابق ان التأثير المباشر للمؤثر ∇ على دالة عددية ϕ، $\nabla\phi$، او ما يسمى grad ϕ متجه تختلف صفاته تماماً عن ϕ التي هي كمية عددية. وعليه يمكننا ان نعد ∇ مؤثراً تفاضلياً اضافة الى كونه متجهاً يؤثر على الدالة ϕ وينتج عن هذه العملية المتجه $\nabla\phi$ الذي سبق وصفه جيداً. ولما كان هذا المؤثر متجهاً فلابد أن تكون له ثلاث مركبات هي $\nabla_x, \nabla_y, \nabla_z$ باتجاه المحاور المتعامدة x, y, z على التوالي. ويمكن كتابة هذا المؤثر الاتجاهي بالشكل التالي:

$$\nabla = \bar{i}\,\nabla_x + \bar{j}\,\nabla_y + \bar{k}\,\nabla_z \qquad (57\text{-}1)$$

ومما تجدر ملاحظته هنا أن $\nabla\phi$ هو مؤثر اتجاهي ايضاً الا انه لايعني شيئاً في هذا المجال خلافاً لما جاء عن $\nabla\phi$ سابقاً. توجد عمليات مهمة أخرى اضافة لما جاء أعلاه يتكرر فيها المؤثر ∇ مرة واحدة فقط وهي كما يلي:

1 ــ الضرب العددي المؤثر ∇ واي متجه آخر $\bar{A}$ الذي فيه سنستخدم كالعادة الاحداثيات المتعامدة فيحصل:

$$\nabla\cdot\bar{A} = \nabla_x A_x + \nabla_y A_y + \nabla_z A_z \qquad (58\text{-}1)$$

$$\nabla\cdot\bar{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (59\text{-}1)$$

أن $\nabla\cdot\bar{A}$ كمية عددية ذات أهمية كبيرة في الفيزياء كما سنرى في فصول قادمة وتسمى تفرق المجال المتجهي بالنسبة لـ $\bar{A}$ (divergence $\bar{A}$). وعلى هذا الاساس تكتب العلاقة التالية:

$$\nabla \cdot \bar{A} = div\, \bar{A} \qquad (60-1)$$

أما المعنى الفيزياوي لهذه العملية فسيوضح في بند لاحق.

2 ـــ الضرب المتجهي للمؤثر ∇ وأي متجه آخر $\bar{A}$.

ويعني التأثير بالمؤثر (∇x) على متجه $\bar{A}$ على يمينه وينتج عن هذه العملية مايلي:

$$\nabla x \bar{A} = \bar{i}(\nabla_y A_z - \nabla_z A_y) + \bar{j}(\nabla_z A_x - \nabla_x A_z) + \bar{k}(\nabla_x A_y - \nabla_y A_x) \qquad (61-1)$$

أو

$$\nabla x \bar{A} = \bar{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \bar{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \bar{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \qquad (62-1)$$

أن $\nabla x\bar{A}$ متجه جديد له أهمية فيزيائية كذلك وسيناقش في بند آخر ويسمى دوار المجال المتجهي بالنسبة لـ $\bar{A}$. وعليه تكتب العلاقة التالية:

$$\nabla x \bar{A} = Curl\, \bar{A} \qquad (63-1)$$

هناك عمليات مختلفة تتضمن استخدام المؤثر ∇ والتي ينتج عنها علاقات يمكن اثباتها بسهولة اذا ما كتب اي متجه بدلالة مركباته المتعامدة.

$$\nabla \cdot (\phi \bar{A}) = (\nabla \phi) \cdot \bar{A} + \phi\, \nabla \cdot \bar{A} \qquad (64-1)$$

$$\nabla x (\phi \bar{A}) = (\nabla \phi) x \bar{A} + \phi\, \nabla x \bar{A}$$

$$\nabla\cdot(\bar{A}\times\bar{B}) = \bar{B}\cdot(\nabla\times\bar{A}) - \bar{A}\cdot(\nabla\times\bar{B})$$

ولنوجز الآن ما جاء في البندين السابقين :

$$\nabla\phi = \text{grad}\,\phi = \text{متجه}$$

$$\nabla\cdot\bar{A} = \text{div}\,\bar{A} = \text{عدد} \qquad (65\text{-}1)$$

$$\nabla\times\bar{A} = \text{Curl}\,\bar{A} = \text{متجه}$$

قد يتكرر المؤثر ∇ مرتين في ست عمليات نوردها هنا بصورة موجزة ويمكن اثباتها ايضاً باستخدام الاحداثيات المتعامدة

— 1

$$\nabla\cdot(\nabla\phi) = \nabla^2\phi = \nabla\cdot\text{grad}\,\phi = \text{div grad}\,\phi \qquad (66\text{-}1)$$

أو

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \qquad (67\text{-}1)$$

إذ يبرز هنا مؤثر تفاضلي آخر ∇^2 يسمى مؤثر لابلاس العددي وهو ليس متجهاً خلافاً للمؤثر ∇ ويكتب بالصيغة التالية :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (68\text{-}1)$$

2 — بما أن ∇^2 مؤثر عددي فيمكن ان يعمل على متجه بالطريقة التالية :

$$\nabla^2\bar{A} = \frac{\partial^2\bar{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\bar{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\bar{A}}{\partial z^2} \qquad (69\text{-}1)$$

3 —

$$\nabla(\nabla\cdot\bar{A}) = \text{grad div } \bar{A} \qquad (70\text{-}1)$$

وهو متجه الا اننا هنا لانعطي له اي اهمية تذكر .

4 —

$$\nabla\times(\nabla\phi) = \text{Curl grad } \phi \qquad (71\text{-}1)$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

(لاتصح بصورة عامة وانما فقط عندما يكون $d\phi$ تفاضل تام وعندها $\oint d\phi = 0$ وبذلك يكون $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}$) وهي متطابقة وسنرى اهميتها في فصول لاحقة. يلاحظ هنا انه اذا كان حاصل الضرب المتجهي للمؤثر ∇ مع اي متجه آخر $\bar{A}$ يساوي صفراً، اي :

$$\nabla\times\bar{A} = 0 \qquad (72\text{-}1)$$

تظهر كمية عددية ϕ بحيث يكون :

$$\bar{A} = \nabla\phi \qquad (73\text{-}1)$$

هنا وفي مثل هذه الحالات تسمى الكمية $\bar{A}$ بالمتجه اللادوار .

5 — باستخدام المحاور المتعامدة x, y, z وكتابة المتجهات المشتركة في عمليات الضرب المختلفة بدلالة مركباتها الموازية لهذه المحاور يسهل علينا اثبات العلاقة التالية :

$$\nabla\cdot(\nabla\times\bar{A}) = \text{div curl } \bar{A} = 0 \qquad (74\text{-}1)$$

يلاحظ من هذه العلاقة انه لو كان هناك متجه مثل $\bar{B}$ حيث ان

$$\nabla\cdot\bar{B} = 0 \qquad (75\text{-}1)$$

يظهر متجه آخر $\bar{A}$ بحيث يكون

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A} \qquad (76\text{-}1)$$

وفي مثل هذه الحالات يطلق على الكمية $\bar{B}$ بالمتجه الدوار .

6 ــ ويمكننا ايضاً وبأستخدام المركبات المتعامدة أن نثبت العلاقة التالية التي يشترك فيها المؤثر مرة اخرى

$$(77\text{-}1)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{A}) = \text{Curl Curl } \bar{A}$$

$$= \text{grad div } \bar{A} - \nabla^2 \bar{A}$$

$$= \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla \cdot \nabla \bar{A}$$

(13-1) التكامل السطحي للمجال : Surface integration of vector field

نفرض ان مجالاً متجهياً (Vector field) كثافته $\bar{A}$ يقطع نحو الخارج سطحاً مغلقاً يحيط حجم معين v كما هو واضح في الشكل (23-1) . لمعرفة* فيض المجال الخارج من هذا السطح نتصور ان السطح مجزء الى مساحات تفاضلية مقدار كل منها ds . فالفيض الخارج من هذا السطح التفاضلي يساوي حاصل ضرب مساحة السطح في المركبة A_n العمودية على ذلك السطح أي أن

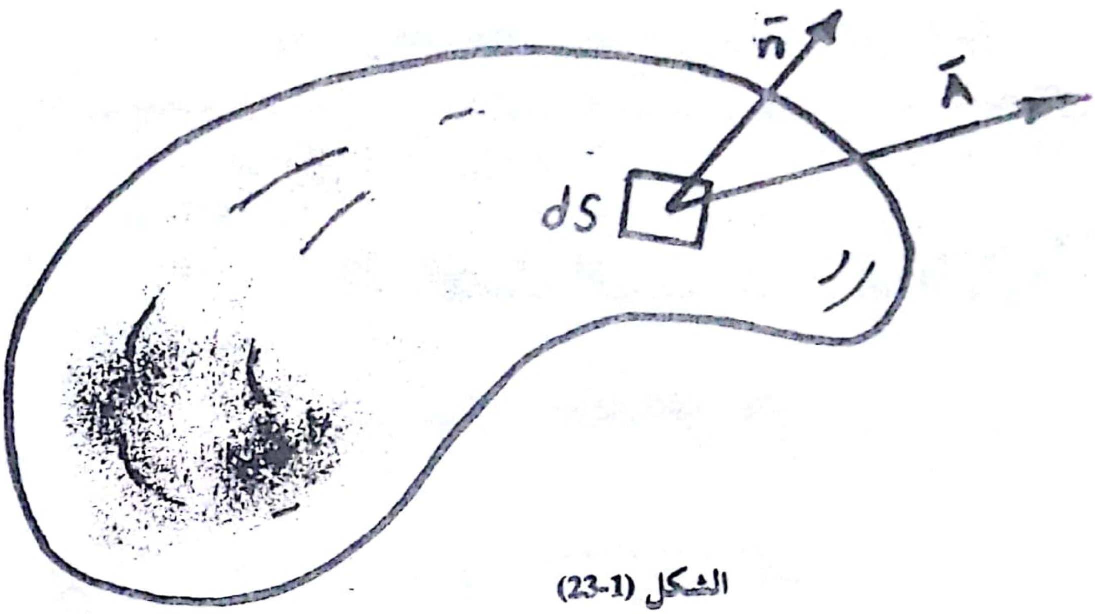
$$d\psi = A_n \, ds = \bar{A} \cdot \bar{n} \, ds \qquad (78\text{-}1)$$

الفيض

اذ ان $\bar{n}$ وحدة متجه عمودية على السطح التفاضلي ds ولحساب الفيض الكلي الذي يقطع السطح S نكامل العلاقة (78-1) لجميع نقاط السطح فيحصل أن :

$$\psi = \int_S \bar{A} \cdot \bar{n} \, ds \qquad (79\text{-}1)$$

* والتكامل السطحي لمركبة المجال العمودية على جميع اجزاء السطح المغلق

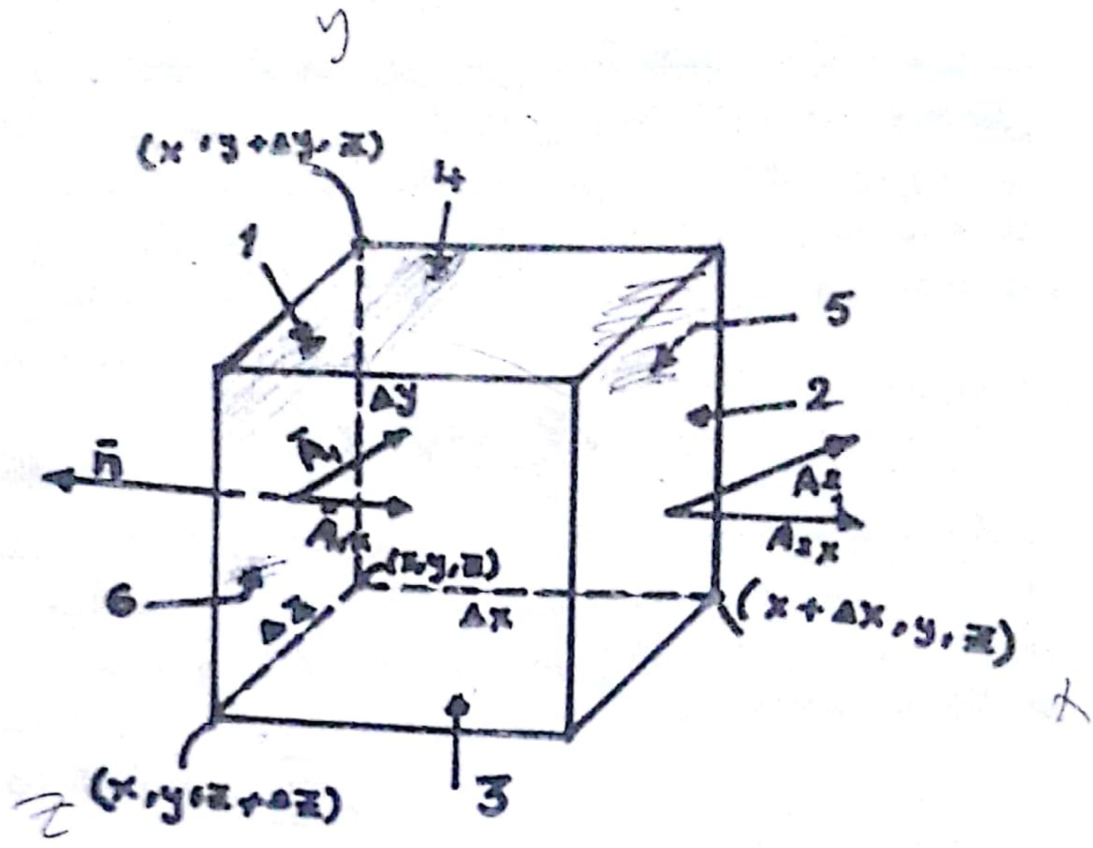


الشكل (1-23)

ومن الممكن ان نستبدل $\bar{n}\,ds$ بالمتجه $d\bar{s}$ الذي مقداره يساوي المساحة ds واتجاهه عمودي على تلك المساحة، اذن يكون الفيض الكلي الخارج من السطح S مساوياً الى

$$\Psi = \int_S \bar{A} \cdot d\bar{S} \qquad (1\text{-}80)$$

يسمى التكامل الاخير بالتكامل السطحي (Surface integral) لمركبة المجال العمودية على جميع أجزاء السطح المغلق. اما اشارة التكامل فتعتمد على اشارة اتجاه العمود على السطح. اذ تكون هذه الاشارة موجبة عندما يرسم العمود نحو الخارج. وعلى هذا الاساس يصبح الفيض الداخل الى الحجم τ سالباً والفيض الخارج منه موجباً. ومما تجدر ملاحظته هنا أن السطح المغلق (Closed surface) سطح حدودي يقسم حجماً معيناً الى قسمين داخلي وخارجي. والسطح المغلق نفسه سطح غير محدد اذ لايمكن رسم منحني فيه ليمثل حافة لهذا السطح. أما السطح المفتوح (open surface) فهو السطح الذي يحدد بمنحني. فصفحة الكتاب تعد سطحاً مفتوحاً وحافتها تعد المنحني الذي يحددها، ولتعيين اتجاه العمود على السطح المفتوح راجع البند (1-9).



الشكل (24-1)

مصر جد ١، ٦

(14-1) تفرق المجال ومبرهنة كاوس : The divergence and Gauss's theorem

لقد اوضحنا في بند سابق ان حاصل الضرب العددي بين المؤثر ∇ واي متجه $\bar{A}$ ينتج عنه دالة عددية تسمى تفرق او تباعد مجال المتجه $\bar{A}$ (divergence of $\bar{A}$) وتكتب بصورة مختصرة $\operatorname{div}\bar{A}$ (الشكل)

أي أن

$$\boxed{\nabla\cdot\bar{A}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \qquad (81\text{-}1)$$

$$= \operatorname{div}\bar{A}$$

هذه العلاقة تستخدم كثيراً في حقول مختلفة وخاصة في علم الموائع (Hydrodynamics)*. لنحسب الآن الفيض الذي كثافته $\bar{A}$ الخارج من سطح مغلق يحيط حجماً متناهياً في الصغر . ولنفرض ان هذا الحجم هو مكعب صغير

Δx Δy Δz ، أضلاعه توازي المحاور الثلاثة المتعامدة z, y, x بحيث ان احداثيات الرأس القريب من نقطة الاصل هي z, y, x كما هو مبين في الشكل (24-1) ولمعرفة الفيض الخارج من هذا المكعب علينا ان نجد الفيض الخارج من كل وجه من أوجه المكعب الستة ، لنتأمل اولاً الوجه المرقم (1) العمودي على محور x . ان الفيض الخارج من هذا الوجه يساوي التكامل السطحي لمركبة المجال A_{1x} مأخوذ لجميع اجزاء هذا الوجه ، أي ان :

$$\psi_{1x} = -\int A_{1x}\, dy\, dz \qquad (82\text{-}1)$$

الاشارة السالبة تدل على ان الفيض يقطع هذا الوجه نحو الداخل، وبما ان المكعب صغير جداً فمن الممكن اختزال التكامل وذلك بجعله مساوياً الى حاصل ضرب A_{1x} في مساحة الوجه $\Delta y \Delta z$ فيكون الفيض الخارج من الوجه (1) هو $\psi_{1x} = -A_{1x}\Delta y \Delta z$ وبالمثل الفيض الخارج من الوجه (2) هو

$$\psi_{2x} = +A_{2x}\Delta y \Delta z$$

ولما كانت المركبة A_{1x} تختلف قليلاً عن A_{2x} يمكننا كتابة العلاقة التالية :

$$A_{2x} = A_{1x} + \frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x \qquad (83\text{-}1)$$

وقد اهملنا الحدود الاخرى في المعادلة التي تتضمن $(\Delta x)^2$ فما فوق وذلك لصغر الكمية Δx . اذن الفيض الخارج من الوجه (2) يصبح :

$$\psi_{2x} = \left(A_{1x} + \frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y \Delta z$$

وهكذا فمحصلة الفيض الخارج من الوجهين (1) ، (2) باتجاه محور x يكون :

$$\psi_x = \psi_{1x} + \psi_{2x} = \frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z \qquad (84\text{-}1)$$

وبأتباع نفس الطريقة السابقة نستطيع حساب الفيض الخارج من الوجهين (3) و (4) باتجاه محور y فيكون

Scanned by CamScanner

$$\Psi_y = \Psi_{3y} + \Psi_{4y} = \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \qquad (85\text{-}1)$$

والفيض الخارج من الوجهين (5) ,(6) باتجاه محور z يكون :

$$\Psi_z = \Psi_{5z} + \Psi_{6z} = \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \qquad (86\text{-}1)$$

إذن الفيض الكلي الخارج من اوجه المكعب الستة يساوي مجموع الحدود الثلاثة الاخيرة ، اي ان :

$$\Psi = \Psi_x + \Psi_y + \Psi_z = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) \underbrace{\Delta x \Delta y \Delta z}_{\Delta\tau} \qquad (87\text{-}1)$$

my name

وبما ان مجموع المشتقات يساوي $\nabla \cdot \bar{A}$ وان $\Delta\tau = \Delta x \Delta y \Delta z$ حجم المكعب ، تصبح العلاقة (87-1) بالنسبة لهذا المكعب بالشكل التالي

$$\oint \bar{A} \cdot d\bar{S} = (\nabla \cdot \bar{A})\, \Delta\tau \qquad (88\text{-}1)$$

وهكذا نرى ان الفيض الخارج من سطح مكعب متناه في الصغر يساوي حاصل ضرب تباعد مجال المتجه في حجم ذلك المكعب . اذن فتباعد مجال اي متجه مثل $\bar{A}$ في نقطة معينة هو الفيض الخارج لوحدة الحجوم المجاورة لتلك النقطة .

تمكنا الان ان نربط تباعد مجال المتجه $\bar{A}$ بفيضه الخارج من حجم متناهي في الصغر . وبالنسبة لاي حجم محدود يمكننا ان نثبت بأن الفيض الكلي الخارج من ذلك الحجم يساوي حاصل جمع الفيض الخارج من جميع اجزائه

المأخوذة بصورة منفصلة ، وبما ان حاصل الجمع هذا يساوي ايضاً تكامل تباعد المجال $\bar{A}$. ∇ مأخوذ لجميع اجزاء ذلك الحجم نستنتج المبرهنه التالية التي "تنص على ان تكامل المركبة العمودية لاي متجه على سطح مغلق يساوي تكامل تباعد مجال ذلك المتجه مأخوذاً لجميع اجزاء الحجم المحاط بذلك السطح". تسمى هذه المبرهنه بمبرهنة كاوس وتكتب بالشكل التالي : —

$$\int_S \bar{A} . d\bar{S} = \int_\tau \nabla . \bar{A} \, d\tau \tag{89-1}$$

يلاحظ من هذه العلاقة ان S يمثل أي سطح مغلق وان τ الحجم الذي بداخله ومما تجدر ملاحظته هنا انه لو سمح للحجم τ ان يأخذ بالصغر الى حد بحيث تبقى $\bar{A}$. ∇ ثابتة ضمن ذلك الحجم يحصل أن :

$$\int_S \bar{A} . d\bar{S} = (\nabla . \bar{A}) \tau \tag{90-1}$$

وعليه يكون تباعد مجال المتجه $\bar{A}$ اي $\nabla . \bar{A}$ مساوياً الى :

$$\nabla . \bar{A} = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \int_S \bar{A} . d\bar{S} \tag{91-1}$$

اذن تباعد مجال المتجه $\bar{A}$ هو فيض المجال الخارج لوحدة الحجوم عندما يقترب الحجم τ من قيمة الصفر .

(15-1) مبرهنة كرين Green's theorem

ان مبرهنة كاوس مفيدة جداً في الفيزياء والرياضيات اذ بواسطتها نستطيع الحصول على كثير من التحويلات المهمة (transformations) . لنعتبر مثلاً العلاقة التالية :

$$\bar{A} = u \nabla v \tag{92-1}$$

U ∆ V

اذ ان كلا من u و v دالة عددية . ولنجعل الان المؤثر ∇ يعمل على طرفي المعادلة هذه بالشكل التالي :

$$\nabla \cdot \bar{A} = \nabla \cdot (u \nabla v) \tag{93-1}$$

فاذا استخدمنا نظام المحاور المتعامدة ينتج ان :

$$\nabla \cdot \bar{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(u \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$= u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \bar{A} = u \nabla^2 v + \nabla u \cdot \nabla v \tag{94-1}$$

واذا وضعنا قيمة $\nabla \cdot \bar{A}$ هذه في الطرف الايمن من مبرهنة كاوس، العلاقة (89-1) ، يحصل :

$$\int_s (u \nabla v) \cdot d\bar{s} = \int_\tau (u \nabla^2 v + \nabla u \cdot \nabla v)\, d\tau \tag{95-1}$$

تسمى هذه العلاقة الاخيرة مبرهنة كرين الاولى . واذا جعلنا الان الدالتين u ,v في العلاقة (95-1) تحل احداهما محل الاخرى يكون :

$$\int_s (v \nabla u) \cdot d\bar{s} = \int_\tau (v \nabla^2 u + \nabla u \cdot \nabla v)\, d\tau \qquad (96\text{-}1)$$

وبطرح العلاقة (96-1) من العلاقة (95-1) تنتج العلاقة التالية : .

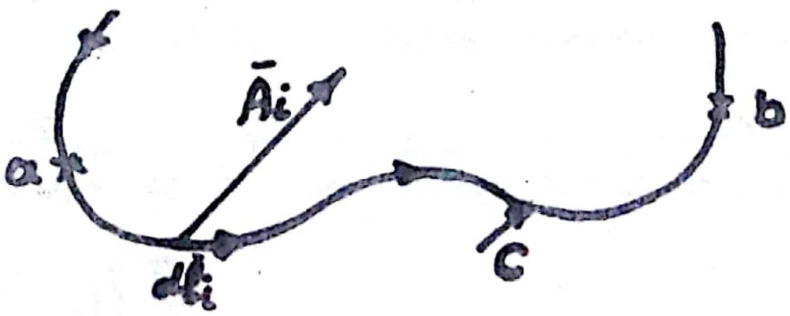
$$\int_s (u \nabla v - v \nabla u) \cdot d\bar{s} = \int_\tau (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u)\, d\tau \qquad (97\text{-}1)$$

تسمى هذه العلاقة مبرهنة كرين الثانية .

(16-1) التكامل الخطي للمجال : Line integral of vector field

اذا كانت $\bar{A}$ تمثل مجالاً متجهاً فالتكامل الخطي لهذا المتجه يعرف حسب العلاقة التالية :

$$\int_a^b \bar{A} \cdot d\bar{l} \qquad (98\text{-}1)$$



الشكل (25-1)

حيث ان a هي نقطة البداية و b نقطة النهاية على المنحني C الذي ينجز عليه التكامل، $\bar{dl}$ متجه ازاحة تفاضلي مأخوذ على هذا المنحني. من الواضح أن التكامل الخطي الممثل بالعلاقة السابقة هو كمية عددية وذلك لان $\bar{A}\cdot\bar{dl}$ كمية عددية. وللحصول على التكامل الخطي يقسم الجزء المأخوذ من C والمحصور بين النقطتين a و b الى عدد كبير من المتجهات التفاضلية $\bar{dl_i}$ التي يعين لكل منها $\bar{A_i}$ كما هو واضح من الشكل (25-1). بعدئذ تجرى عملية حاصل الضرب العددي لكل متجه تفاضلي $\bar{dl_i}$ مع المتجه المطابق له $\bar{A_i}$ ومن ثم تجمع النتائج من حاصل الضرب العددي المذكور. اذن يعرف التكامل الخطي بأنه النهاية التي يصل اليها هذا الجمع عندما يقترب عدد المتجهات التفاضلية من اللانهاية حيث تقترب قيمة كل متجه منها من الصفر. ويمكن ان يعبر عن هذا التعريف بالعلاقة التالية :

$$\int_a^b \bar{A}\cdot\bar{dl} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\bar{A_i}\cdot\bar{dl_i} \qquad (99\text{-}1)$$

وينبغي ان يلاحظ من أن التكامل الخطي لايعتمد فقط على نقطتي البداية والنهاية b و a وانما يعتمد كذلك على المنحني C الذي يؤخذ عليه التكامل. اما التكامل الخطي حول اي منحني مغلق C الذي يلاحظ من الشكل (26-1) فله أهمية كبيرة كما سنرى ويكتب بالشكل التالي :

$$\oint_C \bar{A}\cdot\bar{dl} \qquad (100\text{-}1)$$

وقد تكون قيمة هذا التكامل حول المنحني المغلق صفراً او غير مساوية الى الصفر. وتزداد أهميته اذا اصبح مساوياً الى الصفر، اذ انه في هذه الحالة لايعتمد على المنحني C ، لذا يحذف الحرف C من علامة التكامل ويكتب بالشكل التالي :

$$\oint \bar{A}\cdot\bar{dl} \qquad (101\text{-}1)$$

وبأستخدام المحاور المتعامدة يمكننا كتابة التكامل الخطي حول المنحني المغلق كالاتي :

$$\oint_c \bar{A}\cdot d\bar{l} = \oint_c (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \qquad (102\text{-}1)$$

ولو فرضنا على سبيل المثال ، ان المتجه A قوة تؤثر على جسيم متحرك ، يكون التكامل الخطي للمتجه A على مسار الجسيم مساوياً الى الشغل المنجز من قبل تلك القوة . لنتصور ان المتجه A يعبر عنه بالعلاقة التالية :

$$\bar{A} = \nabla\phi \qquad (103\text{-}1)$$

اذ ان ϕ دالة عددية . اذن التكامل الخطي لهذا المتجه بين النقطتين a ,b الواقعتين على منحني معين ضمن مجال هذا المتجه يساوي :

$$\int_a^b \bar{A}\cdot d\bar{l} = \int_a^b (\nabla\phi)\cdot d\bar{l} = \int_a^b \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz\right) \qquad (104\text{-}1)$$

وبما ان

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz$$

ينتج

$$\int_a^b \bar{A}\cdot d\bar{l} = \int_a^b d\phi = \phi_b - \phi_a \qquad (105\text{-}1)$$

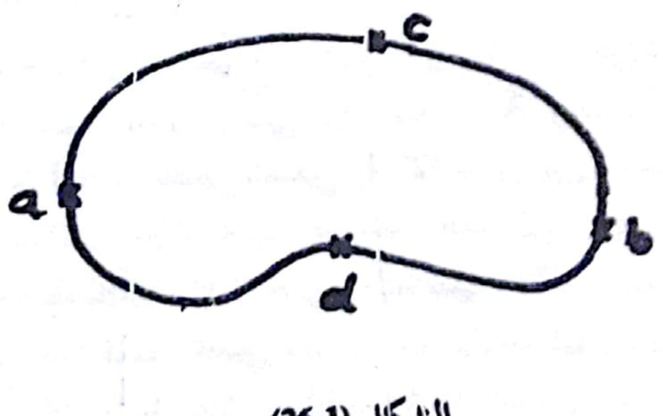
اذ ان ϕ_b و ϕ_a قيم ϕ عند النقطتين b و a على التوالي . من هذا نستنتج ان التكامل الخطي لانحدار اي دالة عددية احادية القيمة ولها تفاضل تام مثل ϕ يساوي صفراً اذا انجز التكامل حول منحني مغلق وذلك لانه لو اغلق المنحني المحصور بين النقطتين a و b مثلاً انطبقت هاتان النقطتان على بعضهما ويصبح

التكامل الخطي عندئذ مساوياً الى ($\phi_a - \phi_a$) وهو صفر . اي ان لكل مجال انجاهي محافظ A^- توجد دالة عددية ϕ تعرف بدالة جهد المجال تعطى بالعلاقة (103-1) .

لنتأمل الان المنحني المغلق الموضح في الشكل (26-1) ولنفرض ان التكامل الخطي للمتجه A^- حول اي منحني مغلق كالذي في الشكل يساوي صفراً . اذن يمكننا كتابة العلاقة التالية :

$$\int_{acb} \bar{A}.d\bar{l} - \int_{adb} \bar{A}.d\bar{l} = \int_{acb} \bar{A}.d\bar{l} + \int_{bda} \bar{A}.d\bar{l} = 0 \qquad (106\text{-}1)$$

$$\therefore \int_{acb} \bar{A}.d\bar{l} = \int_{adb} \bar{A}.d\bar{l} \qquad (107\text{-}1)$$



الشكل (26-1)

اي ان التكامل الخطي للمتجه A^- من a الى b لايعتمد على المسار المتخذ بين النقطتين وانما يعتمد فقط على احداثيات النقطتين . وعليه يكون :

$$\int_a^b \bar{A}.d\bar{l} = \phi_b - \phi_a \qquad (108\text{-}1)$$

واذا اعتبرنا النقطتين a و b قريبتين جداً من بعضهما امكننا كتابة العلاقة التالية :

$$\bar{A}\cdot d\bar{l} = d\phi = (\nabla\phi)\cdot d\bar{l} \qquad (109\text{-}1)$$

او

$$(\bar{A} - \nabla\phi)\cdot d\bar{l} = 0 \qquad (110\text{-}1)$$

وبما ان العلاقة هذه تصح لجميع الاتجاهات تكون اي مركبة من مركبات المتجه $A^{-} - \nabla\phi$ في اي اتجاه مساوية صفراً . وهذا يعني ان :

$$\bar{A} = \nabla\phi$$

وهكذا نستنتج ان التكامل الخطي للمتجه A^{-} حول اي منحني مغلق يساوي صفراً اذا كان هذا المتجه انحدار دالة عددية مثل ϕ.

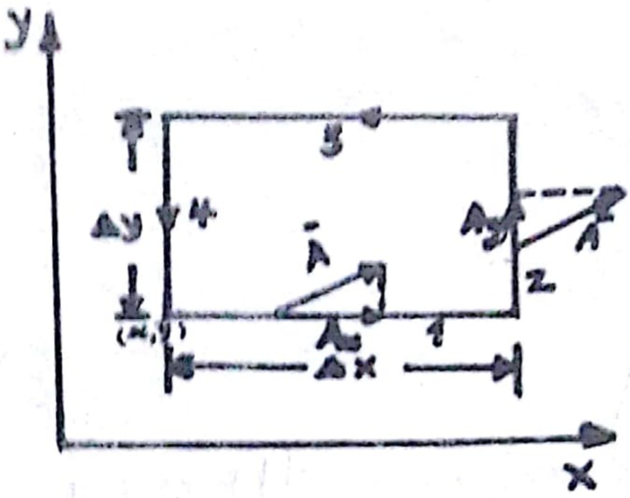
(17-1) دوار المجال ومبرهنة ستوك : The Curl and Stokes theorem

لقد جاء في بند سابق ان حاصل تأثير المؤثر ∇ على اي متجه A^{-} على يمينه ينتج عنه متجه جديد يسمى دوار المتجه A^{-} ويكتب بصورة مختصرة $\nabla \times A^{-}$ او $\text{Curl } A^{-}$. لنتأمل الشكل (27-1) الذي يبين مساراً مغلقاً متناهياً في الصغر اتجاهه معاكس لحركة عقرب الساعة . هذا المسار عبارة عن مستطيل مساحته $\Delta x \Delta y$ واضلاعه توازي المحورين المتعامدين x, y . لنتصور الان مجالاً متجهاً A^{-} يقطع هذا المسار المغلق ولنفرض ان مركباته الموازية للمحورين x, y لاتتغير ذلك لصغر هذا المسار .فأذا جعلنا احداثيات احدى رؤوس هذا المستطيل القريبة من نقطة الاصل تساوي (x, y) وأشرنا الى اضلاعه الاربعة بالارقام ,(3) ,(4) (1) ,(2) كما هو واضح في الشكل، يكون حساب التكامل الخطي حول هذا المستطيل كما يأتي :

نبدأ من الرأس (x, y) باتجاه المسار المغلق الذي اخترناه فيكون :

التكامل الخطي على الضلع (1) $\quad A_{1x}\Delta x$

التكامل الخطي على الضلع (2) $\quad A_{2y}\Delta y$



الشكل (27-1)

التكامل الخطي على الضلع (3) $-A_{3x}\,\Delta x$

التكامل الخطي على الضلع (4) $-A_{4y}\,\Delta y$

الاشارة السالبة تدل على ان التكامل الخطي قد اختزل باتجاه معاكس لاتجاه المجال .
اذن التكامل الخطي حول الاضلاع الاربعة لهذا المستطيل تساوي :

$$\oint_{\text{مستطيل}} \bar{A} \cdot d\bar{l} = (A_{1x} - A_{3x})\Delta x + (A_{2y} - A_{4y})\Delta y$$

(111-1)

وباستخدام مبرهنة تايلر نستطيع كتابة العلاقتين التاليتين :

$$A_{3x} = A_{1x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\Delta y$$

$$A_{2y} = A_{4y} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\Delta x$$

اذ اننا اهملنا الحدود الاخرى التي تتضمن $(\Delta x)^2$ و $(\Delta y)^2$ فما فوق .

(112-1)

$$\int_{\text{مستطيل}} \bar{A}\cdot d\bar{l} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\Delta x \Delta y$$

وبما ان الكمية المحصورة بين القوسين في العلاقة الاخيرة هي مركبة $\nabla x \bar{A}$ باتجاه محور z يمكننا اذن ان نكتب :

$$\int_{\text{مستطيل}} \bar{A}\cdot d\bar{l} = (\nabla x \bar{A})_z \Delta x \Delta y =$$

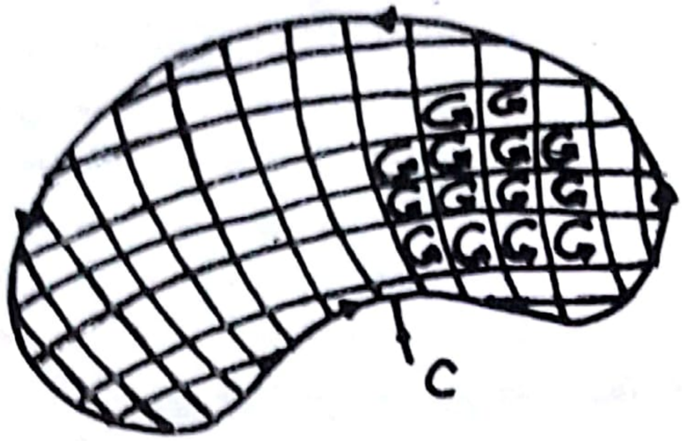
$$(\nabla x \bar{A})_z \Delta S_{xy} \quad (113\text{-}1)$$

اذ ان $(\nabla x \bar{A})_z$ هي مركبة دوار المتجه $\bar{A}$ باتجاه محور z وان ΔS_{xy} هي مساحة المستطيل. ولما كان المستطيل في المستوى (xy) تصبح مركبة $\nabla x \bar{A}$ عمودية على مساحة هذا المستطيل.

$$\therefore \int_{\text{مستطيل}} \bar{A}\cdot d\bar{l} = (\nabla x \bar{A})_n \Delta S_{xy} \quad (114\text{-}1)$$

$$= (\nabla x \bar{A})\cdot \Delta \bar{S}_{xy}$$

وهكذا نلاحظ ان التكامل الخطي لاي متجه مثل $\bar{A}$ حول مستطيل متناه في الصغر يساوي حاصل ضرب مركبة دوار المتجه $\bar{A}$ العمودية على السطح في مساحة المستطيل. اذن التكامل الخطي حول اي مسار مغلق مثل C الموضح في الشكل (28-1) يمكن ارتباطه بدوار المتجه $\bar{A}$ وذلك بأن نتصور ان سطحاً مفتوحاً قد ملأ الفسحة الكائنة ضمن المسار المغلق وقد جزيء الى مستطيلات متناهية في الصغر مساحة كل منها dS. فالتكامل الخطي حول المسار المغلق C يكافيء اذن مجموع التكاملات الخطية المأخوذة حول المسارات الصغيرة المغلقة التي يعتبر كل منها مستطيلاً متناهياً في الصغر. ومما تجدر ملاحظته هنا ان التكاملات الخطية هذه



الشكل (1-28)

المأخوذة حول المسارات المغلقة المتجاورة يختزل بعضها البعض لأنها في اتجاهات متعاكسة عدا تلك التي يشترك معها المسار الرئيس المغلق C ، اذ انها لاتختزل .
وعليه يمكننا كتابة العلاقة التالية :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \oint_{i} \bar{A} \cdot d\bar{l} = \oint_{c} \bar{A} \cdot d\bar{l} \qquad (115\text{-}1)$$

هنا i يشير الى احد هذه المسارات المغلقة والتكامل الخطي على يمين العلاقة الاخيرة قد اخذ حول المسار المغلق C الذي يحدد حافة السطح المفتوح S .

اما الطرف الايمن من العلاقة (1-114) فيصبح عند اخذ عملية الجمع اعلاه بنظر الاعتبار كالاتي :

(1-116)

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\nabla \times \bar{A}) \cdot d\bar{S} = \int_{S} (\nabla \times \bar{A}) \cdot d\bar{S}$$

وعند ربط العلاقتين (1-115) و (1-116) مع بعضهما نحصل على :

$$\oint_{C} \bar{A} \cdot d\bar{l} = \int_{S} (\nabla \times \bar{A}) \cdot d\bar{S} \qquad (117\text{-}1)$$

اذ ان S هو اي سطح مفتوح محاط بالمسار المغلق C . تنص هذه العلاقة على ان التكامل الخطي للمتجه $\bar{A}$ حول اي مسار مغلق C يساوي التكامل السطحي لمركبة دوار المتجه $\bar{A}$ العمودية على السطح S والمحاط بالمسار المغلق C ، وتسمى هذه العلاقة الاخيرة بمبرهنة ستوك ولها استخدامات كثيرة ومهمة وخاصة في موضوع النظرية الكهرومغناطيسية . ومن الجدير بالذكر هنا أنه لو سمح للسطح S المحاط بالمنحني المغلق C أن يأخذ بالصغر الى حد الكفاية بحيث تبقى مركبة دوار المتجه العمودية على السطح $(\nabla \times A)_n$ ثابتة ضمن ذلك السطح يحصل أن :

مبرهنة ستوك

$$\boxed{\oint_c \bar{A} \cdot d\bar{l} = \int (\nabla \times \bar{A})_n \, dS} \qquad (118\text{-}1)$$

وتكون عندئذ مركبة دوار المتجه $\bar{A}$ أي $(\nabla \times \bar{A})_n$ مساوية الى :

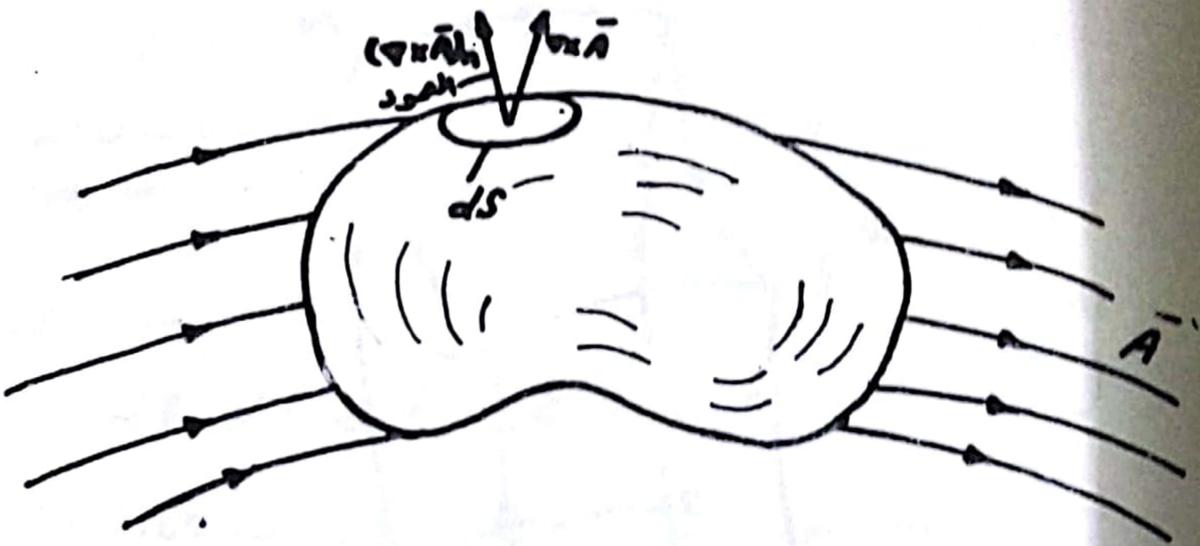
$$(\nabla \times \bar{A})_n = \lim_{S \to 0} \frac{1}{S} \oint_c \bar{A} \cdot d\bar{l} \qquad (119\text{-}1)$$

اي ان مركبة $(\nabla \times \bar{A})$ باتجاه العمود على السطح S تساوي النهاية التي يصل اليها التكامل الخطي لوحدة المساحة عندما يقترب السطح المحاط بالمسار المغلق، من الصفر ، والشكل (1-29) يوضح اتجاه كل من دوار المتجه $\bar{A}$ ومركبته العمودية على السطح S المحاط بالمنحني المغلق C .

(18-1) الاحداثيات المعممة Generalized coordinates

اضافة الى الاحداثيات المتعامدة هنالك احداثيات تستخدم كثيراً خاصة اذا كان المجال يظهر تناظراً معيناً . سنركز اهتمامنا على نوعين من هذه الاحداثيات هي الاحداثيات الاسطوانية والكروية ويمكننا بسهولة وبصورة مباشرة حساب انحدار اي كمية ، او تفرق ودوار اي متجه اذا استخدمنا هذه الاحداثيات . الا ان العمل سيكون اقل تعقيداً واكثر فائدة بعد معرفة الاحداثيات المعممة .

لنعتبر المعادلة التالية :



الشكل (29-1)

$$U(x, y, z) = q \qquad (120\text{-}1)$$

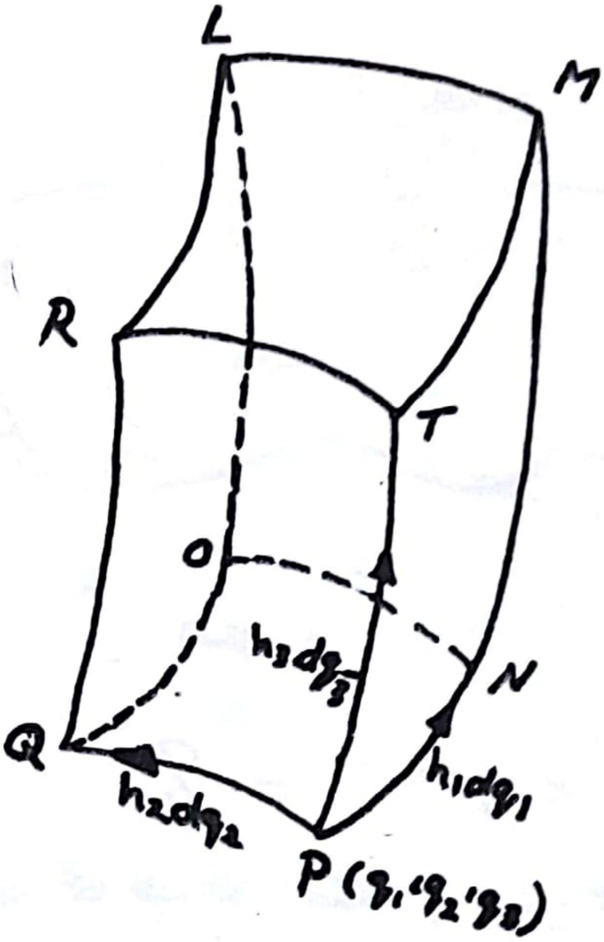
إذ ان q كمية ثابتة. تمثل هذه المعادلة مجموعة من السطوح كل واحد منها له خصائص معينة يحددها الثابت q. فالمعادلة x = q تحدد مجموعة من سطوح موازية للمستوى (y z) في نظام الاحداثيات المتعامدة مثلاً. لنفرض الآن ان المعادلات الثلاث التالية:

$$U_1(x, y, z) = q_1 \qquad (121\text{-}1)$$

$$U_2(x, y, z) = q_2$$

$$U_3(x, y, z) = q_3$$

تمثل ثلاث مجموعات من سطوح متعامدة مع بعضها البعض فأي نقطة في الفراغ مثل P ستحدد اذن بتلاقي ثلاثة من هذه السطوح التي يعود كل منها الى



الشكل (30-1)

مجموعة من مجاميع السطوح الثلاثة المعينة. وتعين تلك النقطة بصورة تامة اذا عرفت قيم كل من q_1، q_2، q_3 المناظرة لهذه السطوح الثلاثة. ان المتغيرات q_1، q_2، q_3 هذه تسمى بالاحداثيات المعممة لتلك النقطة كما يلاحظ من الشكل (30-1). لو فرضنا الآن ان dl_1 يمثل طولاً تفاضليا عموديا على السطح q_1 فالازاحة الكائنة بين السطحين q_1 و $q_1 + dq_1$ تكون مساوية هذا الطول التفاضلي ضمن حجم متناه في الصغر $d\tau$. ويرتبط هذا الطول التفاضلي مع dq_1 بالعلاقة التالية:

(122-1)

$$dl_1 = h_1 \, dq_1$$

اذ ان h_1 تمثل بصورة عامة دالة للاحداثيات q_1، q_2، q_3 وبالمثل يكون

(123-1)

$$dl_2 = h_2 \, dq_2$$

$$dl_3 = h_3\, dq_3 \tag{124-1}$$

وواضح الان ان تكون قيمة كل من h_3, h_2, h_1 مساوية الى وحدة واحدة اذا اعتبر نظام الاحداثيات المتعامدة. وهكذا يكون الحجم التفاضلي $d\tau$ الذي تنطبق اوجهه على السطوح q_3, q_2, q_1 مساويا الى :

$$d\tau = dl_1\, dl_2\, dl_3 = h_1 h_2 h_3 (dq_1\, dq_2\, dq_3) \tag{125-1}$$

ويكون الطول التفاضلي dl، قطر الشكل الذي حجمه $d\tau$، مساوياً الى :

$$dl = (dl_1^2 + dl_2^2 + dl_3^2)^{1/2} = (h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2)^{1/2} \tag{126-1}$$

ومن الجدير بالذكر هنا ان الاحداثيات المعممة هذه تعد خاضعة لقاعدة اليد اليمنى اذ ان الابهام يشير الى الاتجاه (3) عند دوران بقية اصابع اليد من الاتجاه (1) الى الاتجاه (2). لنعتبر الان الدالة العددية $\phi\,(q_1, q_2, q_3)$ ولنفرض ان $\vec{A}$ تمثل مجالاً متجهاً مركباته A_3, A_2, A_1 في الاتجاهات الثلاثة التي تزداد فيها الاحداثيات q_3, q_2, q_1. يمكننا اذن ان نحسب مركبة انحدار ϕ باتجاه الاحداثي q_1 كما يأتي :ـ

$$\text{البعد الاول}\ (\nabla\phi)_1 = \lim_{dq_1 \to 0} \frac{\phi(q_1 + dq_1, q_2, q_3) - \phi(q_1, q_2, q_3)}{h_1\, dq_1} \tag{127-1}$$

$$(\nabla\phi)_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial q_1} \qquad (128\text{-}1)$$

وبالمثل يمكننا كتابة العلاقتين التاليتين بالنسبة للاتجاهين (2) و (3)

$$(\nabla\phi)_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial q_2} \qquad (129\text{-}1)$$

$$(\nabla\phi)_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial q_3} \qquad (130\text{-}1)$$

واذا اعتبرنا كلاً من $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$ وحدة متجه في الاتجاهات التي تزداد فيها q_1، q_2، q_3 على التوالي يكون :

$$\nabla\phi = \qquad (131\text{-}1)$$

$$\frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial q_1}\bar{u}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial q_2}\bar{u}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial q_3}\bar{u}_3$$

ولحساب تفرق مجال المتجه $\bar{A}$ نبدأ بأختزال التكامل السطحي $\int \bar{A}\cdot d\bar{s}$ على جميع اوجه الشكل الذي حجمه $d\tau$ وتتم عملية الاختزال هذه بالطريقة التالية :

التكامل السطحي للمتجه $\bar{A}$ على الوجه PQRT يساوي :

$$-A_1 h_2 h_3\, dq_2\, dq_3$$

التكامل السطحي للمتجه $\bar{A}$ على الوجه LMNO يساوي :

$$A_1 h_2 h_3\, dq_2\, dq_3 + \frac{\partial}{\partial q_1}(A_1 h_2 h_3)\, dq_1\, dq_2\, dq_3$$

ويمكننا ايضاً الحصول على علاقات مشابهة للاوجه الاربعة الاخرى .

اذن التكامل السطحي للمتجه $\bar{A}$ على الاوجه الستة جميعها يساوي :

حذف   حذف

$$\int_S \bar{A}\cdot d\bar{S} = \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1}(A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(A_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(A_3 h_1 h_2) \right\} dq_1\, dq_2\, dq_3 \quad (132\text{-}1)$$

وبما ان تفرق مجال المتجه $\bar{A}$ يعرف بأنه النهاية التي يصل اليها التكامل السطحي لوحدة الحجوم عندما يقترب حجم الشكل المحاط بالاوجه الستة من الصفر ينتج ان :

$$\nabla\cdot\bar{A} = \lim_{d\tau\to 0} \frac{1}{d\tau}\int_S \bar{A}\cdot d\bar{S} \quad (133\text{-}1)$$

$$\nabla\cdot\bar{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left\{ \frac{\partial}{\partial q_1}(A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(A_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(A_3 h_1 h_2) \right\}$$

واذا كان المتجه $\bar{A}$ يعبر عنه بالعلاقة

$$\bar{A} = \nabla\phi$$

يحصل ان

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left\{ \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial q_3}\right) \right. \quad (134\text{-}1)$$

اما مركبات دوار المتجه $\bar{A}$ فتحسب بواسطة مبرهنة ستوك . فمثلاً مركبة $\nabla \times \bar{A}$ باتجاه الاحداثي q_1 تستحصل باستخدام مبرهنة ستوك للسطح PQRT . وعليه يكون :

$$\oint_{PQRT} \bar{A}\cdot d\bar{l} =$$

$$= \int_P^Q \bar{A}\cdot d\bar{l} + \int_Q^R \bar{A}\cdot d\bar{l} + \int_R^T \bar{A}\cdot d\bar{l} + \int_T^P \bar{A}\cdot d\bar{l}$$

$$= A_2 h_2 dq_2 + A_3 h_3 dq_3 + \frac{\partial}{\partial q_2}(A_3 h_3)\, dq_3\, dq_2 -$$

$$- \left\{ A_2 h_2 dq_2 + \frac{\partial}{\partial q_3}(A_2 h_2)\, dq_2\, dq_3 \right\} - A_3 h_3 dq_3$$

$$\therefore \oint_{PQRT} \bar{A}\cdot d\bar{l} = \tag{135-1}$$

$$= \left\{ \frac{\partial}{\partial q_2}(A_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(A_2 h_2) \right\} dq_2\, dq_3$$

ومن مبرهنة ستوك نلاحظ ان الكمية على يمين العلاقة الاخيرة تساوي حاصل ضرب مركبة دوار المتجه $\bar{A}$ الموازية للاتجاه (1) بمساحة الوجه PQRT ، اي ان :

$$(\nabla \times \bar{A})_1 h_2 h_3 \, dq_2 \, dq_3 =$$

$$= \left\{ \frac{\partial}{\partial q_2}(A_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(A_2 h_2) \right\} dq_2 \, dq_3$$

$$(\nabla \times \bar{A})_1 = \tag{136-1}$$

$$= \frac{1}{h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_2}(A_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(A_2 h_2) \right\}$$

وبأخذ الترتيب الدوري للاتجاهات (1) ،(2) ،(3) نحصل على العلاقتين التاليتين

$$(\nabla \times \bar{A})_2 = \tag{137-1}$$

$$= \frac{1}{h_3 h_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_3}(A_1 h_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(A_3 h_3) \right\}$$

$$(\nabla \times \bar{A})_3 = \tag{138-1}$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1}(A_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(A_1 h_1) \right\}$$

ويمكن كتابة $\nabla \times \bar{A}$ على شكل محدد كالاتي :

$$\nabla \times \bar{A} = \begin{vmatrix} h_1 \bar{u}_1 & h_2 \bar{u}_2 & h_3 \bar{u}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \qquad (139\text{-}1)$$

إذ ان كلا من $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$ وحدة متجه موازية على التوالي للاتجاهات (1), (2), (3) . الان وفي حالة الاحداثيات المتعامدة نرى ان الحجم التفاضلي $d\tau$ يمثل متوازي مستطيلات فيه dx, dy, dz توازي المحاور المتعامدة x, y, z. ويعين قطره $\bar{dl}$ بالعلاقة

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

ويمكن الحصول على العلاقات التالية :

$$\bar{u}_1 = \bar{i} \qquad h_1 = 1 \qquad q_1 = x$$

$$\bar{u}_2 = \bar{j} \qquad h_2 = 1 \qquad q_2 = y$$

$$\bar{u}_3 = \bar{k} \qquad h_3 = 1 \qquad q_3 = z$$

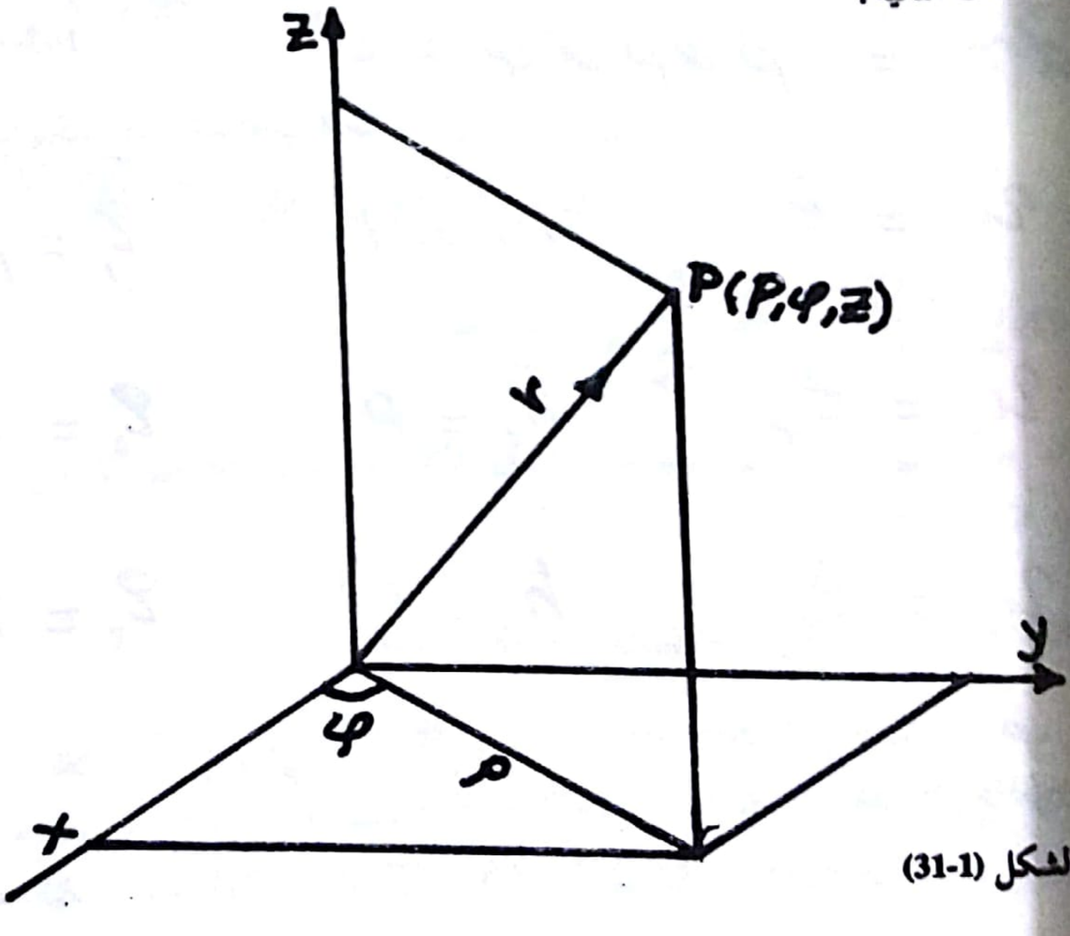
وبأخذ هذه التحويلات بنظر الاعتبار يمكننا اختزال المعادلة (139-1) الى المعادلة التالية :

$$\nabla \times \bar{A} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (140\text{-}1)$$

حيث اننا استعضنا عن المركبات A_1, A_2, A_3 بالمركبات A_x, A_y, A_z، على التوالي .

(19-1) الاحداثيات الاسطوانية : Cylindrical coordinates

يعين موقع اي نقطة مثل P، لاحظ الشكل (31-1)، اذا عرفت احداثياتها في هذا النظام. وترتبط هذه الاحداثيات التي هي (ρ, φ, z) حسب المعادلات التالية :



الشكل (31-1)

$$x = \rho \cos \varphi \qquad (141\text{-}1)$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

$$z = z$$

اما الطول التفاضلي $d\bar{l}$ فيعبر عنه بالمعادلة التالية :

$$dl^2 = d\rho^2 + (\rho\, d\varphi)^2 + dz^2 \qquad (142\text{-}1)$$

والحجم التفاضلي $d\tau$ بالمعادلة التالية :

$$d\tau = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz \qquad (143\text{-}1)$$

لذا يمكننا كتابة العلاقات التالية :

$$\bar{u}_1 = \bar{e}_\rho \qquad h_1 = 1 \qquad q_1 = \rho$$

$$\bar{u}_2 = \bar{e}_\varphi \qquad h_2 = \rho \qquad q_2 = \varphi$$

$$\bar{u}_3 = \bar{e}_z \qquad h_3 = 1 \qquad q_3 = z$$

إذ أن كلا من $\bar{e}_\rho$ ، $\bar{e}_\varphi$ ، $\bar{e}_z$ تمثل وحدة متجه في الاتجاه الذي تزداد فيها ρ ، φ ، z ، على التوالي، وباستخدام هذه التحويلات يمكننا في هذا النوع من الاحداثيات كتابة $\nabla\phi$ ، $\nabla \cdot \bar{A}$ ، $\nabla \times \bar{A}$ ، $\nabla^2\phi$ بالشكل التالي :

(144-1)

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \bar{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \bar{e}_\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \bar{e}_z$$

(145-1)

$$\nabla \cdot \bar{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

(146-1)

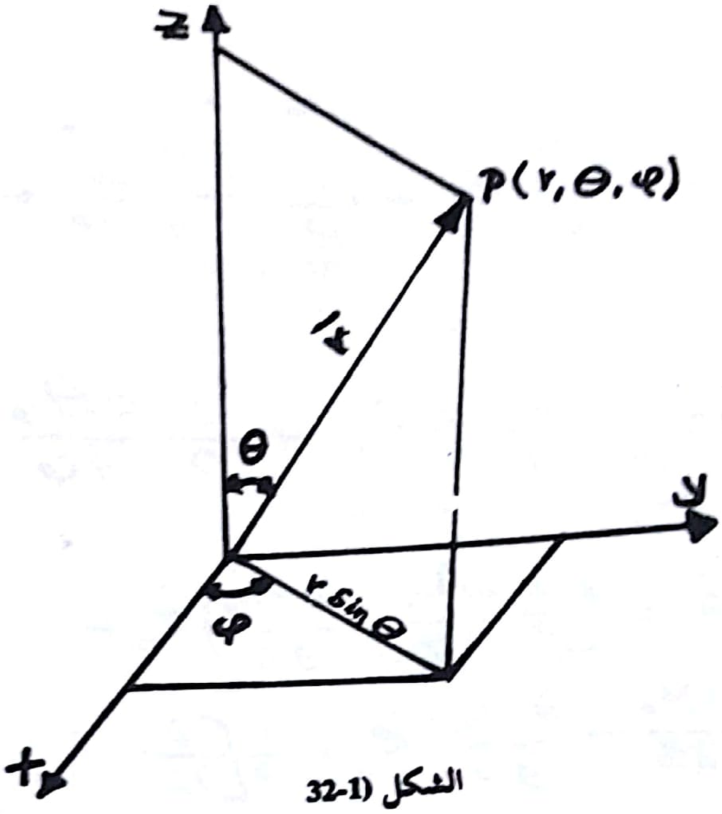
$$\nabla \times \bar{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right) \bar{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right) \bar{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right] \bar{e}_z$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$ (147-1)

اذ ان A_ρ , A_φ ,Az هي مركبات $\bar{A}$ في الاتجاهات التي تزداد فيها كل من ρ ، φ ، z، على التوالي.

(20-1) الاحداثيات الكروية : Spherical coordinates

. الاحداثيات في هذا النظام هي (r, θ, φ) وترتبط مع الاحداثيات المتعامدة (x, y, z) حسب المعادلة التالية ، لاحظ الشكل (32-1)



الشكل (1-32)

$r\sin\theta\cos\varphi$

(1-148)

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = r\cos\theta$$

اما الطول التفاضلي dl والحجم التفاضلي $d\tau$ فيمكن ان يعبر عنهما بدلالة (r, θ, φ) بالمعادلات التالية :

(1-149)

$$dl^2 = dr^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2 + r^2 d\theta^2$$

$$d\tau = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \qquad (150\text{-}1)$$

وباستخدام هذه المعادلات يمكننا كتابة العلاقات التالية :

$$\bar{u}_1 = \bar{e}_r \qquad h_1 = 1 \qquad q_1 = r$$

$$\bar{u}_2 = \bar{e}_\theta \qquad h_2 = r \qquad q_2 = \theta$$

$$\bar{u}_3 = \bar{e}_\varphi \qquad h_3 = r\sin\theta \qquad q_3 = \varphi$$

اذ ان كلا من $\bar{e}_r$ ، $\bar{e}_\theta$ ، $\bar{e}_\varphi$ وحدة متجه في الاتجاهات التي تتزايد فيها r ، θ ، φ على التوالي . واذا استعملنا هذه التحويلات الاخيرة يمكننا كتابة $\nabla^2\phi$ ، $\nabla\phi$ ، $\nabla \cdot \bar{A}$ ، $\nabla \times \bar{A}$ بالشكل التالي :

$$\nabla\phi = \qquad (151\text{-}1)$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial r}\bar{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\bar{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\bar{e}_\varphi$$

$$\nabla\cdot\bar{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \qquad (152\text{-}1)$$

$$+ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$\nabla\times\bar{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\bar{e}_r \qquad (153\text{-}1)$$

$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r A_\varphi)\right]\bar{e}_\theta +$$

$$+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\bar{e}_\varphi \qquad (153\text{-}1)$$

$$\nabla^2\phi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)+ \qquad (154\text{-}1)$$

$$+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

اذ ان A_r , A_θ , A_φ هي مركبات $\bar{A}$ في الاتجاهات التي تزداد فيها كل من r , θ , φ على التوالي .

(20-1) أمثلة محلولة :

المثال (1) :

اذا فرضنا ان $\bar{A}$ دالة متجهية مستمرة (Continuous function) وكذلك مشتقاتها فأثبت :

$$\nabla\cdot(\nabla\times\bar{A})=0$$

الحل : —

نكتب اولاً المتجه $\bar{A}$ والمؤثر ∇ بدلالة مركباتهما بالشكل التالي :

$$\bar{A}=\bar{i}A_x+\bar{j}A_y+\bar{k}A_z$$

$$\nabla=\bar{i}\nabla_x+\bar{j}\nabla_y+\bar{k}\nabla_z$$

اذن حاصل الضرب المتجهي بين المتجه $\bar{A}$ والمؤثر ∇ يساوي :

$$\nabla\times\bar{A}=\bar{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\bar{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$

$$+\bar{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

وحاصل الضرب العددي بين $\nabla \times \bar{A}$ والمؤثر ∇ هو :

$$\nabla\cdot(\nabla\times\bar{A}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \times$$

$$\times\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$\therefore \nabla\cdot(\nabla\times\bar{A}) = \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial x}\right) +$$

$$+\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial z}\right)$$

ولما كانت دالة $\bar{A}$ ومشتقاتها مستمرة فان كل حد من هذه الحدود الثلاثة يساوي صفراً، اي

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial x}$$

وكذلك الحال مع الحدين الاخرين.

ومن الممكن ايضاً اتباع طريقة اقصر لاثبات ان $\nabla\cdot(\nabla\times\bar{A}) = 0$ اذا تأملنا الضرب العددي التالي

$$\bar{A}\cdot(\bar{A}\times\bar{B}) = (\bar{A}\times\bar{A})\cdot\bar{B} = 0$$

وذلك لان $\bar{A}\times\bar{A}$ يساوي صفراً. فاذا تصورنا الان ان المؤثر ∇ متجهاً يشابه في عمله المتجه $\bar{A}$ يحصل

$$\nabla\cdot(\nabla\times\bar{A}) = (\nabla\times\nabla)\cdot\bar{A} = 0$$

المثال (2) :

أختزل التكامل الخطي $\int \bar{A}\cdot d\bar{l}$ بين النقطتين $(0, 0, 0), (1, 1, 1)$ الواقعتين على المنحني الممثل بالمعادلة :

$$\bar{l} = \bar{i}t + \bar{j}t^2 + \bar{k}t^3$$

علماً بأن المتجه

$$\bar{A} = \bar{i}xy - \bar{j}z^2 + \bar{k}xyz$$

الحل: —

$$\int_{0,0,0}^{1,1,1} \bar{A}\cdot d\bar{l} = \int_{0,0,0}^{1,1,1} (\bar{i}xy - \bar{j}z^2 + \bar{k}xyz)\cdot(\bar{i}dx + \bar{j}dy + \bar{k}dz)$$

$$= \int_{0,0,0}^{1,1,1} (xy\,dx - z^2dy + xyz\,dz)$$

وبما ان l^- هو المتجه الموضعي (Position vector) لجميع النقاط الواقعة على المنحني تكون احداثيات اي نقطة بدلالة المتغير t كالاتي :

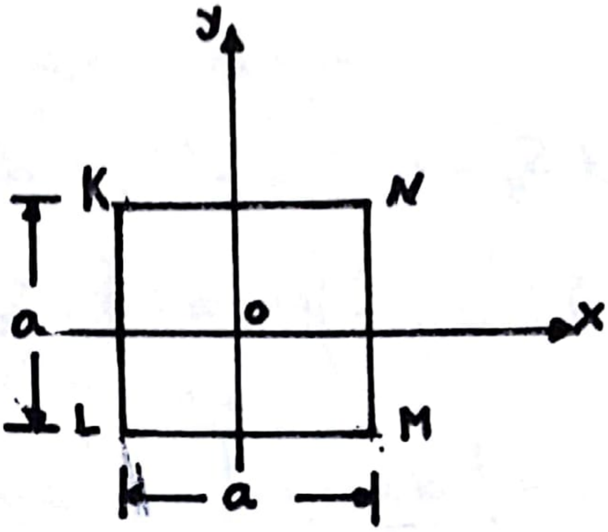
$$x = t \quad ، \quad y = t^2 \quad ، \quad z = t^3$$

$$\therefore \int_{0,0,0}^{1,1,1} \bar{A}.d\bar{l} = \int_0^1 x^3dx - \int_0^1 y^3dy + \int_0^1 z^2dz$$

$$= \frac{1}{3}$$

المثال (3) :

اذا كان المتجه A^- يمثل بالعلاقة $A^- = j^-x + k^-y$ فحقق صحة مبرهنة ستوك لمربع طول ضلعه a رسم في المستوى xy مركزه في نقطة الاصل وأضلاعه بموازاة المحورين المتعامدين y, x كما هو واضح في الشكل (1-33) : —



الشكل (33-1)

الحل :ــ

نكتب اولاً مركبات المتجه $\bar{A}$ الموازية للمحاور المتعامدة وهي :

من المتجه المعطى بالسؤال

$$A_x = 0 \quad ، \quad A_y = A_x \quad ، \quad A_z = y$$

ثم نستخرج دوار المتجه $\bar{A}$ فيكون :

$$\nabla \times \bar{A} = \bar{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \bar{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$

$$+ \bar{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = \bar{i} + \bar{k}$$

اذن التكامل السطحي لهذا المتجه على سطح المربع هو :

$$\int_S (\nabla \times \bar{A}) \cdot d\bar{s} = \int_S (\bar{i} + \bar{k}) \cdot$$

$$\cdot\left(\bar{i}\, ds_x + \bar{j}\, ds_y + \bar{k}\, ds_z\right)$$

$ds_x = ds_y = 0$ في المستوي xy

وبما ان المسار المغلق هو في المستوى xy يحصل :

$$dS_x = dS_y = 0 \quad , \quad dS_z = dx\,dy$$

$$\therefore \int_S (\nabla \times \bar{A}) \cdot d\bar{S} = \int (\bar{i} + \bar{k}) \cdot \bar{k}\, dS_z$$

$$= \int_S dx\,dy = \int_{-a/2}^{+a/2} dx \int_{-a/2}^{+a/2} dy = a^2$$

اما التكامل الخطي للمتجه $\bar{A}$ حول المسار المغلق فهو :

$$\oint \bar{A} \cdot d\bar{l} = \int (\bar{j}x + \bar{k}y) \cdot (\bar{i}\,dx + \bar{j}\,dy + \bar{k}\,dz)$$

ولان المسار المغلق هو في المستوى x y يكون dz = o

اذن

$$\therefore \oint \bar{A} \cdot d\bar{l} =$$

$$= \oint (\bar{j}x + \bar{k}y) \cdot (\bar{i}\,dx + \bar{j}\,dy) = \oint x\,dy$$

$$= \underset{L \to M}{\int_{-a/2}^{-a/2} x\,dy} + \underset{M \to N}{\int_{-a/2}^{+a/2} x\,dy} + \underset{N \to K}{\int_{+a/2}^{+a/2} x\,dy} + \underset{K \to L}{\int_{+a/2}^{-a/2} x\,dy}$$

$$= 0 + \frac{a}{2} \times a + 0 + \left(-\frac{a}{2}\right) \times \left(-\frac{a}{2}\right)$$

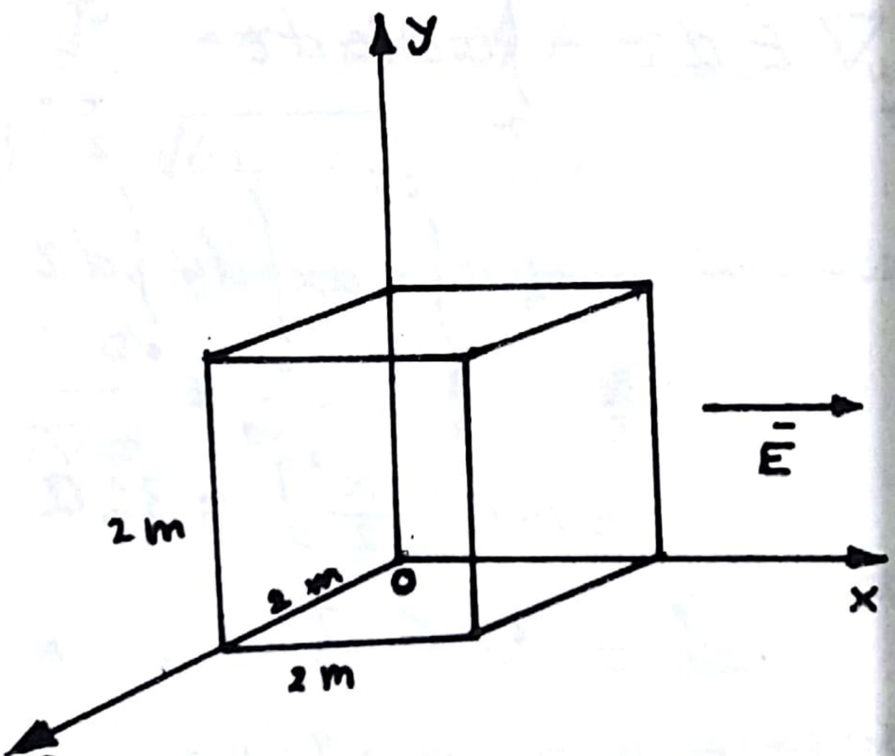
$$\therefore \oint \bar{A}\cdot d\bar{\ell} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = a^2$$

تحقيق مبرهنة ستوكس

$$\int_S (\nabla \times \bar{A})\cdot d\bar{S} = \oint \bar{A}\cdot d\bar{\ell}$$

المثال (4) :

استعن بمبرهنة كاوس لحساب الشحنة الكلية داخل مكعب طول ضلعه (2m) احدى زواياه في نقطة الاصل واضلاعه موازية للمحاور المتعامدة z, y, x لاحظ الشكل (34-1)، علماً بأن متجه المجال الكهربائي $\bar{E} = \bar{i}\; 2a\, x^2$، حيث ان a كمية ثابتة.



الشكل (34-1)

الحل : —

نفرض q هي الشحنة الكلية داخل المكعب. من قانون كاوس (Gauss's law)

يكون :

$$\int_S \bar{E}\cdot d\bar{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

وباستخدام مبرهنة كاوس نحصل :

$$\int_S \bar{E}\cdot d\bar{S} = \int_\tau \nabla\cdot\bar{E}\, d\tau = \frac{q}{\epsilon_0}$$

وبما ان

$$\nabla\cdot\bar{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 4\, a\, x$$

ينتج ان

$$\int_\tau \nabla\cdot\bar{E}\, d\tau = \int_\tau 4\, a\, x\, d\tau = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$= 4\, a \int_0^2 x\, dx \int_0^2 dy \int_0^2 dz$$

$$= 16\, a \left[\frac{x^2}{2}\right]^2 = 32\, a$$

$$q = 32\, \epsilon_0\, a$$

ملاحظة : من الممكن ايجاد قيمة q دون الاستعانة بمبرهنة كاوس ويتم باختزال التكامل السطحي $\int_S \bar{E}\cdot d\bar{s}$ على اوجه المكعب الستة وعلى الطالب محاولة ذلك .

المثال (5) :

اوجد وحدة المتجه العمودي على السطح $z = x^2 + y^2$ في النقطة $(1, -2, 4)$

$$\phi = x^2 + y^2 - z$$

الحل : ــ اذا اعتبرنا

$$\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$$

يكون المتجه العمودي على هذا السطح في اي نقطة من نقاطه مساوياً الى انحدار الدالة ϕ في تلك النقطة.

$$\nabla\phi = 2x\bar{i} + 2y\bar{j} - \bar{k}$$

وهكذا فالمتجه العمودي على السطح في النقطة $(1, -2, 4)$ يساوي :

$$\nabla\phi = 2\bar{i} - 4\bar{j} - 4\bar{k}$$

ومقدار هذا المتجه هو

$$|\nabla\phi| = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6$$

اذن وحدة المتجه العمودي على السطح في النقطة المطلوبة يساوي :

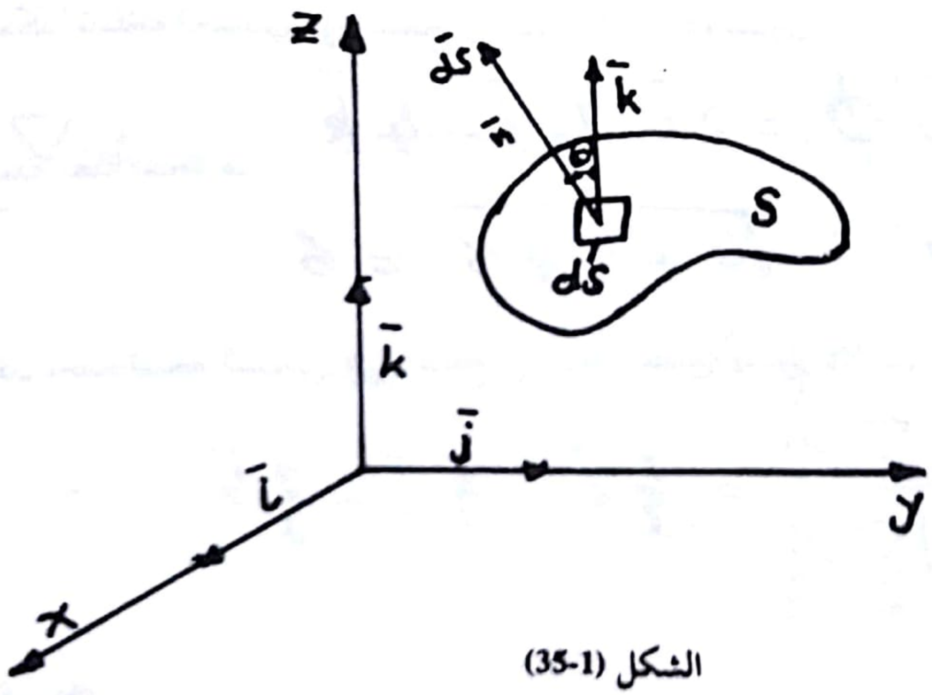
$$\bar{n} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \frac{1}{3}\bar{i} - \frac{2}{3}\bar{j} - \frac{2}{3}\bar{k}$$

المثال (6) :

احسب فيض المتجه $\bar{A} = 2\bar{i} - 3x\,\bar{j} + y\bar{k}$ الخارج من السطح المستوي $4x + 3y + 12z = 12$ الواقع في الربع الاول، لاحظ الشكل (1-36).

ملاحظة :

قبل ان نبدأ بحل هذا المثال ينبغي ان نذكر الطالب الى ان هناك طريقة خاصة تسهل عملية اختزال التكامل $\int \bar{A} . \bar{ds}$ فلحساب الفيض الخارج من اي سطح منحني او اي سطح مستوي ليس عمودياً على محور من المحاور المتعامدة نستخدم نظرية خاصة تربط بين التكامل السطحي المطلوب اختزاله على سطح مفتوح مثل S والتكامل السطحي على المساحة σ التي هي مسقط السطح S على احد المستويات العمودية على محور من المحاور المتعامدة. لنفرض ان السطح S الموضح في الشكل (1-35) قد اسقط على المستوي (xy) ولنفرض ان θ هي الزاوية المحصورة بين العمود على السطح S والمحور Z . لذا يكون :



الشكل (1-35)

$$\int ds \cos\theta = dS_z = dx\,dy$$

اذن النظرية تنص على ان

$$\int_s \bar{A}\cdot d\bar{s} = \int_{\sigma} \bar{A}\cdot\bar{n}\ \frac{dx\,dy}{\cos\theta}$$

حيث ان $\bar{n}$ وحدة متجه عمودي على السطح S .
ولحل المثال نبدأ بكتابة الدالة التي تمثل السطح S بالشكل التالي :

$$\phi(x, y, z) = 4x + 3y + 12z - 12$$

فيصبح

$$\nabla\phi = 4\bar{i} + 3\bar{j} + 12\bar{k}$$

وهو متجه عمودي على هذا السطح ومقداره :

$$|\nabla\phi| = \sqrt{16+9+144} = 13$$

وعليه فوحدة المتجه العمودي على السطح تساوي :

$$\bar{n} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \frac{4}{13}\bar{i} + \frac{3}{13}\bar{j} + \frac{12}{13}\bar{k}$$

ولما كان :

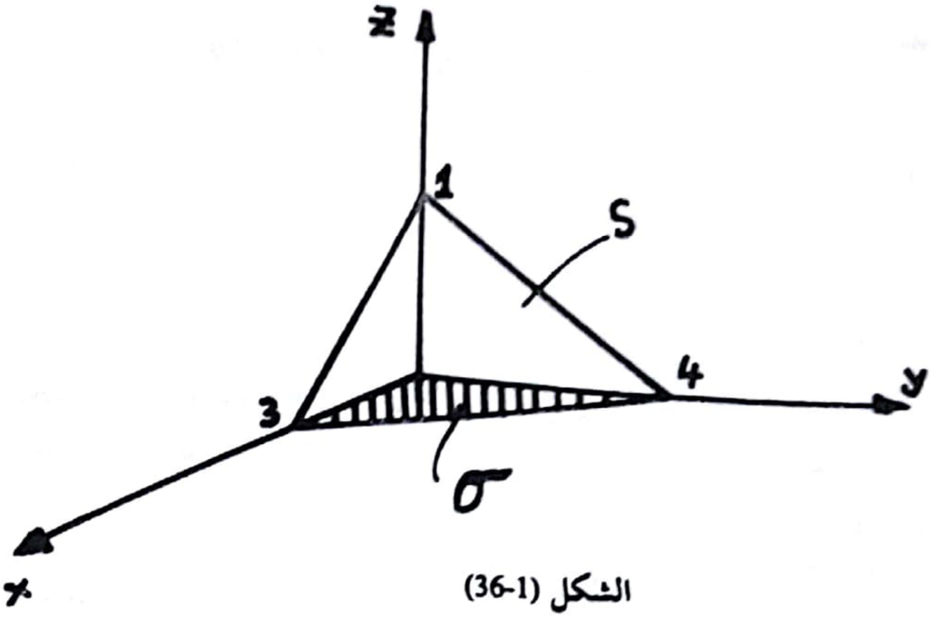
$$\bar{n}\cdot\bar{k} = \cos\theta$$

يحصل ان :

$$\cos\theta = \frac{12}{13}$$

$$\bar{A}\cdot\bar{n} = \frac{8}{13} - \frac{9}{13}x + \frac{12}{13}y,$$

اذن الفيض الخارج من السطح يساوي :



الشكل (36-1)

$$\int_S \bar{A}\cdot d\bar{S} = \int_S \left(\frac{8}{13} - \frac{9}{13}x + \frac{12}{13}y\right)\times \left(\frac{13}{12}\right) dx\,dy$$

$$= \int_S \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}x + y\right) dx\,dy$$

وبما ان مسقط السطح $4x + 3y + 12z = 12$ على المستوى xy هو $4x + 3y = 12$ ، وبعد جعل $z = 0$ في معادلة السطح المستوي ، من الممكن اختزال التكامل على السطح σ اذا اعتبرنا y متغير من 0 الى $(12 - 4x)/3$ و x متغير من 0 الى 3 . وعلى هذا الاساس يكتب التكامل السطحي بالشكل التالي :

$$\int_S \bar{A}\cdot d\bar{S} = \int_0^3 dx \int_0^{(12-4x)/3} \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}x + y\right) dy$$

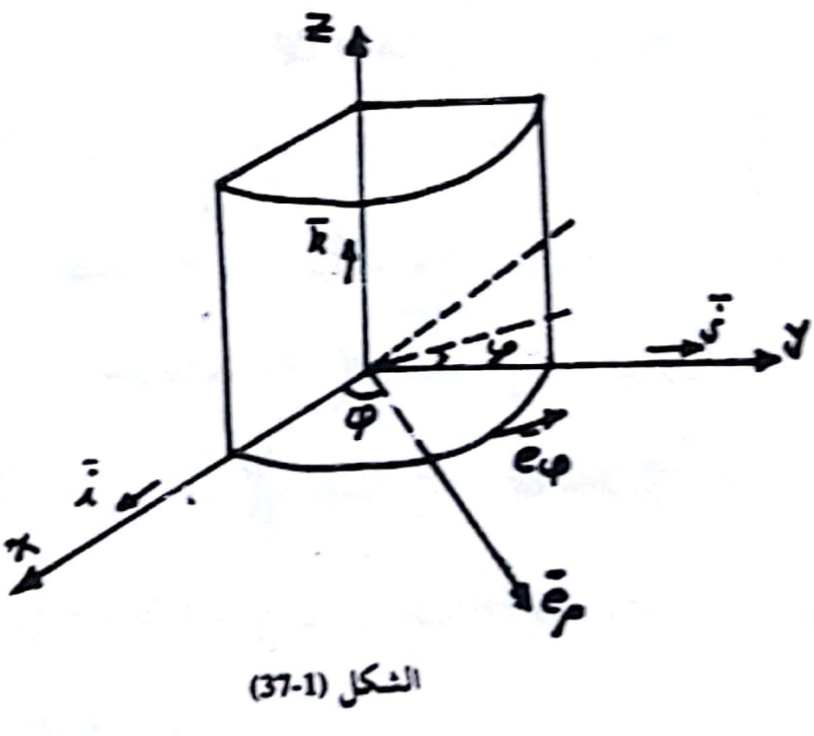
$$= \frac{1}{9}\int_0^3 (240 - 179x + 33x^2)\,dx$$

$$\therefore \int_S \bar{A}\cdot d\bar{S} = 23.5$$

المثال (7) :

اثبت مبرهنة كاوس للمجال الاتجاهي $\bar{A} = \bar{i}y + \bar{j}x + \bar{k}z^2$

ولجزء الاسطوانة الواقع في الربع الاول والمحصور بين الدائرة $x^2 + y^2 = a^2$ والمستويين $z = 0$ و $z = a$ مستخدماً المحاور الاسطوانية ، لاحظ الشكل (37-1) .



الشكل (37-1)

الحل :ـ

لاختزال التكامل السطحي $\int \bar{A}.d\bar{s}$ علينا ان نعتبر خمسة تكاملات سطحية ، الاول مأخوذ على السطح المنحني وليكن S_1 والثاني على القاعدة السفلى S_2

والثالث على القاعدة العليا S_3 والرابع على المستطيل S_4 الواقع في المستوى (xz) والخامس على المستطيل S_5 الواقع في المستوي (yz) .

لنختزل اولاً التكامل السطحي على السطح المنحني للاسطوانة مستعينين بالمحاور الاسطوانية فيكون :

$$dS_1 = a\,d\varphi\,dz \;\; ; \;\; x = a\cos\varphi \;\; ; \;\; y = a\sin\varphi \;\; ; \;\; z = z$$

ومن الشكل (37-1) يمكننا كتابة العلاقات التالية :

$$\bar{i} = \bar{e}_\rho \cos\varphi - \bar{e}_\varphi \sin\varphi$$

$$\bar{j} = \bar{e}_\rho \sin\varphi + \bar{e}_\varphi \cos\varphi$$

$$\bar{k} = \bar{k}$$

وعليه يكتب المتجه $\bar{A}$ بدلالة مركباته A_ρ ، A_φ، A_z بالشكل التالي :

$$\bar{A} = (\bar{e}_\rho \cos\varphi - \bar{e}_\varphi \sin\varphi)(\rho\sin\varphi) + (\bar{e}_\rho \sin\varphi + \bar{e}_\varphi \cos\varphi)(\rho\cos\varphi) + \bar{k}z^2$$

$$\therefore \bar{A} = \bar{e}_\rho\,\rho\sin 2\varphi + \bar{e}_\varphi\,\rho\cos 2\varphi + \bar{k}z^2$$

$$\therefore \int_{S_1} \bar{A}\cdot d\bar{S}_1 = \int_{S_1} (\bar{e}_\rho\, a\sin 2\varphi + \bar{e}_\varphi\, a\cos 2\varphi + \bar{k}z^2)\cdot \bar{e}_\rho\, dS_1$$

$$= a^2\int_{S_1} \sin 2\varphi \, d\varphi \, dz = a^2\int_0^a dz\int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi \, d\varphi$$

$$\therefore \int_{S_1} \bar{A}\cdot d\bar{S}_1 = a^3\left[-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right]_0^{\pi/2} = a^3$$

والتكامل السطحي على القاعدة السفلى يساوي :

$$\int_{S_2} \bar{A}\cdot d\bar{S}_2 = -\int\left(\bar{e}_\rho \rho \sin 2\varphi + \bar{e}_\varphi \rho \cos 2\varphi + \bar{k} z^2\right)\cdot\left(\bar{k}\, dS_2\right)$$

$$\therefore \int_{S_2} \bar{A}\cdot d\bar{S}_2 = -\int_{S_2} z^2 \, dS_2 = 0$$

وذلك لان $z = 0$ على جميع نقاط القاعدة السفلى

التكامل السطحي على القاعدة العليا يساوي :

$$\int_{S_3} \bar{A}\cdot d\bar{S}_3 = \int\left(\bar{e}_\rho \rho \sin 2\varphi + \bar{e}_\varphi \rho \cos 2\varphi + \bar{k} z^2\right)\cdot\left(\bar{k}\, dS_3\right) = \int_{S_3} z^2 \, dS_3$$

وبما ان $z = a$ على جميع نقاط القاعدة العليا وان $dS_3 = \rho\, d\rho\, d\varphi$ يحصل :

$$\int_{S_3} \bar{A}\cdot d\bar{S}_3 = a^2 \cdot \int_0^a \rho \, d\rho \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{1}{4}\pi a^4$$

اما التكامل السطحي على المستطيل S_4 الواقع في المستوي xz فيساوي :

$$\int_{S_4} \bar{A}\cdot d\bar{S}_4 = -\int_{S_4} (\bar{e}_\rho \rho \sin 2\varphi +$$

$$+ \bar{e}_\varphi \rho \cos 2\varphi + \bar{k} z^2) \cdot (\bar{j}\, dS_4)$$

وبما ان $\varphi = 0$ على جميع نقاط هذا المستوي . يحصل ان :

$$\bar{e}_\rho \cdot \bar{j} = \sin\varphi = 0$$

$$\bar{e}_\varphi \cdot \bar{j} = \cos\varphi = 1$$

$$\bar{k} \cdot \bar{j} = 0$$

$$dS_4 = d\rho\, dz$$

ويأخذ التكامل السطحي الشكل التالي :

$$\int_{S_4} \bar{A}\cdot d\bar{S}_4 = -\int_{S_4} \rho\, d\rho\, dz =$$

$$= -\int_0^a \rho\, d\rho \int_0^a dz = -\frac{1}{2} a^3$$

والتكامل السطحي على المستطيل S_5 الواقع في المستوي (yz) هو :

$$\int_{S_5} \bar{A}\cdot d\bar{S}_5 = -\int_{S_5} (\bar{e}_\rho \sin 2\varphi + \bar{e}_\varphi \rho \cos 2\varphi + k z^2) \cdot$$

$$\cdot (\bar{i}\, dS_5)$$

وبما ان $\varphi = \pi/2$ على جميع نقاط هذا المستوي . يحصل ان :

$$\bar{e}_\rho \cdot \bar{i} = \cos\varphi = 0$$

$$\bar{e}_\varphi \cdot \bar{i} = -\sin\varphi = -1$$

$$\bar{k} \cdot \bar{i} = 0$$

ولما كان

$$dS_5 = d\rho\, dz$$

يأخذ التكامل السطحي الشكل التالي :

$$\int_{S_5} \bar{A} \cdot d\bar{S}_5 = -\int_0^a \rho\, d\rho \int_0^a dz = -\frac{1}{2} a^3$$

وهكذا فالتكامل السطحي على جميع نقاط السطح المغلق يساوي :

$$\int_S \bar{A} \cdot d\bar{S} = a^3 + \frac{1}{4}\pi a^4 - \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{2}a^3$$

$$= \frac{1}{4}\pi a^4$$

بقي علينا اختزال التكامل الحجمي $\int \nabla \cdot \bar{A}\, d\tau$ لينتهي اثبات مبرهنة كاوس . يتم اختزال هذا التكامل بعد معرفة $\nabla \cdot \bar{A}$ بالنسبة للمحاور الاسطوانية ويكتب بالشكل التالي :

$$\nabla \cdot \bar{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

ولما كانت مركبات المتجه $\bar{A}$ بالنسبة لهذه المحاور هي :

$$A_\rho = \rho \sin 2\varphi \,،\; A_\varphi = \rho \cos 2\varphi \,،\; A_z = z^2$$

تصبح قيمة $\nabla . \bar{A}$ مساوية الى :

$$\nabla \cdot \bar{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 \sin 2\varphi) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$(\rho \cos 2\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2)$$

$$= 2 \sin 2\varphi - 2 \sin 2\varphi + 2z = 2z$$

وعليه سيتم اختزال التكامل الحجمي بالطريقة التالية :

$$\int_\tau \nabla \cdot \bar{A}\, d\tau = \int_0^a \rho\, d\rho \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^a 2z\, dz = \frac{1}{2} a^2 \times$$

$$\frac{\pi}{2} \times a^2 = \frac{1}{4} \pi a^4$$

$$\therefore \int_\tau \nabla \cdot \bar{A}\, d\tau = \int_s \bar{A} \cdot d\bar{s}$$

اسئلة وتمارين

1 ـــ اثبت المتطابقات التالية :

$$\nabla\cdot(\phi\bar{A}) = (\nabla\phi)\cdot\bar{A} + \phi\,\nabla\cdot\bar{A}$$

$$\nabla\times(\phi A) = (\nabla\phi)\times\bar{A} + \phi\,\nabla\times\bar{A}$$

$$\nabla\cdot(\bar{A}\times\bar{B}) = \bar{B}\cdot(\nabla\times\bar{A}) - \bar{A}\cdot(\nabla\times\bar{B})$$

$$\nabla(\psi\phi) = \psi\,\nabla\phi + \phi\,\nabla\psi$$

$$\nabla\times(\nabla\times\bar{A}) = \nabla(\nabla\cdot\bar{A}) - \nabla^2\bar{A}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\bar{A}) = 0$$

A دالة مشتقاتها مستمرة

2 ـــ اثبت العلاقات التالية اذا كان S هو السطح المحيط بالحجم τ

$$\int_S \bar{A}\times d\bar{S} = -\int_\tau (\nabla\times\bar{A})\,d\tau$$

$$\oint_c \phi\,d\bar{l} = -\int_S (\nabla\phi)\times d\bar{S}$$

$$\int_S \phi\,d\bar{S} = \int_\tau \nabla\phi\,d\tau$$

3 ـــ اذا كان $\bar{r}$ متجهاً من نقطة الاصل الى النقطة (x, y, z) فاثبت ان :

$$\nabla \cdot \bar{r} = 3 \qquad \nabla(\bar{A} \cdot \bar{r}) = \bar{A}$$

$$\nabla \times \bar{r} = 0 \qquad (\bar{A} \cdot \nabla)\bar{r} = \bar{A}$$

اذ ان $\bar{A}$ متجه ثابت .

4 ــ اذا كان $\bar{r}$ متجهاً من نقطة الاصل الى النقطة (x, y, z) وان $\bar{r} \neq 0$
فأثبت ان :

$$\nabla \times \left(\frac{\bar{r}}{r^2}\right) = 0 \qquad \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\bar{r}}{r^3}\right) = 0 \qquad \nabla r = \frac{\bar{r}}{r}$$

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\bar{r}}{r^3}$$

5 ــ اذا كان

$$\bar{A} = 3x\bar{i} + y\bar{j} + 2z\bar{k}$$

$$\phi = x^2 + y^2 + z^2$$

احسب قيمة $\nabla \cdot (\phi \bar{A})$ في النقطة $(2, 2, 2)$.

6 ــ احسب دوار المتجه $\bar{A}$ المعبر عنه بالعلاقة التالية :

$$\bar{A} = \bar{i}(x^2 + yz) + \bar{j}(y^2 + zx) + \bar{k}(z^2 + xy)$$

7 ــ اذا كان S اي سطح مغلق وان $\bar{A} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z$ فاثبت ان

$$\int_S \bar{A} \cdot d\bar{S} = 3\tau$$

اذ ان τ الحجم المحاط بالسطح المغلق S

٤ ــ اذا كان المتجه $A^-(x, y, z)$ عمودياً على السطح المغلق S فاثبت ان

$$\int_\tau (\nabla \times \bar{A})\, d\tau = 0$$

اذ ان τ الحجم المحاط بالسطح المغلق S .

9 ــ اذا كانت (x, y, z) احداثيات نقطة في نظام محاور متعامدة و (x', y', z') احداثيات تلك النقطة في نظام محاور متعامدة اخرى وكان كلا النظامين خاضعاً لقاعدة اليد اليمنى ولهما نقطة اصل مشتركة استخدم قوانين المتجهات لايجاد المعادلات التي تربط بين النظامين .

10 ــ جسم يدور حول محور معين سرعته تساوي $\bar{v}(x, y, z)$ اثبت : ــ

(أ) $\nabla \cdot \bar{v} = 0$

(ب) $\nabla \times \bar{v} = 2\bar{\omega}$

حيث ان w^- هي السرعة الزاوية للجسم .

11 ــ اذا فرض ان $\phi = 2x\,y + z^2$ فأوجد $\nabla\phi$ في النقطة $(1, -1, 3)$ ماهي مركبة $\nabla\phi$ باتجاه المتجه $i^- + 2j^- + 2k^-$.

12 ــ اختزل التكامل السطحي $\int A^- \cdot ds^-$ لمكعب اضلاعه موازية للمحاور الثلاث المتعامدة واحدى زاواياه في نقطة الاصل وطول كل ضلع من أضلاعه يساوي وحدة واحدة ، علماً بأن $A^- = i^-\, x^2 y$

13 ــ جد المتجه الذي مقداره وحدة واحدة والعمودي على السطح $xy^3\, z^2 = 4$ في النقطة $(-1, -1, 2)$.

14 ــ اختزل التكامل الحجمي $\int_\tau \nabla \cdot A^- d\tau$ المأخوذ على نصف الكرة

العلوي مع العلم ان المتجه هو $\bar{A} = \bar{i}y + jx + \bar{k}z^2$ ومعادلة الكرة هي $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

15 ــ جد $\nabla^2\phi$ اذا فرض ان $\phi = x^2 + xy + y^2$.

16 ــ اذا كان المتجه $\bar{A} = ixy + \bar{j}yz + \bar{k}xz$ فاحسب التكامل السطحي $\int \bar{A} . \bar{ds}$ على الاوجه الستة لمتوازي مستطيلات أضلاعه موازية للمحاور الثلاثة المتعامدة x, y, z وزاويتان من زواياه واقعتان في النقطتين (0,0,0), (1, 3, 2) .

17 ــ دائرة في المستوي (x, y) نصف قطرها a تمس كلا من المحورين المتعامدين (x, y) احسب التكامل الخطي المغلق $\oint \bar{A} . \bar{dl}$ حول محيط الدائرة .

أفرض

اولاً : $\bar{A} = \bar{i}y + \bar{j}z + \bar{k}x$

ثانياً : $\bar{A} = \bar{i}yz + \bar{j}xz + kxy$

18 ــ احسب الشغل المنجز باتجاه معاكس لحركة عقرب الساعة في مجال القوة $\bar{F} = \bar{i}2y^2 + \bar{j}z^2 + \bar{k}2yz$ حول المسار المغلق المتكون من خطوط مستقيمة متلاقية بالنقاط (0,0, 0), (0, 20,0), (15,0,0) (0,0, 0).هل يمكن ان يعبر عن هذه القوة بانحدار جهد معين ؟ وضح ذلك .

19 ــ اذا كان $\bar{A}$ متجهاً ثابتاً و $\bar{R}$ متجهاً من نقطة الاصل الى النقطة (x, y, z) فاثبت ان $\nabla \times (\bar{A} \times \bar{R}) = 2\bar{A}$.

20 ــ اذا استعيض عن $\bar{B}$ بالمؤثر ∇ وعن $\bar{C}$ بالمتجه $\bar{R}$ في المتطابقة

$$\bar{B} \times (\bar{A} \times \bar{C}) = \bar{A}(\bar{B} . \bar{C}) - (\bar{B} . \bar{A})\bar{C}$$

يحصل أن :

$$\nabla \times (\bar{A} \times \bar{R}) = \bar{A}(\nabla . \bar{R}) - (\nabla . \bar{A})R$$
$$= 3\bar{A}$$

هذه النتيجة خاطئة ومختلفة عن النتيجة الصحيحة في السؤال (19) فهل يمكنك توضيح ذلك ؟

21 ــ اذا كان $\bar{A}$ متجهاً ثابتاً و $\bar{R}$ متجهاً من نقطة الاصل الى النقطة (x, y, z) فاثبت العلاقة التالية :

$$\nabla \times \left(\frac{\bar{A} \times \bar{R}}{R}\right) = \frac{\bar{A}}{R} + \left(\frac{\bar{A} \cdot \bar{R}}{R^3}\right) \bar{R}$$

22 ــ شدة المجال الكهربائي في اي نقطة على بعد $\bar{r}$ من موقع شحنة نقطية تساوي : $\bar{E} = K\bar{r}/r^3$

حيث ان K كمية ثابتة وأن

$$\bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z = \bar{r}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

(أ) احسب فيض المتجه $\bar{E}$ الخارج من سطح كروي نصف قطره a ومركزه موقع الشحنة النقطية

(ب) استعن بمبرهنة كاوس لتربط تكامل $\nabla \cdot \bar{E}$ على جميع نقاط الحجم الكروي بفيض المتجه $\bar{E}$ الخارج من السطح الكروي .

23 ــ استعن بمبرهنة كاوس لاختزال التكامل السطحي $\int \bar{A} \cdot \bar{ds}$ على جميع اوجه المكعب الستة الذي حجمه وحدة واحدة ، احدى زواياه في النقطة (1, 1, 1) واضلاعه موازية للمحاور المتعامدة ، علماً بأن :

$$\bar{A} = \bar{i}x^2 + \bar{j}y^2 + kz^2$$

24 ــ اختزل التكامل السطحي $\int \bar{A} \cdot \bar{ds}$ والتكامل الحجمي $\int \nabla \cdot \bar{A}\, d\tau$ لمكعب حجمه وحدة واحدة ، احدى زواياه في نقطة الاصل واضلاعه

موازية للمحاور الثلاثة المتعامدة علماً بأن $\bar{A} = \bar{i}\,x$

25 ــ استعن ببرهنة كاوس لأختزال التكامل السطحي $\int \bar{A}\cdot d\bar{s}$ على جزء من اسطوانة ممثلة بالمعادلة $x^2 + y^2 = 4$ الواقع في الربع الاول بين $z = 0$ و $z = 3$ مستخدماً الاحداثيات المتعامدة علماً بأن

$$\bar{A} = \bar{i}\,x^2 z + \bar{j}\,y - \bar{k}\,2xz^2$$

26 ــ اثبت مبرهنة كاوس للدالة المتجهية $\bar{A} = \bar{i}\,x/\rho + \bar{j}\,y/\rho$ ولجزء الاسطوانة في الربع الاول المحصور بين الدائرة $x^2 + y^2 = a^2$ والمستويين $z = 0$ و $z = a$، علماً بأن $\rho^2 = x^2 + y^2$.

27 ــ استعن ببرهنة ستوك واستخدم الدالة المتجهية $\bar{A}\,\phi(r)$، حيث ان $\bar{A}$ متجه ثابت و $\phi(r)$ دالة عددية لاثبات

$$\oint_c \phi(\bar{r})\,d\bar{l} = -\int (\nabla\phi)\times d\bar{s}$$

28 ــ استعن ببرهنة ستوك واستخدم المتجه $\bar{F}\times\bar{A}$، حيث ان $\bar{A}$ متجه ثابت للحصول على العلاقة التالية :

$$\oint d\bar{l}\times\bar{F} = \int_S (\bar{n}\times\nabla)\times\bar{F}\,dS$$

اذ ان $\bar{n}$ وحدة متجه عمودية على السطح S .

29 ــ حقق مبرهنة ستوك للمتجه $\bar{A} = \bar{j}x + \bar{k}y$ وللمربع الذي مساحته وحدة واحدة في المستوي (xy)، احدى زواياه في نقطة الاصل واضلاعه موازية للمحورين المتعامدين .

30 ــ حقق مبرهنة ستوك للمتجه $\bar{A} = -\bar{i}\,y/2 + \bar{j}\,x/2$ وللدائرة $x^2 + y^2 = 1$ مستعيناً، (1) بالاحداثيات المتعامدة، (2) بالاحداثيات الكروية .

31أ ــ استعن ببرهنة ستوك لاختزال التكامل الخطي $\oint \bar{A}\cdot d\bar{l}$ حول

المسـار المغلـق المتكـون مـن خطـوط مسـتقيمة متلاقيـة بالنقـاط
$(1, 2, 0), (7, 6, 0), (1, 6, 0), (1, 2, 0)$
افرض ان

$$\bar{A} = \bar{i}\,3z + \bar{j}\,3x + \bar{k}\,3y$$

(ب) اثبت ما جاء في الفرع (أ) باختزال التكامل الخطي بصورة مباشرة حول المسار المغلق .