مصفوفة التحويل الخطي:-

ليكن كل من (V,F) , (W,F) فضاء متجهات وان $H=\{A_1,\dots,A_m\}$ قاعدة لـ V و $S=\{B_1,\dots,B_n\}$ قاعدة لـ W وان $T:V\longrightarrow W$ تحويل خطي.

لاحظ ان

$T(A_1)=a_{11}B_1+\dots+a_{1n}B_n$ "$T(A_1)\in W$"

$T(A_2)=a_{21}B_1+\dots+a_{2n}B_n$ "$T(A_2)\in W$"

$\vdots$

$T(A_m)=a_{m1}B_1+\dots+a_{mn}B_n$ "$T(A_m)\in W$"

المصفوفة

$$M_T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

تدعى بمصفوفة التحويل الخطي T بالنسبة للقاعدتين H, S.

مبرهنة:- اذا كان $X=(x_1,\dots,x_m)$ متجه احداثيات $A\in V$ بالنسبة للقاعدة H اعلاه و $Y=(y_1,\dots,y_n)$ متجه احداثيات $T(A)$ بالنسبة للقاعدة S اعلاه فان مصفوفة التحويل الخطي بالنسبة للقاعدتين H, S تحقق $Y=XM_T$.

البرهان:- بما ان X متجه احداثيات A

عليه

$A=x_1A_1+x_2A_2+\dots+x_mA_m$

$$A = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_m A_m$$ عليه

$$T(A) = x_1 T(A_1) + x_2 T(A_2) + \cdots + x_m T(A_m)$$ ومنه

$$= x_1 [a_{11} B_1 + a_{12} B_2 + \cdots + a_{1n} B_n] +$$
$$x_2 [a_{21} B_1 + a_{22} B_2 + \cdots + a_{2n} B_n] + \cdots$$
$$\vdots$$
$$x_m [a_{m1} B_1 + a_{m2} B_2 + \cdots + a_{mn} B_n]$$

$$T(A) = [x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + \cdots + x_m a_{m1}] B_1 +$$
$$[x_1 a_{12} + x_2 a_{22} + \cdots + x_m a_{m2}] B_2 + \cdots$$
$$\vdots$$
$$[x_1 a_{1n} + x_2 a_{2n} + \cdots + x_m a_{mn}] B_n$$

But $T(A) = y_1 B_1 + y_2 B_2 + \cdots + y_n B_n$

So, $(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$

$\therefore \; Y = X M_T$

مثال: ليكن $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ تحويل "خطي" معرف بالصيغة $T(x,y) = (x, x+y, 2x-y)$. جد مصفوفة T بالنسبة للقواعد الطبيعية لكل من $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$.

الإجابة: القاعدة الطبيعية لـ $\mathbb{R}^2$ $\{A_1 = (1,0), A_2 = (0,1)\}$

القاعدة الطبيعية لـ $\mathbb{R}^3$ $\{B_1 = (1,0,0), B_2 = (0,1,0), B_3 = (0,0,1)\}$

$$T(A_1) = T(1,0) = (1,1,2) = (1) B_1 + (1) B_2 + (2) B_3$$

$$T(A_2) = T(0,1) = (0,1,-1) = (0) B_1 + (1) B_2 + (-1) B_3$$

$T(A_2) = T(0,1) = (0,1,-1) = (0)B_1 + (1)B_2 + (-1)B_3$

$\therefore M_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

واجب :- اذا كان $T: P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ تحويلا "خطيا" معرفا "بالصيغة

$T(a+bx+cx^2) = (2a, b-c)$. جد مصفوفة T بالنسبة للقاعدة

$H = \{A_1 = 5, A_2 = 2x, A_3 = x^2\}$ الى $P_2(\mathbb{R})$ والقاعدة $S = \{B_1 = (-1,0), B_2 = (0,3)\}$ الى $\mathbb{R}^2$.

مثال : جد التحويل الخطي $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$ الذي مصفوفته بالنسبة للقاعدة

$H = \{A_1 = (2,0), A_2 = (1,1)\}$ والقاعدة

$S = \left\{ B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$

تكون $M_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

الاجابة :- اولاً نقوم بايجاد متجه احداثيات (a,b) بالنسبة للقاعدة H .

$(a,b) = x(2,0) + y(1,1) \Longrightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y = a \\ y = b \end{array} \right\} \Rightarrow y = b, \; x = \frac{1}{2}(a-b)$

عليه متجه احداثيات $T(a,b)$ بالنسبة للقاعدة S هو

$Y = XM_T = \left(\frac{1}{2}(a-b), b\right) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$= \left(\frac{1}{2}(a+5b), \frac{1}{2}(a-b), -\frac{1}{2}(a-b), 2b\right) = (y_1, y_2, y_3, y_4)$

اذن يكون معرفة T بصورة كاملة :-

$T(a,b) = y_1 B_1 + y_2 B_2 + y_3 B_3 + y_4 B_4$

$= \frac{1}{2}(a+5b)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(a-b)\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}(a-b)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + 2b\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$= \Big[\; a+5b \qquad \frac{3}{2}(a-b) \;\Big]$

$$= \begin{bmatrix} a+5b & \frac{3}{2}(a-b) \\ \frac{1}{2}(a-b) & 4b \end{bmatrix}.$$

واجب ٩ـ جد مصفوفة التحويل الخطي $T:P_1(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ المعرف بالصيغة $T(a+bx) = ax+bx^2$ بالنسبة للقواعد الطبيعية ثم بالنسبة لقاعدة $P_1(\mathbb{R})$ المكونة من $\{A_1=2, A_2=1-x\}$ وقاعدة $P_2(\mathbb{R})$ المكونة من
$\{B_1=-1, B_2=3x, B_3=-2x^2\}$.

ملاحظة: اذا كان كل من U, V, W فضاء متجهات منتهي البعد على الحقل F نفسه واذا كانت $G=\{A_1,\dots,A_m\}$ قاعدة الى U و
$H=\{B_1,\dots,B_n\}$ قاعدة الى V و
$J=\{C_1,\dots,C_p\}$ قاعدة الى W.
وان $T:U\to V$ و $S:V\longrightarrow W$ تحويلين خطيين. بحيث ان المصفوفة T بالنسبة للقواعد G, H هي M_T وان مصفوفة S بالنسبة للقواعد H, J هي M_S. فان مصفوفة التركيب SoT بالنسبة للقواعد G, J هي

$$M_{SoT} = M_T \cdot M_S$$

مثال: اذا كانت $M_T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ مصفوفة التحويل الخطي

وان $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ $M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ مصفوفة التحويل

الخطي $S:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ وذلك بالنسبة للقواعد الطبيعية الى كل من $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$

جد مصفوفة التحويل $SoT: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

الاجابة: يتوجب علينا فقط ضرب المصفوفتين M_T ، M_S

$$M_T \cdot M_S = M_{SoT} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & -1 \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$M_T \cdot M_S = M_{S\circ T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 3 & 16 \\ 2 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

تغيير القواعد والصيغ الاعتيادية :-

مبرهنة: اذا كان كل من V, W فضاء متجهات منتهي البعد. بحيث ان $\dim V = m$ و $\dim W = n$ وان $T : V \to W$ تحويلا "خطيا" ذا رتبة تساوي r فانه بالامكان دائما" ايجاد قاعدة الى V وقاعدة الى W بحيث ان مصفوفة T تكون بالصيغة الاعتيادية

$$M_T = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

المصفوفة الاحادية من الدرجة $r \times r$

البرهان :- بما ان $\dim(\operatorname{Im} T) = r$ (رتبة T) عليه $\dim(\operatorname{Ker} T) = m - r$ (صفرية T)

نختار قاعدة الى $\operatorname{Ker} T$ مثل $\{B_1, B_2, \dots, B_{m-r}\}$.

نوسع القاعدة السابقة لتكون قاعدة لـ V $\{A_1, \dots, A_r, B_1, B_2, \dots, B_{m-r}\}$

نبرهن بان المجموعة $\{C_1 = T(A_1), \dots, C_r = T(A_r)\}$ تكون مستقلة خطيا"

if $y_1 C_1 + y_2 C_2 + \dots + y_r C_1 = 0$, then

$$y_1 T(A_1) + y_2 T(A_2) + \dots + y_r T(A_r) = 0 \Rightarrow$$

$$T(y_1 A_1 + y_2 A_2 + \dots + y_r A_r) = 0 \Rightarrow$$

$$y_1 A_1 + y_2 A_2 + \dots + y_r A_r \in \operatorname{Ker} T \Rightarrow$$

$$y_1A_1+y_2A_2+\dots+y_rA_r=x_1B_1+x_2B_2+\dots+x_{m-r}B_{m-r}\Rightarrow$$

$$y_1A_1+\dots+y_rA_r-x_1B_1-x_2B_2-\dots-x_{m-r}B_{m-r}=0$$

بما أن $\{A_1,\dots,A_r,B_1,\dots,B_{m-r}\}$ قاعدة الى V ("مستقلة خطياً")

اذن $y_1=y_2=\dots=y_r=0\ ,\ x_1=x_2=\dots=x_{m-r}=0$

وعليه $C=\{C_1,C_2,\dots,C_r\}$ تكون مستقلة خطياً".

الآن يمكن توسيع الجملة C لتكون قاعدة الى W $\{C_1,\dots,C_r,D_1,\dots,D_{n-r}\}$

بذلك يكون لدينا

$$T(A_1)=C_1=1C_1+0C_2+\dots+0C_r+0D_1+\dots+0D_{n-r}$$

$$T(A_2)=C_2=0C_1+1C_2+\dots+0C_r+0D_1+\dots+0D_{n-r}$$

$$\vdots$$

$$T(A_r)=C_r=0C_1+0C_2+\dots+0C_{r-1}+1C_r+0D_1+\dots+0D_{n-r}$$

$$T(B_1)=0=0C_1+0C_2+\dots+0C_r+0D_1+\dots+0D_{n-r}$$

$$T(B_2)=0=0C_1+0C_2+\dots+0C_r+0D_1+\dots+0D_{n-r}$$

$$\vdots$$

$$T(B_{m-r})=0=0C_1+0C_2+\dots+0C_r+0D_1+\dots+0D_{n-r}$$

عليه تكون مصفوفة T بالنسبة للقاعدة $\{A_1,\dots,A_r,B_1,\dots,B_{m-r}\}$ الى V

والقاعدة $\{C_1,\dots,C_r,D_1,\dots,D_{n-r}\}$ الى W بالصيغة

$$M_T=\begin{array}{c c}
\overset{\longleftarrow\ r\ \longrightarrow\quad\longleftarrow\ n-r\ \longrightarrow}{} & \\
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & 0\\
0 & 1 & \cdots & 0 & \vdots & \ddots & & \vdots\\
\vdots & & \ddots & & & & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & & 0\\
\hline
0 & \cdots & & 0 & 0 & \cdots & & 0\\
\vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots\\
0 & \cdots & 0 & & 0 & \cdots & & 0
\end{array}\right] & \begin{array}{l}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\0\\\vdots\\0\end{array}}\right\}r\\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\\vdots\\0\end{array}}\right\}m-r\end{array}
\end{array}$$

مثال: جد قاعدة الى $\mathbb{R}^4$ وقاعدة الى $\mathbb{R}^3$ لكي تكون مصفوفة التحويل كما

مثال: جد قاعدة الى $\mathbb{R}^4$ وقاعدة الى $\mathbb{R}^3$ لكي تكون مصفوفة التحويل الخطي $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ بالصيغة الاعتيادية حيث

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+x_2,\ x_1+x_2-x_3,\ 2x_3)$$

الاجابة: ① نجد قاعدة الى $\ker T$:

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4)=0 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2=0 \\ x_1+x_2-x_3=0 \\ \qquad 2x_3=0 \end{array}\right\} \rightsquigarrow x_1=-x_2\ ,\ x_3=0$$

$$\therefore\ \ker T=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):\ x_1=-x_2,\ x_2=x_2,\ x_3=0,\ x_4=x_4\}$$

$$B_1=(-1,1,0,0)$$

$$B_2=(0,0,0,1)$$

اذن $B=\{B_1,B_2\}$ قاعدة الى $\ker T$

② نوسع B لكي تكون قاعدة الى $\mathbb{R}^4$ باضافة المتجهين $A_1=(1,0,0,0)$ ، $A_2=(0,0,1,0)$ وبذلك تكون قاعدة $\mathbb{R}^4$ هي $\{A_1,A_2,B_1,B_2\}$

③ نضع

$$C_1=T(A_1)=T(1,0,0,0)=(1,1,0)$$

$$C_2=T(A_2)=T(0,0,1,0)=(0,-1,2)$$

"مستقلة خطيا"

④ نوسع المجموعة $\{C_1,C_2\}$ لتكون قاعدة الى $\mathbb{R}^3$ باضافة المتجه $D_1=(1,0,0)$

اذن مصفوفة T بالنسبة للقواعد اعلاه لـ $\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^3$ هي

$$M_T=\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

مثال: اذا كان $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ "تحويلاً خطياً" معرفاً بالصيغة

$T(x,y,z)=(x-y,\, y+3z)$ نجد كل مما يلي:

(أ) المصفوفة M التي تمثل T بالنسبة للقواعد الطبيعية.

(ب) المصفوفة M^* التي تمثل T بالنسبة للقاعدة $\{A_1^*=(1,1,0),\ A_2^*=(1,-1,0),\ A_3^*=(0,0,1)\}$ الى $\mathbb{R}^3$ والقاعدة $\{B_1^*=(1,2),\ B_2^*=(2,1)\}$ الى $\mathbb{R}^2$.

(ج) مصفوفتان قابلتان للقلب Q, P بحيث ان $M^*=PMQ^{-1}$

الاجابة: (أ) القاعدة الطبيعية لـ $\mathbb{R}^3$ هي

$$\{A_1=(1,0,0),\ A_2=(0,1,0),\ A_3=(0,0,1)\}$$

القاعدة الطبيعية لـ $\mathbb{R}^2$ هي $\{B_1=(1,0),\ B_2=(0,1)\}$

لاحظ ان

$$T(A_1)=T(1,0,0)=(1,0)=(1)B_1+(0)B_2$$
$$T(A_2)=T(0,1,0)=(-1,1)=(-1)B_1+(1)B_2$$
$$T(A_3)=T(0,0,1)=(0,3)=(0)B_1+(3)B_2$$

عليه تكون المصفوفة

$$M=\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\\0&2\end{bmatrix}$$

(ب) نجد M^* وكالآتي:

بعد اجراء حسابات بسيطة

$$T(A_1^*)=T(1,1,0)=(0,1)=\left(\tfrac{2}{3}\right)B_1^*+\left(-\tfrac{1}{3}\right)B_2^*$$
$$T(A_2^*)=T(1,-1,0)=(2,-1)=\left(-\tfrac{4}{3}\right)B_1^*+\left(\tfrac{5}{3}\right)B_2^*$$
$$T(A_3^*)=T(0,0,1)=(0,3)=(2)B_1^*+(-1)B_2^*$$

اذن مصفوفة T بالنسبة لزوج القواعد $\{A_1^*, A_2^*, A_3^*\}$, $\{B_1^*, B_2^*\}$ تكون

$$M^*=\begin{bmatrix}2/3&-1/3\\-4/3&5/3\\2&-1\end{bmatrix}.$$

(ج) ان المصفوفة P هي مصفوفة الانتقال من القاعدة الجديدة $\{A_1^*, A_2^*, A_3^*\}$ الى القاعدة القديمة $\{A_1, A_2, A_3\}$ القاعدة الطبيعية لـ $\mathbb{R}^3$

{A_1, A_2, A_3} الى القاعدة الطبيعية

القاعدة الطبيعية لـ $\mathbb{R}^3$

اما المصفوفة Q تكون مصفوفة الانتقال من القاعدة الجديدة $\{B_1^*, B_2^*\}$

الى القاعدة القديمة $\{B_1, B_2\}$

القاعدة الطبيعية لـ $\mathbb{R}^2$

ايجاد P :

$$\left.\begin{array}{l} A_1^* = (1,1,0) = (1)A_1 + (1)A_2 + (0)A_3 \\ A_2^* = (1,-1,0) = (1)A_1 + (-1)A_2 + (0)A_3 \\ A_3^* = (0,0,1) = (0)A_1 + (0)A_2 + (1)A_3 \end{array}\right\} \Longrightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ايجاد Q :

$$\left.\begin{array}{l} B_1^* = (1,2) = (1)B_1 + (2)B_2 \\ B_2^* = (2,1) = (2)B_1 + (1)B_2 \end{array}\right\} \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Q^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$ معكوس المصفوفة Q

$$M^* = PMQ^{-1}$$ الان حسابات بسيطة تظهران

واجبات :-

(1) جد قواعد تجعل مصفوفة التحويل الخطي $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ المعرف بالصيغة

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} x+y & -x \\ -y & x-y \end{bmatrix}$$

بالصيغة الاعتيادية.

(2) اذا كان $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ تحويلاً "خطياً" معرفاً بالصيغة :-

$$T(x,y) = (x+y, 2x-y, 3x+4y, 0)$$

(أ) جد المصفوفة M التي تمثل T بالنسبة للقواعد الطبيعية.

(ب) جد قاعدة الى $\mathbb{R}^2$ وقاعدة الى $\mathbb{R}^4$ بالنسبة لها تكون مصفوفة T

(ب) جد قاعدة الى $\mathbb{R}$ وقاعدة الى $\mathbb{R}$ بالنسبة لها تكون مصفوفة T
ولتكن M^* بالصيغة الاعتيادية .

(ج) جد مصفوفتين Q , P قابلتين للقلب تحققان $M^*=PMQ^{-1}$