التحويلات الخطية:

ليكن V , W فضائي متجهات على الحقل F نفسه، ولتكن $T: V \to W$ دالة تحقق

① $T(A+B) = T(A) + T(B)$

② $T(rA) = rT(A)$

لأي متجهين $A, B \in V$ ولأي عدد قياسي $r \in F$. فان T من هذه الحالة يدعى تحويلاً خطياً من V الى W .

مثال: ليكن $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$ فضائي متجهات على الحقل F فان الدالة $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ المعرفة بالصيغة $T(x,y,z) = (x+y, z)$ تكون تحويلاً خطياً من V الى W .

توضيح: ليكن $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ متجهات في $\mathbb{R}^3$ واي $x \in \mathbb{R}$ فان

① $T(A+B) = T((a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3))$

$= T(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$

$= (a_1+b_1+a_2+b_2, a_3+b_3)$ الطرف الايسر

$T(A) + T(B) = T(a_1, a_2, a_3) + T(b_1, b_2, b_3)$

$$= (a_1+a_2, a_3) + (b_1+b_2, b_3)$$

$$= (a_1+a_2+b_1+b_2 , a_3+b_3)$$ الطرف الايمن

$=$ الطرف الايسر

(2) $T(rA) = T\big(r(a_1,a_2,a_3)\big) = T(ra_1, ra_2, ra_3)$

$= (ra_1+ra_2 , ra_3)$ الطرف الايسر

$rT(A) = rT(a_1,a_2,a_3) = r(a_1+a_2, a_3)$

$= (ra_1+ra_2 , ra_3)$ الطرف الايمن

$=$ الطرف الايسر

$\therefore$ T تحويلاً خطياً من V الى W .

واجب: - برهن ان الدالة $T:(P_2(\mathbb{R}),\mathbb{R}) \longrightarrow (\mathbb{R}^{2\times 2}, \mathbb{R})$ المعرفة بالصيغة

$$T(a+bx+cx^2) = \begin{bmatrix} a-2b & 0 \\ 0 & a+c \end{bmatrix}$$

تكون تحويلاً خطياً.

التحويل الصفري: ليكن V , W فضائي متجهات على الحقل F فان الدالة الثابتة $T:V\longrightarrow W$ المعرفة بالصيغة

$$T(A) = 0 \quad \forall A\in V$$

تكون تحويل خطي يدعى بالتحويل الصفري . [برهن ذلك]

التحويل المحايد: اذا كانت (V, F) فضاء متجهات فان الدالة

$$T(A) = A \quad \forall A \in V$$

التحويل المحايد : اذا كان $(V,+)$ فضاء متجهات فان الدالة $T:V\longrightarrow V$ المعرفة بالصيغة $T(A)=A \quad \forall A\in V$ تكون تحويل خطي يدعى بالتحويل المحايد . [برهن ذلك]

مثال : برهن ان الدالة $T:(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})\longrightarrow(\mathbb{R},\mathbb{R})$ المعرفة بالصيغة $T(x,y)=xy+1$ ليست تحويلاً "خطياً".

البرهان : - ليكن $A=(a_1,a_2)$, $B=(b_1,b_2)$ متجهات في $\mathbb{R}^2$

$$T(A+B)=\text{الطرف الايسر}=T(a_1+b_1,a_2+b_2)$$
$$=(a_1+b_1)(a_2+b_2)+1$$
$$=a_1a_2+b_1b_2+a_1b_2+b_1a_2+1$$

$$T(A)+T(B)=\text{الطرف الايمن}=T(a_1,a_2)+T(b_1,b_2)$$
$$=a_1a_2+1+b_1b_2+1$$
$$=a_1a_2+b_1b_2+2\neq\text{الطرف الايسر}$$

ملاحظة : - اذا كان $T:V\longrightarrow W$ تحويلاً "خطياً" بين الفضائين V,W على الحقل F فان

1. $T(0)=0$.
2. $T(x_1A_1+x_2A_2+\dots+x_nA_n)=x_1T(A_1)+x_2T(A_2)+\dots+x_nT(A_n)$

لكل $A_1,A_2,\dots,A_n\in V$ ولكل ادلة قياسية $x_1,x_2,\dots,x_n\in F$.

البرهان :

1. $T(0)=T(0+0) \Rightarrow$

$$\cancel{T(0)}+0=T(0)+\cancel{T(0)} \Rightarrow T(0)=0 .$$

② $T(x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_nA_n) = T(x_1A_1) + T(x_2A_2) + \dots + T(x_nA_n)$

$$= x_1T(A_1) + x_2T(A_2) + \dots + x_nT(A_n) \quad \blacksquare$$

* تحديد التحويل الخطي بمعرفة قيمته على عناصر اي قاعدة للمجال :

اذا كان (V,F) فضاء متجهات ذو بعد منتهي وان $\{A_1, \dots, A_n\}$ قاعدة ل V فانه لاي مجموعة $\{B_1, \dots, B_n\}$ جزئية من الفضاء (W,F) يوجد تحويل خطي وحيد $T: V \to W$ يحقق $T(A_1) = B_1, \dots, T(A_n) = B_n$ ، ولاي اعداد قياسية $x_1, \dots, x_n \in F$

$$T(x_1A_1 + \dots + x_nA_n) = x_1B_1 + \dots + x_nB_n.$$

توضيح : (الوجودية) سنثبت وجود تحويل خطي $T: V \to W$ يحقق الشروط اعلاه.

خذ $A \in V$.

$\therefore$ $A = x_1A_1 + \dots + x_nA_n$ لبعض $x_1, \dots, x_n \in F$

(لان $\{A_1, \dots, A_n\}$ قاعدة الى V)

عرف $T(A) = x_1B_1 + \dots + x_nB_n$

سنثبت ان T تحويل خطي :

Let $A, C \in V$, $r \in F$.

$$\Rightarrow A = x_1A_1 + \dots + x_nA_n$$

$$C = y_1A_1 + \dots + y_nA_n$$

$$A + C = (x_1 + y_1)A_1 + \dots + (x_n + y_n)A_n$$

$$\Rightarrow T(A + C) = (x_1 + y_1)B_1 + \dots + (x_n + y_n)B_n$$

$= (x_1 B_1 + \cdots + x_n B_n) + (y_1 B_1 + \cdots + y_n B_n)$

$= T(A) + T(C)$.

② $rA = (rx_1)A_1 + \cdots + (rx_n)A_n$

$\Rightarrow T(rA) = (rx_1)B_1 + \cdots + (rx_n)B_n$

$\Rightarrow T(rA) = r(x_1 B_1 + \cdots + x_n B_n) = r\,T(A)$.

(الوحدانية): لنفرض $S: V \longrightarrow W$ تحويل آخر يحقق الشروط المذكورة ونريد ان نثبت ان $S = T$.

عندئذ $S(A_1) = B_1, \ldots, S(A_n) = B_n$

عليه $S(A) = S(x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n)$

$= x_1 S(A_1) + \cdots + x_n S(A_n)$

$= x_1 B_1 + \cdots + x_n B_n = T(A) \quad \forall A \in V$

إذن $S = T$ ■

مثال: اعتبر المجموعة $\{A_1 = (1,0), A_2 = (2,7)\}$ قاعدة الى $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

جد تحويل خطي $T: (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \to (P_2(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ يحقق

$T(A_1) = 1 + x, \quad T(A_2) = -1 + x - 3x^2$

الاجابة: المطلوب ايجاد $T(A)$ لكي متجه $A = (a,b) \in \mathbb{R}^2$.

بما ان $\{A_1, A_2\}$ قاعدة الى $\mathbb{R}^2$ عليه

$A = (a,b) = x_1 A_1 + x_2 A_2 = x_1(1,0) + x_2(2,7)$

$= (x_1 + 2x_2, 7x_2)$

$\Rightarrow \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = a \\ 7x_2 = b \end{array} \Rightarrow \boxed{x_2 = b/7}$ and $\boxed{x_1 = a - \frac{2b}{7}}$

الآن يمكن تعريف T بالصيغة التالية :-

$$T(a,b)=T(A)=x_1T(A_1)+x_2T(A_2)$$
$$=\left(a-\frac{2b}{7}\right)(1+x)+\frac{b}{7}(-1+x-3x^2)$$
$$=\left(a-\frac{2b}{7}-\frac{b}{7}\right)+\left(a-\frac{2b}{7}+\frac{b}{7}\right)x-\frac{3b}{7}x^2$$

$$\therefore\ T(a,b)=\left(a-\frac{3b}{7}\right)+\left(a-\frac{b}{7}\right)x-\frac{3b}{7}x^2 .$$

واجب :- جد التحويل الخطي الذي يحقق $T:(\mathbb{C}^2,\mathbb{R})\to(\mathbb{R}^4,\mathbb{R})$

$$T(2,0)=(1,1,1,1)$$
$$T(1+i,0)=(0,0,1,0)$$
$$T(0,-2i)=(0,1,-1,0)$$
$$T(0,1)=(0,0,0,0)$$

جبر التحويلات الخطية :-

لأي فضائي متجهات V, W على الحقل F ولأي تحويلين خطيين $S,T:V\to W$ يمكن تعريف الدالتين $S+T:V\to W$ و $rT:V\to W$ بحيث

$$(S+T)(A)=S(A)+T(A)$$
$$(rT)(A)=r\,T(A)$$

لكل $A\in V$, $r\in F$.

تمرين :- برهن ان كل من $S+T$ و rT المعرفتين اعلاه تكون تحويل خطي.

(HoWo)

الرتبة والصفرية :-

اذا كانت $T: V \longrightarrow W$ تحويل خطي بين فضائي متجهات

نعرف صورة T كالآتي:

$$Im(T) = \{B \in W : B \in T(A), A \in V\}$$

نعرف نواة T كالآتي:

$$Ker(T) = \{A \in V : T(A) = 0\}$$

ملاحظة: يبدو من التعريفات

$$Ker(T) \subseteq V \quad \text{and} \quad Im(T) \subseteq W$$

مثال: اذا كان $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ تحويلاً "خطياً" معرف بالصيغة

$$T(x,y,z) = (x+2y, 0, 3z)$$

جد $Ker(T)$ و $Im(T)$.

الاجابة: - لايجاد $Ker(T)$ يجب ان نجد كل المتجهات $(x,y,z) \in V$ بحيث $T(x,y,z) = (0,0,0)$

الآن

$$T(x,y,z) = (x+2y, 0, 3z) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow x+2y = 0 \longrightarrow \boxed{x = -2y}$$

$$0 = 0 \longrightarrow \text{nothing}$$

$$3z = 0 \longrightarrow \boxed{z = 0}$$

$$\therefore Ker(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0,0)\}$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = -2y, y = y, z = 0\}$$

لايجاد $Im(T)$ يجب ان نبحث نبحث عن متجهات $B = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

بحيث ان $T(x,y,z) = B$.

الآن

$$T(x,y,z) = B$$

الآن $T(x,y,z) = B$

يعني $(x+2y, 0, 3z) = (a,b,c)$

$$\Rightarrow \quad a = x+2y,\quad b = 0,\quad c = 3z$$

(لاحظنا هنا بأن $b=0$ في حين لا يوجد شرط يحدد قيمة a و c وأيضاً لا توجد علاقة تربط a مع c)

$$Im(T) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = a,\ b = 0,\ c = c\}$$

لاحظ انه لأي قيمة $(a,0,c) \in Im(T)$ يوجد قيمة (المثال) $(a,0,\frac{c}{3}) \in \mathbb{R}^3$ بحيث ان

$$T(a,0,\tfrac{c}{3}) = (a,0,c).$$

مبرهنة: لأي تحويل خطي $T:(V,F) \to (W,F)$ يكون لدينا

① $Ker(T)$ فضاء جزئي من V.

② $Im(T)$ فضاء جزئي من W.

البرهان: ① $Ker(T)$ يجب ان تحقق شروط الفضاء الجزئي:

ليكن $A,B \in Ker(T)$, $r \in F$

$$T(A) = T(B) = 0 \Rightarrow$$

$$T(A+B) = T(A) + T(B) = 0 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow A+B \in Ker(T)$$ الشرط الاول من شروط الفضاء الجزئي

الآن

$$T(rA) = rT(A) = r \cdot 0 = 0$$

$$\therefore rA \in Ker(T)$$ الشرط الثاني من شروط الفضاء الجزئي

(2) يجب ان نثبت ان $Im(T)$ تحقق شروط الفضاء الجزئي،

نأخذ $A', B' \in Im(T)$ ، $r \in F$.

بما انه $A' \in Im(T)$ يوجد $A \in V$ بحيث $T(A) = A'$

$B' \in Im(T)$ يوجد $B \in V$ بحيث $T(B) = B'$

عليه يوجد $A+B \in V$ بحيث ان

$$T(A+B) = T(A) + T(B) = A' + B'$$

ومنه $A' + B' \in Im(T)$

كذلك يوجد $rA \in V$ بحيث ان

$$T(rA) = rT(A) = rA'$$

ومنه $rA' \in Im(T)$

تعريف :- صفرية T تعطى $\dim(Ker T)$

ورتبة T تعطى $\dim(Im T)$

مثال : جد صفرية ورتبة التحويل الخطي $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

المعرف بالصيغة $T(x,y,z) = (x+2y, 0, 3z)$

الاجابة : سبق وان وجدنا $Im(T)$, $Ker(T)$ في مثال سابق وهما

$$Ker(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = -2y, y = y, z = 0\}$$

$$Im(T) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = a, b = 0, c = c\}$$

الان ينبغي ايجاد $\dim(Ker T)$ لنجد الصفرية

من الواضح ان المجموعة $\{(-2,1,0)\}$ تشكل قاعدة الى
$Ker T$ ، ومنه $\dim(Ker T) = 1$
∴ صفرية التحويل T هي 1 .

لنجد رتبة T :- بعض آخر نجد $\dim(Im T)$

ايضاً "يبدو واضحاً" ان $H = \{(1,0,0), (0,0,1)\}$ تشكل قاعدة
الى $Im T$. عليه رتبة $T = \dim(Im T) = 2$.

واجب :- جد رتبة وصفرية التحويل الخطي
المعرف بالصيغة $T: \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = (x-w, y+2z).$$

مبرهنة البعد :- اذا كان $T: V \longrightarrow W$ تحويلاً "خطياً" فان

$$\dim V = \dim(Ker T) + \dim(Im T)$$

(بعد V) = (صفرية T) + (رتبة T)

بعض التطبيقات على مبرهنة البعد :

مثال : جد رتبة وصفرية التحويل الخطي $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
المعرف بالصيغة $T(x,y,z) = (y,z)$.

الاجابة : نحن نعلم بان $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.
لما كانت الدالة الاعلاه شاملة اي ان $Im(T) = \mathbb{R}^2$
لذا $\dim(Im T) = \dim \mathbb{R}^2 = 2$.

من مبرهنة البعد $\dim \mathbb{R}^3 = \dim(Ker T) + \dim(Im T)$

$\therefore \quad 3 = \dim(\ker T) + 2 \Rightarrow \dim(\ker T) = 3-2 = 1.$

اذن صفرية $T = 1$ ورتبة $T = 2$.

مثال : برهن ان اي تحويل خطي $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
يكون متباين .

الاجابة : يجب ان نثبت ان $\ker T = \{0\}$.

طالما T شامل فان $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \dim(\operatorname{Im} T) = \dim \mathbb{R}^n = n .$$

بتطبيق مبرهنة البعد

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T)$$

$$n = \dim(\ker T) + n$$

$$\Rightarrow \dim(\ker T) = 0$$

$$\Rightarrow \ker T = \{0\}$$

مبرهنة : اذا كان $T : V \to W$ تحويلاً خطياً فان

$\boxed{أ}$ T متباين $\Longleftrightarrow \ker T = \{0\}$

$\boxed{ب}$ T شامل $\Longleftrightarrow \operatorname{Im} T = W$.

البرهان $\boxed{أ}$ لنفرض ان T متباين ،

الآن اذا كان $A \in \ker T$ فيجب ان نثبت ان $A = 0$.

$$A \in \ker T \Rightarrow T(A) = 0 = T(0)$$

"لان T متباين" $\Rightarrow A = 0$

بالعكس لنفرض ان $\ker T=\{0\}$ ونثبت ان T متباين.

If $T(A)=T(B)$; $A,B\in V$, then

$T(A)-T(B)=0$

$\Rightarrow T(A-B)=0 \Rightarrow A-B\in \ker T=\{0\}$

$\therefore A-B=0 \Rightarrow A=B$

عليه يكون T تحويل متباين.

$\boxed{2}$ من تعريف التحويل:

T شامل اذا وفقط اذا $T(V)=W$

اذا وفقط اذا $Im(T)=W$

<u>مثال</u>: جد تحويلاً "خطياً" $T:\mathbb{R}^3\longrightarrow \mathbb{R}^2$ بحيث تكون المجموعة $\{A_1=(1,-1,0)\ ,\ A_2=(2,0,1)\}$ قاعدة للنواة.

<u>الاجابة</u>: - لمعرفة التحويل ينبغي معرفة صوره على عناصر اي قاعدة لمجاله.

ممكن توسيع قاعدة النواة لتكون قاعدة الى المجال $\mathbb{R}^3$ باضافة متجه القاعدة الطبيعية $A_3=(0,0,1)$ لانه لا يكتب كتركيب خطي من A_1, A_2.

وبذلك نحصل على القاعدة $\{A_1,A_2,A_3\}$ الى $\mathbb{R}^3$.

الآن ممكن ارسال المتجه المضاف الى اي متجه غير صفري في $\mathbb{R}^2$

" خلاف ذلك A_3 ينتمي الى النواة وان $\ker T=\mathbb{R}^3$ تناقض "

$$\left.\begin{aligned} T(A_1) &= T(1,-1,0) = (0,0) \\ T(A_2) &= T(2,0,1) = (0,0) \end{aligned}\right\}$$ لأن $A_1, A_2 \in \ker T$

$$T(A_3) = T(0,0,1) = (1,0)$$

If $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, then

$$(x,y,z) = aA_1 + bA_2 + cA_3$$
$$= a(1,-1,0) + b(2,0,1) + c(0,0,1)$$
$$= (a+2b, -a, b+c)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} a+2b &= x \rightsquigarrow \boxed{b = \frac{x+y}{2}} \\ -a &= y \rightsquigarrow \boxed{a = -y} \\ b+c &= z \rightsquigarrow \boxed{c = z - \frac{x+y}{2}} \end{aligned}$$

$$T(x,y,z) = aT(A_1) + bT(A_2) + cT(A_3)$$
$$= a(0,0) + b(0,0) + c(1,0)$$
$$= (c, 0)$$

$\therefore T(x,y,z) = \left(z - \frac{x+y}{2}, 0\right)$ هو التحويل المطلوب .

مثال :- جد تحويلاً خطياً $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ بحيث ان المجموعة $\{B_1 = (1,1,0), B_2 = (-2,1,3)\}$ تكون قاعدة لصورته .

الاجابة: اولاً لنقوم بأخذ القاعدة الطبيعية $S = \{A_1 = (1,0,0), A_2 = (0,1,0), A_3 = (0,0,1)\}$ لل $\mathbb{R}^3$ (الحل) .

ليكن

$$T(A_1) = T(1,0,0) = B_1 = (1,1,0)$$
$$T(A_2) = T(0,1,0) = B_2 = (-2,1,3)$$
$$T(A_3) = T(0,0,1) = B_3 = (0,0,0)$$

لكن $A=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$A = xA_1 + yA_2 + zA_3 \Rightarrow T(A) = xB_1 + yB_2 + zB_3$$

$$T(A) = x(1,1,0) + y(-2,1,3) + z(0,0,0)$$

$$= (x-2y,\ x+y,\ 3y)$$

اذن التحويل المطلوب هو $T(x,y,z) = (x-2y,\ x+y,\ 3y)$

واجب :- جد تحويلاً خطياً $T:\mathbb{R}^{2\times2}\longrightarrow\mathbb{R}^3$ بحيث تكون المجموعة

$$S = \left\{ A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \right\}$$

قاعدة للنواة .

التحويلات الخطية :-

تركيب التحويلات :-

اذا كان كل من U, V, W فضاء متجهات على الحقل F وان كل من $T: V\to W$, $S: U\to V$ تحويلاً خطياً فانه بالامكان تعريف دالة $ToS: U\longrightarrow W$ بحيث $ToS(A) = T(S(A))$ تدعى بتركيب الدالتين S و T.

مبرهنة : الدالة اعلاه ToS تكون تحويلاً خطياً.

البرهان : لنفرض ان $A_1, A_2 \in U$, $r\in F$

$$① \quad ToS(A_1+A_2) = T(S(A_1+A_2))$$

$$= T(S(A_1)+S(A_2))$$

$$= T(S(A_1)) + T(S(A_2))$$
$$= T\circ S(A_1) + T\circ S(A_2).$$

(2) $T\circ S(rA_1) = T(S(rA_1))$
$$= T(rS(A_1)) = rT(S(A_1))$$
$$= r\,T\circ S(A_1)\ \blacksquare$$

التحويل المحايد : لأي فضاء متجهات (V,F) التحويل

$I_V : V \longrightarrow V$ المعرف بالصيغة $I_V(A)=A$

لكل متجه $A\in V$ يسمى بالتحويل المحايد على V.

التحويلات النظيرة :- اذا كان كل من $T:V\longrightarrow W$ و

$S:W\longrightarrow V$ تحويلاً "خطياً"

① يقال بان S نظير ايسر الى T اذا كان $S\circ T = I_V$

② يقال بان S نظير ايمن الى T اذا كان $T\circ S = I_W$

③ يقال بان S نظير الى T اذا كان نظير ايسر وايمن الى T

مثال : برهن ان التحويل $S:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$ المعرف بالصيغة

$S(x,y,z)=(x,y-2x+z)$ هو نظيراً "يسارياً" وليس يمينياً

للتحويل $T:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ المعرف بالصيغة

$T(x,y,z) = (x, x+2y, x-y)$.

الاجابة :- ينبغي ان نبرهن بان $S\circ T = I_{\mathbb{R}^2}$ اي ان

$$S\circ T(x,y) = (x,y)$$

$$S\circ T(x,y) = S(T(x,y)) = S(x, x+2y, x-y)$$

$$S\circ T(x,y) = S(T(x,y)) = S(x, x+2y, x-y)$$

$$= (x, \cancel{x}+2y-\cancel{2x}+\cancel{x}-y) = (x,y)$$

الآن لنوضح ان $T\circ S \neq I_{\mathbb{R}^3}$:-

$$T\circ S(x,y) = T(S(x,y)) = T(x, y-2x+z)$$

$$= (x, -3x+2y+2z, 3x-y-z) \neq (x,y,z)$$

<u>مثال</u> :- اذا كان $T: \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^4$ تحويل خطي معرف بالصيغة

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \left(-b, a, \frac{c}{5}, \frac{d}{2}\right)$$

برهن ان التحويل الخطي $S: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$ المعرف بالصيغة

$$S(x,y,z,w) = \begin{bmatrix} y & -x \\ 5z & 2w \end{bmatrix}$$

يكون نظير الى T.

<u>الاجابة</u> : اولاً: نثبت ان $S\circ T = I_{\mathbb{R}^{2\times 2}}$

$$S\circ T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = S\left(T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)\right) = S\left(-b, a, \frac{c}{5}, \frac{d}{2}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} a & -(-b) \\ 5\left(\frac{c}{5}\right) & 2\left(\frac{d}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

ثانياً: نثبت ان $T\circ S = I_{\mathbb{R}^4}$

$$T\circ S(x,y,z,w) = T(S(x,y,z,w)) = S\left(\begin{bmatrix} y & -x \\ 5z & 2w \end{bmatrix}\right)$$

$$= \left(-(-x), y, \frac{5z}{5}, \frac{2w}{2}\right) = (x,y,z,w) \quad \blacksquare$$

التشاكل :- اذا كان $T: V \longrightarrow W$ تحويلاً خطياً بين فضائين منتهيي البعد فان T يكون تحويل غير منفرد او تشاكل اذا وفقط اذا $Ker(T) = \{0\}$ و $Im(T) = W$.

ملاحظات :- اذا كان $T: V \to W$ تحويلاً خطياً بين الفضائين المنتهيين البعد V, W فان

① يوجد الى T نظير ايمن $\Longleftrightarrow$ T تحويل شامل .

② يوجد الى T نظير ايسر $\Longleftrightarrow$ T تحويل متباين .

مثال : برهن على وجود نظير ايمن للتحويل الخطي $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ المعرف بالصيغة $T(x,y,z) = (x+y, 2x-z)$ ثم جد واحداً".

الاجابة :. لكي يكون للتحويل T نظير ايمن فيجب ان يكون شامل .

اي ان $Im(T) = \mathbb{R}^2$.

نفرض ان $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ يجب ان نجد $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ بحيث $T(a,b,c) = (x,y)$

الآن $T(a,b,c) = (a+b, 2a-c) = (x,y)$

$$\Rightarrow a+b = x \Rightarrow b = x-a$$
$$2a-c = y \Rightarrow c = 2a-y$$

(بالإمكان اخذ $a=0$ ومنه $b = x$, $c = -y$)

$\therefore (a,b,c) = (0, x, -y)$

لاحظ ان $T(a,b,c) = T(0,x,-y) = (0+x, 2(0)-(-y)) = (x,y)$

$\therefore Im(T) = \mathbb{R}^2$.

الآن نقوم بايجاد قاعدة الى $Ker T$:

Let $T(x,y,z) = (x+y, 2x-z) = (0,0)$ where $(x,y,z) \in Ker T$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x+y=0 \\ 2x-z=0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} y=-x \\ z=2x \end{array} \xrightarrow[x=1]{\text{Take}} \begin{array}{l} y=-1 \\ z=2 \end{array}$$

ومنه $\{(1,-1,2)\}$ تكون قاعدة الى $\ker T$

(لاحظ ان $\dim \ker T = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} T = 3-2=1$)

الان نقوم بتوسيع قاعدة النواة $\ker T$ لتكون قاعدة الى $\mathbb{R}^3$ باضافة القاعدة الطبيعية لها واجراء عملية الحذف ان وجدت كما مر بنا في الامثلة السابقة فنحصل على القاعدة

$$\{\underbrace{A_1=(1,-1,2)}_{\text{قاعدة } \ker T},\ B_1=(1,0,0),\ B_2=(0,1,0)\}$$

الى $\mathbb{R}^3$.

ضع

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= T(B_1)=T(1,0,0)=(1,2) \\ C_2 &= T(B_2)=T(0,1,0)=(1,0) \end{aligned}\right\} \text{قاعدة الى } \mathbb{R}^2$$

نعلم بانه كل متجه $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ هو تركيب خطي من عناصر القاعدة $\{C_1,C_2\}$

اذن $(x,y)=a(1,2)+b(1,0)=(a+b,2a)$

$$\Rightarrow \begin{aligned} a+b&=x \\ 2a&=y \end{aligned} \Rightarrow \boxed{a=\frac{y}{2}} \quad \boxed{b=x-\frac{y}{2}}$$

عرف التحويل $S:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ كالاتي:

$$S(x,y)=\frac{y}{2}B_1+\left(x-\frac{y}{2}\right)B_2$$
$$=\frac{y}{2}(1,0,0)+\left(x-\frac{y}{2}\right)(0,1,0)=\left(\frac{y}{2},x-\frac{y}{2},0\right)$$

لاثبات ان S نظير ايمن الى T:

$$T\circ S(x,y)=T(S(x,y))=T\left(\frac{y}{2},x-\frac{y}{2},0\right)$$
$$=\left(\frac{y}{2}+x-\frac{y}{2},\ 2\left(\frac{y}{2}\right)-0\right)=(x,y)$$

مثال: برهن حلنا وجود نظير ايسر للتحويل الخطي $T:P_1(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^3$ المعرف بالصيغة $T(a+bx)=(a,-b,2a)$ ثم جد واحداً.

الاجابة:- لكي يوجد نظير ايسر للتحويل T يجب ان يكون

الاجابة :- لكي يوجد تقريباً يساري للتحويل T يجب ان يكون متباين / اي ان $\ker T = \{0\}$.

اذا كان $a+bx \in \ker T \Leftarrow T(a+bx) = (0,0,0)$

$= (a,-b,2a)$

$\Rightarrow \boxed{a=0}, \boxed{b=0} \Rightarrow \ker T = \{0\}$.

الآن نقوم باختيار قاعدة ل $P_1(\mathbb{R})$ ولتكن القاعدة الطبيعية $\{A_1 = 1, A_2 = x\}$ ضع

$B_1 = T(A_1) = T(1) = (1,0,2)$

$B_2 = T(A_2) = T(x) = (0,-1,0)$

لاحظ ان $\{B_1, B_2\}$ مجموعة مستقلة خطياً، ويمكن توسيعها الى قاعدة لـ $\mathbb{R}^3$ "اضافة متجهات القاعدة الطبيعية وطريقة الحذف"

وبذلك نحصل على القاعدة $\{B_1, B_2, C_1 = (0,0,1)\}$ لـ $\mathbb{R}^3$

ومنه يمكن تعريف التحويل $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow P_1(\mathbb{R})$ اذا ما وضعنا

$S(B_1) = A_1 = 1, \quad S(B_2) = A_2 = x, \quad S(C_1) = 0$

ليكن $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \Longleftarrow$

$$(y_1, y_2, y_3) = a(1,0,2) + b(0,-1,0) + c(0,0,1)$$

$$= (a,-b,2a+c) \Rightarrow \boxed{a = y_1}, \boxed{b = -y_2}$$

$$\boxed{c = y_3 - 2y_1}$$

نعرف S بالصيغة :

$$S(y_1, y_2, y_3) = aA_1 + bA_2 + c \cdot 0$$

$$= a(1) + b(x)$$

$$= y_1 + (-y_2)x = y_1 - y_2 x$$

والطالب مدعو لتحقيق كون S نظير ايسر الى T

اي ان $S \circ T(a+bx) = a+bx$.

مثال: برهن على أن تشاكل الفضائين $P_n(\mathbb{R})$ و $\mathbb{R}^{n+1}$ حول الحقل $\mathbb{R}$.

الاجابة: نعرف التحويل $T: P_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ بالصيغة

$$T(a_0+a_1x+\dots+a_nx^n) = (a_0,a_1,\dots,a_n)$$

يكفي ان نجد تحويل خطي $S: \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow P_n(\mathbb{R})$ بحيث $S \circ T = I_{P_n(\mathbb{R})}$

و $T \circ S = I_{\mathbb{R}^{n+1}}$.

عرف التحويل $S: \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow P_n(\mathbb{R})$ بالصيغة:

$$S(b_0,b_1,\dots,b_n) = b_0+b_1x+\dots+b_nx^n.$$

لاحظ ان

$$S \circ T(a_0+a_1x+\dots+a_n) = S(a_0,a_1,\dots,a_n)$$

$$= a_0+a_1x+\dots+a_nx \quad \text{"OK"}$$

$$T \circ S(b_0,b_1,\dots,b_n) = T(b_0+b_1x+\dots+b_nx)$$

$$= (b_0,b_1,\dots,b_n) \quad \text{"OK"}$$

مبرهنة: اذا كان كل من V, W فضاء متجهات منتهي البعد حول الحقل F

فان V يشاكل W؛ نكتب $V \simeq W$ اذا وفقط اذا $\dim V = \dim W$.

البرهان: اولاً: لنفرض ان $V \simeq W$.

هذا يعني انه يوجد تشاكل $T: V \longrightarrow W$

عليه T متباين وشامل $\Leftarrow \operatorname{Ker} T = \{0\}$, $\operatorname{Im} T = W$

من مبرهنة البعد $\dim V = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T$

$\dim V = 0 + \dim W \Rightarrow \dim V = \dim W$.

ثانياً: لنفرض ان $n = \dim V = \dim W$

نقوم باختيار قواعد لكل من V و W.

لتكن $\{A_1, \dots, A_n\}$ قاعدة لـ V و

$\{B_1, \dots, B_n\}$ قاعدة لـ W

من مبرهنة سابقة يوجد تحويل خطي $T: V \longrightarrow W$

بحيث ان $T(A_1) = B_1, \dots, T(A_n) = B_n$ والذي يحقق

$A = x_1A_1 + \dots + x_nA_n$ في V يكون $T(A) = x_1B_1 + \dots + x_nB_n$

لكي يكون T تشاكل ينبغي ايجاد تحويل نظير $S: W \longrightarrow V$ بحيث ان

$S \circ T = I_V$ و $T \circ S = I_W$ ،

عرف $S: W \longrightarrow V$ بالصيغة

$$S(B) = S(y_1B_1 + \dots + y_nB_n) = y_1A_1 + \dots + y_nA_n$$

لاحظ ان

$$T \circ S(B) = T(S(B)) = T(y_1A_1 + \dots + y_nB_n)$$
$$= y_1B_1 + \dots + y_nB_n = B.$$

ايضاً

$$S \circ T(A) = S(T(A)) = S(x_1B_1 + \dots + x_nB_n)$$
$$= x_1A_1 + \dots + x_nA_n = A \quad \blacksquare$$

مثال: الفضاءان $\mathbb{R}^{n^2}$ و $\mathbb{R}^{n\times n}$ متشاكلين لان

$$\dim \mathbb{R}^{n^2} = \dim \mathbb{R}^{n\times n} = n^2$$

واجب:- اختبر التحويلين الخطيين التاليين من ناحية التشاكل

ثم جد نظير التشاكل.

$T_1: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$; $T_1(x,y,z) = (x, y, z-x)$

$T_2: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$; $T_2(x,y,z) = (x, y, x+y)$