Tuesday, October 19, 2021 6:58 PM

الاستقلال الخطي والارتباط الخطي:-

الارتباط الخطي: يقال للمجموعة الجزئية S من فضاء المتجهات بانها مجموعة مرتبطة خطياً" اذا وفقط اذا وجدت اعداد قياسية $x_1, \dots, x_k \in F$ ليست جميعها اصفاراً" ومتجهات $A_1, \dots, A_k \in S$ بحيث $x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_k A_k = 0$.

مثال: اثبت بان مجموعة المتجهات $S = \{(1,2), (2,5), (0,1)\}$ من فضاء المتجهات $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ تكون مرتبطة خطياً".

الجواب: ينبغي ايجاد $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ ليست جميعها اصفاراً" بحيث

$$x_1(1,2) + x_2(2,5) + x_3(0,1) = 0$$

$$(x_1 + 2x_2, 2x_1 + 5x_2 + x_3) = (0,0)$$

$$\therefore \quad x_1 + 2x_2 = 0 \rightsquigarrow x_1 = -2x_2$$

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \rightsquigarrow x_3 = -2x_1 - 5x_2$$

Take $\boxed{x_2 = -1} \Rightarrow \boxed{x_1 = 2}$ and $\boxed{x_3 = 1}$

مثال: في الفضاء $P_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. برهن ان المجموعة $S = \{5, 2+x, x^2, 1+4x-x^2\}$ مرتبطة خطياً".

الجواب: ينبغي ايجاد $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ بحيث

$$a(5) + b(2+x) + c(x^2) + d(1+4x-x^2) = 0$$

$$= 0 + 0x + 0x^2$$

$$5a + 2b + d = 0 \rightsquigarrow a = (-2b - d)/5$$
$$b + 4d = 0 \rightsquigarrow b = -4d$$
$$c - d = 0 \rightsquigarrow c = d$$

Take $\boxed{d = 1} \Rightarrow \boxed{c = 1}$, $\boxed{b = -4}$ and $\boxed{a = 7/5}$.

الاستقلال الخطي: يقال للمجموعة الجزئية S من فضاء المتجهات (V,F) بانها مستقلة خطيا" اذا كانت S غير مرتبطة خطيا".

توضيح:- لنفرض ان $S = \{A_1, \ldots, A_k\}$ فان S مستقلة خطيا" اذا كان الحل الوحيد للمعادلة $x_1 A_1 + \cdots + x_k A_k = 0$ هو الحل الصفري اي ان $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$.

مثال: برهن ان المجموعة الجزئية $S = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$ تكون مستقلة خطيا" في الفضاء $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

الجواب: لنفرض ان $x_1(1,1,1) + x_2(0,1,1) + x_3(0,0,1) = 0$

$$\Rightarrow (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow x_1 = 0$$
$$x_1 + x_2 = 0 \rightsquigarrow x_2 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \longrightarrow x_3 = 0 \quad \blacksquare$$

مثال: لتكن $S = \{(1, i), (i, -1)\}$ مجموعة جزئية من فضاء

المتجهات $(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$، هل ان S مستقلة "خطياً"؟

الاجابة:- لنفرض ان $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ وان

$$x_1(1,i) + x_2(i,-1) = 0$$

عندئذ

$$(x_1 + ix_2, ix_1 - x_2) = (0,0)$$

$$\Rightarrow x_1 + ix_2 = 0$$

$$ix_1 - x_2 = 0 \longrightarrow x_2 = ix_1 \quad , x_1, x_2 \in \mathbb{C}$$

Take $\boxed{x_1 = -i} \Rightarrow \boxed{x_2 = 1}$

عليه S لا تشكل مجموعة مستقلة "خطياً" في $(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$

اي ان S مجموعة مرتبطة خطياً.

واجب:- برهن ان المجموعة الجزئية

$S = \{1+x, 1-x, x^2, 3x^3\}$ من الفضاء $(P_3(\mathbb{R}), \mathbb{R})$

تكون مجموعة مستقلة خطياً.

التوليد والفضاءات المنتهية البعد

الفضاء المنتهي البعد: يقال للفضاء (V, F) بانه فضاء منتهي البعد اذا وجدت مجموعة جزئية منتهية S من V بحيث $[S] = V$.

مثال: الفضاء $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ مع عمليتي الجمع والضرب الاعتيادية يشكل فضاء منتهي البعد.

توضيح: المجموعة الجزئية المنتهية $S=\{(1,0),(0,1)\}$
تولد الفضاء ، اي ان $[S]=\mathbb{R}^2$.
لاحظ ان $[S]\subseteq \mathbb{R}^2$.
الآن لو كان $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ فإن $(x,y)=a(1,0)+b(0,1)$
$$\Rightarrow (x,y)=(a,b) \Rightarrow a=x,\ b=y$$
ومنه $(x,y)\in[S]$ اي ان $\mathbb{R}^2\subseteq[S]$
$$\therefore [S]=\mathbb{R}^2.$$

مبرهنة: اذا كان (V,F) فضاء متجهات منتهي البعد فتوجد مجموعة جزئية منتهية مستقلة خطياً S من V بحيث $V=[S]$.

البرهان: لنفرض ان (V,F) فضاء منتهي البعد.
عليه حسب التعريف توجد مجموعة جزئية منتهية $S=\{A_1,A_2,\dots,A_n\}$ من V بحيث $[S]=V$.
الآن لو كانت S مجموعة مستقلة خطياً ينتهي البرهان.
لنفرض S ليست مستقلة خطياً.
اذن يوجد متجه وعلى افتراضه A_n "بإعادة الترتيب"
يكتب كتركيب خطي من بقية المتجهات $A_1,\dots,A_{n-1}$
اي ان $A_n=x_1A_1+\dots+x_{n-1}A_{n-1}$
وبذلك المجموعة $S_1=\{A_1,\dots,A_{n-1}\}$ ايضاً تولد
الفضاء ، اي ان $[S_1]=V$
الآن اذا كانت S_1 مستقلة خطياً ينتهي البرهان.

عدا ذلك يوجد متجه من S_1 يكتب كتركيب خطي من بقية المتجهات وبإعادة الترتيب يمكن اختيار A_{n-1} ومنه $S_2=\{A_1, \dots, A_{n-2}\}$ تولد الفضاء

اي ان $[S_2]=V$

نستمر على هذا المنوال الى ان نحصل على مجموعة جزئية منتهية ومستقلة "خطياً" وبنفس الوقت تولد الفضاء قل $[S_K]=V$

وان S_K مجموعة مستقلة "خطياً".

قاعدة الفضاء: يقال للمجموعة الجزئية S من فضاء المتجهات (V,F) بأنها قاعدة الى V اذا كانت مولدة للفضاء ومستقلة "خطياً".

مثال: هل ان المجموعة $S=\{(2,0),(0,-1)\}$ من فضاء المتجهات $(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ مع عملية الجمع والضرب الاعتيادية تشكل قاعدة الى $\mathbb{R}^2$؟

الجواب: نعم. يجب ان نثبت

① $[S]=\mathbb{R}^2$

② S مجموعة مستقلة "خطياً"

①: يكفي ان نثبت ان $\mathbb{R}^2 \subseteq [S]$

ليكن $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ وان

$$(x,y)=a(2,0)+b(0,-1)$$

$$\Rightarrow (x,y)=(2a,-b) \Rightarrow 2a=x \text{ ومنه } a=\frac{x}{2}$$

$$-b = y \rightsquigarrow b = -y$$

$$\therefore \quad (x,y) = \frac{x}{2}(2,0) + (-y)(0,-1) \in [S]$$

② نفرض $a(2,0) + b(0,-1) = 0 = (0,0)$

$$\Rightarrow (2a,-b) = (0,0) \Rightarrow 2a = 0 \rightsquigarrow a = 0$$
$$-b = 0 \rightsquigarrow b = 0$$

تكون S مجموعة "مستقلة خطيا".

اذن S قاعدة للفضاء

مثال: جد قاعدة للفضاء الجزئي

$$M = \{(x,y,z) : 2x - y + z = 0\}$$

من فضاء المتجهات $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ مع الجمع والضرب القياسي العادية.

الاجابة: - لاحظ ان المتجهات في M تمتلك الخاصية

$2x - y + z = 0$ أي ان $z = y - 2x$

Take $x = 0,\ y = 1 \rightsquigarrow z = 1 \rightsquigarrow (0,1,1)$

$x = 1,\ y = 0 \rightsquigarrow z = -2 \rightsquigarrow (1,0,-2)$

$\Downarrow$

تشكل قاعدة الى M

اذن $S = \{(0,1,1),(1,0,-2)\}$ قاعدة الى M.

مثال: جد قاعدة للفضاء $M = \{a + bx + cx^2 + dx^3 : a + b = c - 3d = 0\}$ من فضاء المتجهات $(P_3(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ مع الجمع والضرب القياسي العادية.

الاجابة: المتجه $a + bx + cx^2 + dx^3$ في M يمتلك الخاصية

$$a + b = 0 \rightsquigarrow b = -a$$
$$c - 3d = 0 \rightsquigarrow c = 3d$$

Take $a=1, d=0 \rightsquigarrow b=-1, c=0$

$\rightsquigarrow 1-1.x+0x^2+0x^3 = \boxed{1-x}$

$a=0, d=1 \rightsquigarrow b=0, c=3$

$\rightsquigarrow 0+0x+3x^2+1x^4 = \boxed{3x^2+x^3}$

$\therefore S=\{1-x, 3x^2+x^3\}$

تشكل قاعدة للفضاء الجزئي M.

ملاحظة مهمة: اذا كانت $B=\{A_1,\dots,A_n\}$ مجموعة مولدة للفضاء الجزئي M من فضاء المتجهات (V,F) وان $S=\{C_1,\dots,C_m\}$ مجموعة مستقلة خطياً في M فان $m\leq n$.

مبرهنة: كل فضاء متجهات (V,F) منتهي البعد له قاعدة واي قاعدتين لها نفس العدد من المتجهات.

البرهان: من مبرهنة سابقة اي فضاء منتهي البعد (V,F) له مجموعة جزئية منتهية مستقلة S بحيث $V=[S]$.

ثانياً لنفترض ان $B_1=\{A_1,\dots,A_n\}$ و $B_2=\{C_1,\dots,C_m\}$ قاعدتين الى الفضاء V.

حسب الملاحظة اعلاه $m\leq n$ and $n\leq m$

ومنه $m=n$.

بعد الفضاء: لكل (V, F) فضاء متجهات منتهي البعد. يسمى عدد عناصر قاعدة V بعد الفضاء ويرمز له بالرمز $\dim V$.

مثال: مع عملية الجمع والضرب القياسي العادية الفضاء $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ له بعد 4 أي أن $\dim \mathbb{R}^4 = 4$.

$$S = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$$

تشكل قاعدة الى $\mathbb{R}^4$ تدعى "القاعدة الطبيعية".

مثال: مع عملية الجمع والضرب القياسي العادية الفضاء $(\mathbb{R}^{3\times 2}, \mathbb{R})$ له بعد 6 أي أن $\dim \mathbb{R}^{3\times 2} = 6$

في الحقيقة

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

تشكل 6 عدة "القاعدة الطبيعية" للفضاء $\mathbb{R}^{3\times 2}$.

مثال: مع الجمع والضرب العاديين الفضاء $(P_5(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ يكون ذو بعد 6 ، اي انه $\dim P_5(\mathbb{R}) = 6$

لان المجموعة

$$S = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$$

تشكل قاعدة "القاعدة الطبيعية" الى $P_5(\mathbb{R})$.

توسيع مجموعة مستقلة "خطيا" لتكون قاعدة لفضاء:

نظرية: كل مجموعة مستقلة خطياً يمكن توسيعها لتكون قاعدة لفضاء.

ليكن (V, F) فضاء منتهي البعد وان $S=\{A_1,\dots,A_m\}$ مجموعة مستقلة خطياً في V فتوجد متجهات $B_1,\dots,B_n$ بحيث ان $S \cup \{B_1,\dots,B_n\}$ تكون قاعدة الى V.

توضيح: لاحظ انه اذا كانت S تولد V اي ان $[S]=V$ فان S تكون قاعدة الى V وينتهي البرهان.

اذا كانت $[S]\neq V$ فمعنى ذلك: يوجد متجه $B_1 \in V$ لا يمكن كتابته كتركيب خطي من متجهات S $\Leftarrow$ $S_1 = S \cup \{B_1\}$ تكون مستقلة خطياً.

ايضاً هناك احتمالان:

اذا كانت $[S_1]=V$ ينتهي البرهان.

خلاف ذلك يوجد متجه $B_2 \in V$ لا يمكن ان يكتب كتركيب خطي من متجهات S_1 ومنه $S_2 = S \cup \{B_1, B_2\}$ تكون مستقلة خطياً.

العملية اعلاه لابد ان تكون لها نهاية ولابد ان نصل الى مجموعة مولدة بعد اضافة عدد محدود من المتجهات $B_1,\dots,B_n$ (لكون V فضاء منتهي البعد).

مثال: وسع المجموعة $\{(1,2)\}$ الجزئية من الفضاء $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ (مع عملية الجمع والضرب الثنائي العادية) لتكون قاعدة الى $\mathbb{R}^2$.

الاجابة: في بداية الامر نحن نعلم بان $\dim(\mathbb{R}^2)=2$ لذلك نحتاج متجهاً آخر مع $(1,2)$ لتكون قاعدة

عليه كتابة متجه آخر مع $(1,2)$ ليكون قاعدة ال $\mathbb{R}^2$.

أولاً: نقول بإضافة القاعدة الطبيعية ال $\mathbb{R}^2$ للمتجه $(1,2)$:

$$(1,2),\ \underbrace{(1,0),\ (0,1)}_{\text{القاعدة الطبيعية}}$$

ثانياً: من اليسار نقوم بحذف المتجه الذي يكتب كتركيب خطي من المتجهات التي تسبقه

لاحظ أنه $(1,0)$ لا يمكن كتابته كتركيب خطي $(1,2)$

أي أنه لا يوجد $a\in\mathbb{R}$ بحيث $(1,0)=a(1,2)$

وبذلك تكون القاعدة هي $\{(1,2),(1,0)\}$

مثال: جد قاعدة للفضاء $(P_3(\mathbb{R}),\mathbb{R})$ بحيث تحتوي على المجموعة المستقلة خطياً $\{x+1, 2x^2\}$.

الإجابة، كما في المثال السابق نعلم بأن $\dim P_3(\mathbb{R})=4$

لذا نحتاج متجهين آخرين لتكون قاعدة إلى $P_3(\mathbb{R})$.

نقوم بإضافة القاعدة الطبيعية ال $P_3(\mathbb{R})$ للمتجهين

ونقوم بعملية الحذف من جهة اليسار كما في المثال الأول:

$$x+1,\ 2x^2,\ \underbrace{1,\ \cancel{x},\ \cancel{x^2},\ x^3}_{\text{القاعدة الطبيعية ال } P_3(\mathbb{R})}$$

$1=a(x+1)+b(2x^2) \rightsquigarrow \exists a,b\in\mathbb{R}$ ؟!

$1=a+ax+2bx^2 \rightsquigarrow \underbrace{a=1,\ a=0}_{\text{تناقض}},\ 2b=0$

عليه لا يمكن كتابة 1 كتركيب خطي من المتجهات السابقة.

الآن نتابع

Let $X = a(x+1) + b(2x^2) + c(1)$ $\rightsquigarrow$ $\exists a,b,c \in \mathbb{R}$? !

$$X = (a+c) + ax + 2bx^2 \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} a+c&=0 \\ a&=1 \\ 2b&=0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow a=1,\ b=0,\ c=-1$$

أي أن X تكتب كتركيب خطي من المتجهات

التي تسبقه $x+1, 2x^2, 1$

لذا يمكن حذف X من القائمة الأولى.

ماذا عن X^2 : لنعرف

$X^2 = a(x+1) + b(2x^2) + c(1)$ $\rightsquigarrow$ $\exists a,b,c \in \mathbb{R}$?

$$X^2 = (a+c) + ax + 2bx^2 \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} a+c&=0 \\ a&=0 \\ 2b&=1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow a=0,\ c=0,\ b=\frac{1}{2}$$

إذن أيضاً نقوم بحذف X^2 .

بقي اختبار X^3 : بما أنه آخر متجه في القائمة الأصلية

يمكن اختياره كعنصر رابع لقاعدة $P_3(\mathbb{R})$

عليه المجموعة

$\{x+1, 2x^2, 1, X^3\}$

تشكل قاعدة الـ $P_3(\mathbb{R})$.

مبرهنة : في أي فضاء متجهات (V,F) ذي بعد n فإن أي

مجموعة تحتوي $n+1$ من المتجهات تكون

مرتبطة خطياً.

البرهان: لنفرض الجزء A تحتوي على $n+1$ من المتجهات مرتبطة خطياً، اذا كانت A مستقلة خطياً فانه بالامكان توسيعها لتكون قاعدة الى V وبذلك يكون $\dim V \geq n+1$ وهذا غير ممكن $\blacksquare$

مبرهنة: اذا كان M فضاء جزئي من فضاء (V,F) فان

① $\dim M \leq \dim V$

② اذا كان $\dim M = \dim V \Leftarrow M = V$.

البرهان: ① لتكن B قاعدة للفضاء M عليه B مستقلة خطياً.

$\therefore$ يمكن توسيع B الى B' كي تكون الجملة الاخيرة قاعدة الى V.

لاحظ ان $\dim M = |B|$ وان $\dim V = |B'|$

ولكن $|B| \leq |B'|$ لان $B \subseteq B'$

$$\dim M = |B| \leq |B'| = \dim V.$$

② اذا كان $\dim M = \dim V$ فان اي قاعدة الى M تكون ايضاً قاعدة الى V وبذلك $M = V$ $\blacksquare$

مبرهنة البعد: لتكن كل من M, N فضاء جزئي من فضاء المتجهات (V,F) فان

$$\dim(M+N) = \dim(M) + \dim(N) - \dim(M \cap N).$$

البرهان: HoW (page 91)

مثال :- جد بعد الفضاء الجزئي $M+N$ من الفضاء $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$
مع الجمع والضرب القياسي الاعتيادية اذا علمت ان

$$M=\{(x,y,z): x-2y+z=0\} \quad , \quad N=\{(x,y,z): 2x+5y=0\}$$

ثم برهن ان $M+N=\mathbb{R}^3$.

الاجابة :- بتطبيق مبرهنة البعد

$$\dim(M+N)=\dim M+\dim N-\dim(M\cap N)$$

اذن ينبغي ان نجد $\dim M, \dim N, \dim M\cap N$

$\dim M$: if $(x,y,z)\in M$, then $z=2y-x$

Take $x=0, y=1 \leadsto z=2 \leadsto (0,1,2)$

$x=1, y=0 \leadsto z=-1 \leadsto (1,0,-1)$

قاعدة الى M ومنه $\dim(M)=2$

$\dim N$: if $(x,y,z)\in N \leadsto y=-\frac{2}{5}x , z=z$

Take $x=1, z=0 \longrightarrow y=-\frac{2}{5} \leadsto (1,-\frac{2}{5},0)$

$x=0, z=1 \leadsto y=0 \leadsto (0,0,1)$

قاعدة الى N وبذلك $\dim(N)=2$

$\dim(M\cap N)$: if $(x,y,z)\in M\cap N \Longrightarrow$

$(x,y,z)\in M$ and $(x,y,z)\in N$

$x-2y+z=0$ $\qquad$ $2x+5y=0$

$2x-4y+2z=0$

$x = \frac{-5y}{2} \quad \frac{2}{9}z$

$2x + 5y = 0$

$\Downarrow$

$9y - 2z = 0 \rightsquigarrow y = \frac{2}{9}z$

$\therefore x = \frac{-5}{9}z$

Take $z = -9 \rightsquigarrow x = 5, y = -2 \Rightarrow \underbrace{(5, -2, -9)}$

$\dim(M \cap N) = 1$ وبذلك $M \cap N$ قاعدة لـ

$\therefore \dim(M+N) = 2+2-1 = 3$

بما أنه $M+N$ فضاء جزئي ذو بعد 3 من فضاء المتجهات $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ / إذن $\dim(M+N) = \dim(\mathbb{R}^3)$

على $M+N = \mathbb{R}^3$.

واجب: لتكن كل من $M = \{(a,0,0)\}$, $N = \{(0,b,b)\}$

فضاءاً جزئياً من $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ مع الجمع والضرب القياسي الاعتيادي.

① جد قاعدة الى $M+N$

② هل ان $M+N = \mathbb{R}^3$ ؟

الاحداثيات وتغيير القواعد:

من الآن فصاعداً سنتعامل مع قواعد مرتبة للفضاءات المنتهية البعد.

مثلاً القاعدة $S_1 = \{A_1 = (1,0), A_2 = (0,1)\}$ للفضاء $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ تختلف

عن القاعدة $S_2 = \{A_1 = (0,1), A_2 = (1,0)\}$ من حيث الترتيب.

متجه الاحداثيات: لتكن A متجهاً في الفضاء (V, F). متجه

احداثيات المتجه A بالنسبة للقاعدة $S = \{A_1, ---, A_n\}$

نقصد المتجه $X=(x_1,\dots,x_n)$ حيث $x_1,\dots,x_n \in F$ عناصر
قياسية وحيدة تحقق $A=x_1A_1+x_2A_2+\dots+x_nA_n$.

<u>مثال</u>: تأمل الفضاء $(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ الاعتيادي. جد متجه احداثيات المتجه $A=(5,6)$ بالنسبة للقاعدة الطبيعية ثم بالنسبة للقاعدة $S=\{A_1=(1,2), A_2=(-1,4)\}$.

<u>الاجابة</u>: القاعدة الطبيعية هي $\{A_1=(1,0), A_2=(0,1)\}$

لنفرض $X=(x_1,x_2)$ هو متجه احداثيات A بالنسبة للقاعدة الطبيعية.

$\therefore A=x_1A_1+x_2A_2$

$$(5,6)=x_1(1,0)+x_2(0,1) \rightarrow (5,6)=(x_1,x_2)$$

ومنه $x_1=5$, $x_2=6$.

عليه $X=(5,6)$.

الان اذا كان $Y=(y_1,y_2)$ متجه احداثيات A بالنسبة للقاعدة S

فان $(5,6)=y_1(1,2)+y_2(-1,4) \Longrightarrow$

$$(5,6)=(y_1-y_2,\ 2y_1+4y_2) \Longrightarrow \begin{aligned} 2y_1+4y_2&=6\\ y_1-y_2&=5 \quad (*2)\end{aligned}$$

بالطرح

$$6y_2=-4$$

$$y_2=-\frac{2}{3},\ y_1=\frac{13}{3}$$

$\therefore Y=(13/3, -2/3)$

واجب: في الفضاء $(P_2(\mathbb{R}),\mathbb{R})$ الاعتيادي. جد متجه الاحداثيات المتجه $A=1-x^2$ بالنسبة للقاعدة

$S=\{A_1=3, A_2=-1+x, A_3=x^2\}$

<u>مصفوفة الانتقال</u>: - اذا كانت $S=\{A_1,\dots,A_n\}$
قاعدة للفضاء (V,F) وان $S^*=\{A_1^*,\dots,A_n^*\}$

قاعدة جديدة الى V فانه بالإمكان كتابة كل متجه في S كتركيب خطي من متجهات S^* وعلى النحو التالي:

$$A_1 = P_{11}A_1^* + P_{12}A_2^* + \cdots + P_{1n}A_n^*$$

$$A_2 = P_{21}A_1^* + P_{22}A_2^* + \cdots + P_{2n}A_n^*$$

$$\vdots$$

$$A_n = P_{n1}A_1^* + P_{n2}A_2^* + \cdots + P_{nn}A_n^*$$

عندئذ تسمى المصفوفة

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ P_{n1} & P_{2n} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix}$$

بمصفوفة الانتقال من القاعدة S الى القاعدة S^*

مثال: جد مصفوفة الانتقال من القاعدة $S=\{A_1=(2,1), A_2=(0,3)\}$ الى القاعدة $S^*=\{A_1^*=(-1,0), A_2^*=(3,3)\}$ في الفضاء $(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ الاعتيادي.

الاجابة: نقوم بكتابة كل متجه من متجهات S كتركيب خطي من متجهات S^* وكالآتي:

$$A_1 = (2,1) = P_{11}A_1^* + P_{12}A_2^* = P_{11}(-1,0) + P_{12}(3,3)$$

$$A_2 = (0,3) = P_{21}A_1^* + P_{22}A_2^* = P_{21}(-1,0) + P_{22}(3,3)$$

$$\Rightarrow \quad (2,1) = (-P_{11}+3P_{12}\,,\, 3P_{12})$$

$$(0,3) = (-P_{21}+3P_{22}\,,\, 3P_{22})$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} -P_{11}+3P_{12} &= 2 \\ 3P_{12} &= 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{P_{12}=1/3} \text{ and } \boxed{P_{11}=-1}$$

$$\left.\begin{array}{r} -P_{21}+3P_{22}=0 \\ 3P_{22}=3 \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{P_{22}=1} \text{ and } \boxed{P_{21}=3}$$

عندئذ تكون مصفوفة الانتقال من القاعدة S الى القاعدة S^* هي

$$P=\begin{bmatrix} -1 & 1/3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

مبرهنة: اذا كانت S قاعدة لفضاء المتجهات المنتهي البعد (V,F) و S^* قاعدة جديدة الى (V,F) بحيث ان مصفوفة الانتقال من الـ S الى S^* هي P واذا كان X هو متجه احداثيات المتجه $A\in V$ بالنسبة للقاعدة S فان $X^* = XP$ هو متجه احداثيات A بالنسبة للقاعدة S^*.

البرهان: لنفرض ان بعد V هو n وان $S=\{A_1,\dots,A_n\}$
$S^*=\{A_1^*,\dots,A_n^*\}$.

بما ان $X=(x_1,\dots,x_n)$ متجه احداثيات A بالنسبة الى القاعدة S فان

$$A=x_1A_1+\dots+x_nA_n$$

ولما كانت $P=(P_{ij})_{n\times n}$ مصفوفة الانتقال من S الى S^* عليه

$$A_1=P_{11}A_1^*+\dots+P_{1n}A_n^*$$

$$A_2=P_{21}A_1^*+\dots+P_{2n}A_n^*$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$A_n=P_{n1}A_1^*+\dots+P_{nn}A_n^*$$

Thus

$$A=x_1[P_{11}A_1^*+\dots+P_{1n}A_n^*]+x_2[P_{21}A_1^*+\dots+P_{2n}A_n^*]+\dots$$

$$+ x_n\left[P_{n1}A_1^* + \cdots + P_{nn}A_n^*\right]$$

ومنه

$$A = (x_1P_{11} + x_2P_{21} + \cdots + x_nP_{n1})A_1^* + (x_1P_{12} + x_2P_{22} + \cdots + x_nP_{n2})A_2^* + \cdots + (x_1P_{1n} + x_2P_{2n} + \cdots + x_nP_{nn})A_n^*$$

اذا كان $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ هو متجه احداثيات A بالنسبة الى القاعدة S^* فان

$$X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) = (x_1, \dots, x_n)\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix} = XP$$

مثال: اذا علمت بان $X = (1, 2, -1)$ هو متجه احداثيات المتجه A في الفضاء $P_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ الحادي مع القاعدة $S = \{\frac{1}{2}, -x, 2x^2\}$ ، جد A.

اذا علمت ايضاً بان

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة الانتقال من S الى القاعدة $S^* = \{A_1^*, A_2^*, A_3^*\}$ جد متجه احداثيات A بالنسبة للقاعدة S^*.

الاجابة:

$$A = 1\left(\tfrac{1}{2}\right) + (2)(-x) + (-1)(2x^2) = \frac{1}{2} - 2x - 2x^2.$$

الآن ليكن $X^* = (a_1^*, a_2^*, a_3^*)$ هو متجه احداثيات A بالنسبة للقاعدة S^*

حسب مبرهنة اعلاه

$$X^* = XP = (1, 2, -1)\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = (4, 2, -1)$$

$$= (1,2,-1)\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = (4,2,-1)$$

مثال : جد مصفوفة الانتقال من القاعدة

$S=\{A_1=2, A_2=1-x+x^2, A_3=2x+3x^2\}$ للفضاء $(P_2(\mathbb{R}),\mathbb{R})$

العادي الى القاعدة $S^*=\{A_1^*=1+x, A_2^*=x^2, A_3^*=3+4x+5x^2\}$.

الاجابة :

$$A_1 = P_{11}(1+x) + P_{12}x^2 + P_{13}(3+4x+5x^2) = 2 \quad \text{--- } (1)$$

$$A_2 = P_{21}(1+x) + P_{22}x^2 + P_{23}(3+4x+5x^2) = 1-x+x^2 \quad \text{--- } (2)$$

$$A_3 = P_{31}(1+x) + P_{32}x^2 + P_{33}(3+4x+5x^2) = 2x+3x^2 \quad \text{--- } (3)$$

من (1) نحصل

$$\left.\begin{aligned} P_{11}+3P_{13} &= 2 \\ P_{11}+4P_{13} &= 0 \end{aligned}\right\} \rightsquigarrow \boxed{P_{13}=-2} \text{ and } \boxed{P_{11}=8}$$

$$P_{12}+5P_{13} = 0 \rightsquigarrow \boxed{P_{12}=10}$$

من (2)

$$\left.\begin{aligned} P_{21}+3P_{23} &= 1 \\ P_{21}+4P_{23} &= -1 \end{aligned}\right\} \rightsquigarrow \boxed{P_{23}=-2} \text{ and } \boxed{P_{21}=7}$$

$$P_{22}+5P_{23} = 1 \longrightarrow \boxed{P_{22}=11}$$

من (3)

$$\left.\begin{aligned} P_{31}+3P_{33} &= 0 \\ P_{31}+4P_{33} &= 2 \end{aligned}\right\} \rightsquigarrow \boxed{P_{33}=2} \text{ and } \boxed{P_{31}=-6}$$

$$P_{32}+5P_{33} = 3 \rightsquigarrow \boxed{P_{32}=-7}$$

أو $$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 & -2 \\ 7 & 11 & -2 \\ -6 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

واجب (1)

واجب (1) اذا كانت $S=\{A_1,\dots,A_n\}$ و $S^*=\{A_1^*,\dots,A_n^*\}$
و $S^{**}=\{A_1^{**},\dots,A_n^{**}\}$ قواعد للفضاء (V,F) وكانت P هي
مصفوفة الانتقال من S الى S^* و Q مصفوفة الانتقال من S^* الى S^{**}
فان PQ تكون مصفوفة الانتقال من S الى S^{**}.

(2) اذا كانت P مصفوفة الانتقال من قاعدة S الى قاعدة S^*
للفضاء (V,F) فان P^{-1} تكون مصفوفة الانتقال من S^* الى
S.