Lecture1 ** Dr. Mohammed Alabbood** Fields and Vector Spaces***Subspaces and Algebra of subspaces***Linear Combination

Monday, April 19, 2021 12:01 AM

١ الحقل هو مجموعة غير خالية F بحيث يكون لها العملية الأولى تدعى بالجمع والعملية الثانية تدعى بالضرب مع تحقق الشروط التالية:

(1) $\forall a, b \in F$: $a+b \in F$ and
$a \cdot b \in F$

(2) $\forall a, b \in F$: $a+b = b+a$ and
$a \cdot b = b \cdot a$

(3) $\forall a, b, c \in F$: $(a+b)+c = a+(b+c)$
and $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

(4) $\forall a, b, c \in F$:
$a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

(5) $\exists\, 0, 1 \in F$ such that
$a + 0 = a$ and $a \cdot 1 = a$
$\forall a \in F$

(6) $\forall a, b \neq 0$ in F $\exists -a, b^{-1}$
Such that $a + (-a) = 0$ and
$b \cdot b^{-1} = 1$.

بعض الحقول :- من الحقول المتعارف عليها :

(1) حقل الأعداد النسبية $(\mathbb{Q},+,\cdot)$

(2) حقل الأعداد الحقيقية $(\mathbb{R},+,\cdot)$

(3) حقل الأعداد العقدية $(\mathbb{C},+,\cdot)$

فضاء المتجهات :-

فضاء متجهات V على الحقل F نعني مجموعة غير خالية V بعمليتين ، العملية الأولى تدعى بالجمع والثانية تدعى بالضرب القياسي مع تحقق الشروط التالية :

(1) $\forall A,B \in V$ and $a \in F$:

$$A+B \,,\; aA \in V$$

(2) $\forall A,B,C \in V$:

$$A+B = B+A \quad \text{and}$$

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

(3) $\exists\, O \in V$ such that

$$A+O = A \quad \forall A \in V$$

(4) $\forall A \in V \ \exists -A \in V$ such that

$A + (-A) = 0$

(5) $\forall A, B \in V$ and $a, b \in F$:

(5-1) $a(A+B) = aA + aB$

(5-2) $(a+b)A = aA + bA$

(5-3) $(ab)A = a(bA)$

(5-4) $1A = A$.

مثال: عرف عملية الجمع والضرب القياسي على $\mathbb{R}^2$ كالآتي:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$a(x_1, y_1) = (ax_1, ay_1), \quad a \in \mathbb{R}$$

فان الثنائي $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ يشكل فضاء متجهات.

توضيح :- لنفرض ان $A = (x_1, y_1)$

$B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$

متجهات في $\mathbb{R}^2$ وان $a, b \in \mathbb{R}$

(1) $A+B=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)$
$=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)\in\mathbb{R}^2.$
$aA\ =a(x_1,y_1)=(ax_1,ay_1)\in\mathbb{R}^2$

(2) $A+B=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)$
$=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$

$B+A\ =(x_2,y_2)+(x_1,y_1)$
$=(x_2+x_1,\ y_2+y_1)=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$
$\therefore\ A+B=B+A.$

$(A+B)+C=\big((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\big)+(x_3,y_3)$
$=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)+(x_3,y_3)$
$=(x_1+x_2+x_3,\ y_1+y_2+y_3)$

$A+(B+C)\ =(x_1,y_1)+\big((x_2,y_2)+(x_3,y_3)\big)$
$=(x_1,y_1)+(x_2+x_3,\ y_2+y_3)$
$=(x_1+x_2+x_3,\ y_1+y_2+y_3).$

$\therefore\ (A+B)+C\ =\ A+(B+C).$

(3) $\exists\ O=(0,0)\in\mathbb{R}^2$ such that

$$A + O = (x_1, y_1) + (0, 0) = (x_1, y_1) = A.$$

(4) $\exists\, -A = -(x_1, y_1) = (-x_1, -y_1)$ such that

$$A + (-A) = (x_1, y_1) + (-x_1, -y_1)$$
$$= (0, 0) = O.$$

(5-1)
$$a(A+B) = a\big((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\big)$$
$$= a\,(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$$
$$= (ax_1 + ax_2,\ ay_1 + ay_2)$$

$$aA + aB = a(x_1, y_1) + a(x_2, y_2)$$
$$= (ax_1, ay_1) + (ax_2, ay_2)$$
$$= (ax_1 + ax_2,\ ay_1 + ay_2).$$

So $a(A+B) = aA + aB$

(5-2)
$$(a+b)A = (a+b)\,(x_1, y_1)$$
$$= \big((a+b)x_1,\ (a+b)y_1\big)$$
$$= (ax_1 + bx_1,\ ay_1 + by_1)$$

$$aA + bA = a(x_1, y_1) + b(x_1, y_1)$$
$$= (ax_1, ay_1) + (bx_1, by_1)$$
$$= (ax_1 + bx_1,\ ay_1 + by_1).$$

$$\therefore \quad (a+b)A = aA + bA.$$

$$(5\text{-}3) \quad (ab)A = ab(x_1, y_1) = (abx_1, aby_1)$$

$$a(bA) = a\big(b(x_1, y_1)\big) = a(bx_1, by_1) = (abx_1, aby_1)$$

$$\therefore \quad (ab)A = a(bA).$$

$$(5\text{-}4) \quad 1.A = 1.(x_1, y_1) = (x_1, y_1) = A \quad \blacksquare$$

واجب :- تأمل عملية الجمع والضرب القياسي على $\mathbb{R}^3$ المعرفة بالشكل

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$a(x_1, y_1, z_1) = (ax_1, ay_1, az_1)$$

برهن ان $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ يشكل فضاء متجهات.

ملاحظة :- ان نوع العملية مهم جداً في بناء فضاء المتجهات والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال : تأمل عملية الجمع والضرب القياسي على $\mathbb{R}^2$ كالآتي:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$a(x_1, y_1) = (ax_1, y_1)$$

هل ان $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ يشكل فضاء متجهات؟

الجواب: كلا

خذ $A = (1,1)$, $a = 1$, $b = -2$

لاحظ ان

$$(a+b)A = (1-2)(1,1)$$
$$= -1(1,1) = (-1,1) \quad \text{((حسب التعريف))}$$

$$aA + bA = 1(1,1) + (-2)(1,1)$$
$$= (1,1) + (-2,1)$$
$$= (-1,2)$$

$\therefore \ (a+b)A \neq aA + bA$

اي الخاصية (5-2) خاطئة.

واجب :- عرف عملية الجمع والضرب القياسي على $\mathbb{R}^2$ كالآتي:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1, y_1) \quad ,$$

$$a(x_1, y_1) = (ax_1, ay_1) \quad , a \in \mathbb{R}$$

برهن ان $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ليست فضاء متجهات.

مثال: تأمل مجموعة المصفوفات $\mathbb{R}^{2\times 2}$ من الدرجة 2×2 على الحقل $\mathbb{R}$ مع عملية الجمع

والضرب القياسي المعرفتين بالشكل

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}$$

$$r\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra_1 & rb_1 \\ rc_1 & rd_1 \end{bmatrix}$$

برهن ان $(\mathbb{R}^{2\times 2}, \mathbb{R})$ يشكل فضاء متجهات.

توضيح: لتكن

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

$$(1)\ A+B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$$aA = a\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa_1 & ab_1 \\ ac_1 & ad_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$$(2)\ A+B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}$$

$$B+A = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}$$

$\therefore A+B=B+A$

$$(A+B)+C=\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} a_1+a_2+a_3 & b_1+b_2+b_3 \\ c_1+c_2+c_3 & d_1+d_2+d_3 \end{bmatrix}$$

$$A+(B+C)=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix}\right)$$
$$=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_2+a_3 & b_2+b_3 \\ c_2+c_3 & d_2+d_3 \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} a_1+a_2+a_3 & b_1+b_2+b_3 \\ c_1+c_2+c_3 & d_1+d_2+d_3 \end{bmatrix}$$

$\therefore (A+B)+C=A+(B+C)$

(3) $\exists\ O=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ such that

$$A+O=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}=A.$$

(4) $-A=-\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -a_1 & -b_1 \\ -c_1 & -d_1 \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ and

$$A+(-A)=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -a_1 & -b_1 \\ -c_1 & -d_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=O.$$

$$A+(-A)=\begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ -c_1 & -d_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=0.$$

(5-1) $$a(A+B)=a\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$=a\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} aa_1+aa_2 & ab_1+ab_2 \\ ac_1+ac_2 & ad_1+ad_2 \end{bmatrix}$$

$$aA+aB=a\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}+a\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} aa_1 & ab_1 \\ ac_1 & ad_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} aa_2 & ab_2 \\ ac_2 & ad_2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} aa_1+aa_2 & ab_1+ab_2 \\ ac_1+ac_2 & ad_1+ad_2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ a(A+B)=aA+aB$$

(5-2) $$(a+b)A=(a+b)\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (a+b)a_1 & (a+b)b_1 \\ (a+b)c_1 & (a+b)d_1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} aa_1+ba_1 & ab_1+bb_1 \\ ac_1+bc_1 & ad_1+bd_1 \end{bmatrix}$$

$$aA+bA=a\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} aa_1 & ab_1 \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ba_1 & bb_1 \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} aa_1 & ab_1 \\ ac_1 & ad_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ba_1 & bb_1 \\ bc_1 & bd_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} aa_1 + ba_1 & ab_1 + bb_1 \\ ac_1 + bc_1 & ad_1 + bd_1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ (a+b)A = aA + bA .$$

$$(5\text{-}3) \quad (ab)A = (ab)\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aba_1 & abb_1 \\ abc_1 & abd_1 \end{bmatrix}$$

$$a(bA) = a\left(b\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right) = a\begin{bmatrix} ba_1 & bb_1 \\ bc_1 & bd_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} aba_1 & abb_1 \\ abc_1 & abd_1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ (ab)A = a(bA) .$$

$$(5\text{-}4) \quad 1.A = 1.\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = A \ \blacksquare$$

مثال: تأمل مجموعة الحدوديات من الدرجة ≤ 2
على الحقل $\mathbb{R}$, التي نرمز لها بالرمز $P_2(\mathbb{R})$.
عرف عمليتي الجمع والضرب القياسي كالآتي:

$$(a_1 + b_1x + c_1x^2) + (a_2 + b_2x + c_2x^2) =$$
$$(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)x^2 .$$

$$r(a_1 + b_1x + c_1x^2) = ra_1 + rb_1x + rc_1x^2 .$$

برهن أن $(P_2(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ فضاء متجه.

نفرض ∘ أن: $A = a_1 + b_1x + c_1x^2$

$A = a_1 + b_1 x + c_1 x^2$ توضيح: لتكن

$B = a_2 + b_2 x + c_2 x^2$

$C = a_3 + b_3 x + c_3 x^2$

وان $r, s \in \mathbb{R}$ ثان

$$(1)\quad A+B = (a_1 + b_1 x + c_1 x^2) + (a_2 + b_2 x + c_2 x^2)$$
$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)x^2 \in P_2(\mathbb{R})$$

$$rA = r(a_1 + b_1 x + c_1 x^2)$$
$$= (ra_1) + (rb_1)x + (rc_1)x^2 \in P_2(\mathbb{R})$$

$$(2)\quad A+B = (a_1 + b_1 X + c_1 X^2) + (a_2 + b_2 X + c_2 X^2)$$
$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)x^2$$

$$B+A = (a_2 + b_2 X + c_2 X^2) + (a_1 + b_1 X + c_1 X^2)$$
$$= (a_1 + a_2)X + (b_1 + b_2)X^2 + (c_1 + c_2)X^2$$

$$\therefore\ A+B = B+A.$$

$$(A+B)+C = \Big((a_1 + b_1 X + c_1 X^2) + (a_1 + b_2 X + c_2 X^2)\Big) + (a_3 + b_3 X + c_3 X^2)$$
$$= \Big((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)X + (c_1 + c_2)X^2\Big) + (a_3 + b_3 X + c_3 X^2)$$
$$= (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3)X + (c_1 + c_2 + c_3)X^2$$

$$A+(B+C) = (a_1 + b_1 X + c_1 X^2) + \Big((a_2 + b_2 X + c_2 X^2) + (a_3 + b_3 X + c_3 X^2)\Big)$$

$$A+(B+C) = (a_1+b_1x+c_1x^2) + \left((a_2+b_2x+c_2x^2) + (a_3+b_3x+c_3x^2)\right)$$

$$= (a_1+b_1x+c_1x^2) + \left((a_2+a_3) + (b_2+b_3)x + (c_2+c_3)x^2\right)$$

$$= (a_1+a_2+a_3) + (b_1+b_2+b_3)x + (c_1+c_2+c_3)x^2$$

$\therefore$ $(A+B)+C = A+(B+C)$.

(3) $\exists\, O = 0+0x+0x^2 \in P_2(\mathbb{R})$ such that

$$A+O = (a_1+b_1x+c_1x^2) + (0+0x+0x^2)$$

$$= a_1+b_1x+c_1x^2 = A.$$

(4) $-A = -(a_1+b_1x+c_1x^2) = (-a_1)+(-b_1)x+(-c_1)x^2$

and $A+(-A) = (a_1+b_1x+c_1x^2) + \left((-a_1)+(-b_1)x+(-c_1)x^2\right)$

$$= 0+0x+0x^2 = O.$$

(5-1) $r(A+B) = r\left((a_1+b_1x+c_1x^2) + (a_2+b_2x+c_2x^2)\right)$

$$= r\left((a_1+a_2) + (b_1+b_2)x + (c_1+c_2)x^2\right)$$

$$= (ra_1+ra_2) + (rb_1+rb_2)x + (rc_1+rc_2)x^2$$

$$rA+rB = r(a_1+b_1x+c_1x^2) + r(a_2+b_2x+c_2x^2)$$

$$= (ra_1+rb_1x+rc_1x^2) + (ra_2+rb_2x+rc_2x^2)$$

$$= (ra_1+ra_2) + (rb_1+rb_2)x + (rc_1+rc_2)x^2$$

$\therefore$ $r(A+B) = rA+rB$

(5-2) $(r+s)A = (r+s)(a_1+b_1x+c_1x^2)$

$$= (r+s)a_1 + (r+s)b_1x + (r+s)c_1x^2$$

$$= (ra_1+sa_1) + (rb_1+sb_1)x + (rc_1+sc_1)x^2$$

$$rA + sA = r(a_1+b_1x+c_1x^2) + s(a_1+b_1x+c_1x^2)$$

$$= (ra_1+rb_1x+rc_1x^2) + (sa_1+sb_1x+sc_1x^2)$$

$$= (ra_1+sa_1) + (rb_1+sb_1)x + (rc_1+sc_1)x^2$$

$\therefore (r+s)A = rA + sA.$

(5-3) $(rs)A = (rs)(a_1+b_1x+c_1x^2)$

$$= (rsa_1) + (rsb_1)x + (rsc_1)x^2$$

$$r(sA) = r\left(s(a_1+b_1x+c_1x^2)\right)$$

$$= r(sa_1+sb_1x+sc_1x^2)$$

$$= (rsa_1) + (rsb_1)x + (rsc_1)x^2$$

$\therefore (rs)A = r(sA).$

(5-4) $1.A = 1.(a_1+b_1x+c_1x^2) = a_1+b_1x+c_1x^2 = A$

مبرهنة: لتكن (V,F) فضاءً متجهياً
فأن

(1) $\forall A \in V : 0A = 0.$

(2) $\forall A \in V : (-1)A = -A$

(2) $\forall A \in V : (-1)A = -A.$

(3) $\forall x \in F : x\mathcal{O} = \mathcal{O}.$

البرهان :

(1)
$$(0+0)A = 0A + 0A \Rightarrow$$
$$0A = 0A + 0A$$

لكن

$$0A + \mathcal{O} = 0A$$

عليه

$$\cancel{0A} + \mathcal{O} = \cancel{0A} + 0A$$
$$\Rightarrow 0A = \mathcal{O}.$$

(2)
$$\big(1+(-1)\big)A = 1A + (-1)A \Rightarrow$$
$$0A = A + (-1)A \Rightarrow$$
$$\mathcal{O} = A + (-1)A$$

لكن

$$A + (-A) = \mathcal{O}$$

عليه

$$\cancel{A} + (-A) = \cancel{A} + (-1)A$$
$$\Rightarrow (-1)A = -A.$$

(3)
$$x(\mathcal{O}+\mathcal{O}) = x\mathcal{O} + x\mathcal{O} \Rightarrow$$
$$x\mathcal{O} = x\mathcal{O} + x\mathcal{O} \Rightarrow$$

$$x\,0 = x\,0 + x\,0 \Rightarrow$$

$$\cancel{x\,0} + 0 = \cancel{x\,0} + x\,0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\,0 = 0.$$

الفضاء الجزئي :- ليكن $(V, \mathbb{R})$ فضاء متجهات . يقال للمجموعة غير الخالية $W \subseteq V$ بانها فضاء جزئي من V اذا تحققت الشروط

(1) $\forall A, B \in W : A + B \in W$

(2) $\forall A \in W,\ a \in F : aA \in W$.

مثال : تأمل الفضاء $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ مع عملية الجمع والضرب القياسي

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$r(x_1, y_1) = (r x_1, r y_1).$$

اذا كانت $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$ اثبت ان $(M, \mathbb{R})$ فضاء جزئي من $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

الإجابة: لتكن $A=(x_1,y_1), B=(x_2,y_2) \in M$
ولتكن $r \in \mathbb{R}$

① $A \in M \rightsquigarrow y_1 = 2x_1$ "حسب تعريف M"
$B \in M \rightsquigarrow y_2 = 2x_2$

$$A+B = (x_1,y_1) + (x_2,y_2)$$
$$= (x_1+x_2, y_1+y_2) \quad \text{and}$$

$$y_1+y_2 = 2x_1+2x_2 = 2(x_1+x_2)$$

عليه $A+B \in M$.

(2) $rA = r(x_1,y_1) = (rx_1, ry_1)$ and
$$ry_1 = r(2x_1) = 2(rx_1)$$

عليه $rA \in M$

∴ $(M,\mathbb{R})$ فضاء جزئي من $(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

مثال: تأمل الفضاء $(\mathbb{R}^{2\times 2},\mathbb{R})$ مع عمليتي الجمع والضرب

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}$$ القياسي

$$r\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra_1 & rb_1 \\ rc_1 & rd_1 \end{bmatrix}.$$

لتكن
$$M = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

برهن ان $(M, \mathbb{R})$ فضاء "جزئياً" من $(\mathbb{R}^{2\times 2}, \mathbb{R})$.

الاجابة: لتكن $A=\begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix}$

متجهات من M وان $x \in \mathbb{R}$ فان

$$(1) \quad A+B=\begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & 0 \end{bmatrix} \in M$$

$$(2) \quad xA = x\begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & xb_1 \\ xc_1 & 0 \end{bmatrix} \in M$$

∴ $(M, \mathbb{R})$ فضاء جزئي من $(\mathbb{R}^{2\times 2}, \mathbb{R})$.

مثال: تأمل الفضاء $(P_2(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ مع عمليتي الجمع والضرب القياسي

$$(a_1+b_1x+c_1x^2)+(a_2+b_2x+c_2x^2) = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2)x^2$$

$$r(a_1+b_1x+c_1x^2) = (ra_1)+(rb_1)x+(rc_1)x^2.$$

لتكن $M=\{a+bx+cx^2 : a+2b-c=1\}$.

هل ان $(M, \mathbb{R})$ فضاء جزئي من $(P_2(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ ؟

الاجابة: كلا

خذ المتجهات

$$A = a_1 + b_1 x + c_1 x^2$$
$$B = a_2 + b_2 x + c_2 x^2$$

في M

نلاحظ ان

$$\left.\begin{array}{l} A \in M \rightsquigarrow a_1 + 2b_1 - c_1 = 1 \\ B \in M \rightsquigarrow a_2 + 2b_2 - c_2 = 1 \end{array}\right\}$$ حسب تعريف "M"

لان

$$A + B = (a_1 + b_1 x + c_1 x^2) + (a_2 + b_2 x + c_2 x^2)$$
$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)x^2$$

وان

$$(a_1 + a_2) + 2(b_1 + b_2) - (c_1 + c_2) =$$
$$(a_1 + 2b_1 - c_1) + (a_2 + 2b_2 - c_2) = 1 + 1 = 2 \neq 1$$

كذلك $A + B \notin M$

ومنه لا يشكل $(M, \mathbb{R})$ فضاءاً جزئياً من $(P_2(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.

واجب:- تأمل الفضاء $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ مع عمليتي الجمع والضرب القياسي المعرفة كالآتي:

اي $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$r(x_1, y_1) = (rx_1, rx_2)$

لتكن $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x^3\}$

هل ان $(M, \mathbb{R})$ فضاءاً جزئياً من $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ؟

جبر الفضاءات الجزئية:-

اتحاد الفضاءات الجزئية :-

ليكن كل من M_1 و M_2 فضاءً "جزئياً" من الفضاء (V,F) . نعرف اتحاد الفضاءين كالآتي:

$M_1 \cup M_2 = \{A \in V : A \in M_1$ أو $A \in M_2\}$

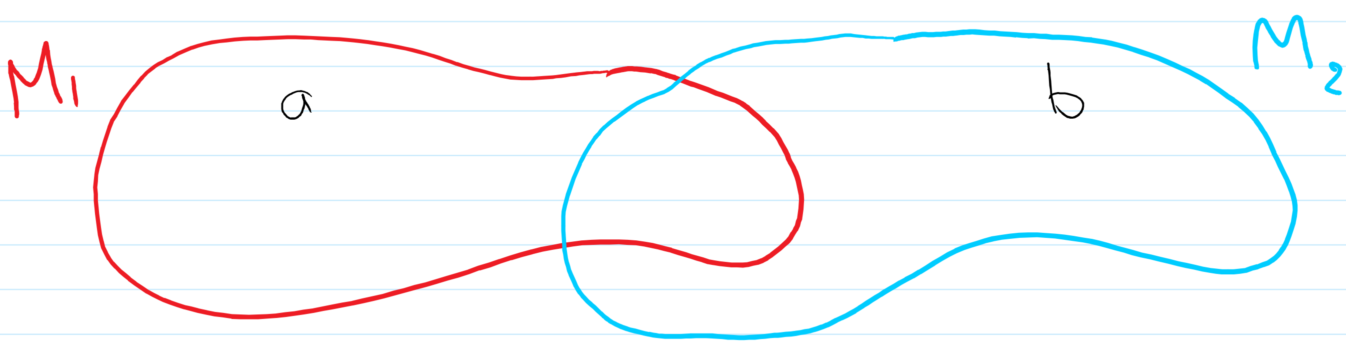
مبرهنة: $M_1 \cup M_2$ فضاء جزئي من $V \iff M_1 \subseteq M_2$ or $M_2 \subseteq M_1$

البرهان: الطرف الأيمن $\Leftarrow$ الطرف الأيسر

اذا لم يكن الطرف الايسر صحيح فان

$M_1 \not\subseteq M_2$ and $M_2 \not\subseteq M_1 \Rightarrow$

$\exists\, a \in M_1 - M_2$ and $b \in M_2 - M_1$



بما ان $M_1 \cup M_2$ فضاء جزئي وان $a,b \in M_1 \cup M_2$

$\Rightarrow a+b \in M_1 \cup M_2 \Rightarrow$

$a+b \in M_1$ or $a+b \in M_2$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$(\cancel{a}+b)-\cancel{a} \in M_1 \qquad (a+\cancel{b})-\cancel{b} \in M_2$

$$(\cancel{a}+b)-\cancel{a} \in M_1 \Downarrow b \in M_1$$

(تناقض)

$$(a+\cancel{b})-\cancel{b} \in M_2 \Downarrow a \in M_2$$

(تناقض)

عليه يجب ان يكون الطرف الايسر صحيحاً.

الطرف الايسر $\Leftarrow$ الطرف الايمن

اذا كان $M_1 \subseteq M_2$ فان

$M_1 \cup M_2 = M_2$ وهو فضاء جزئي من V.

اذا كان $M_2 \subseteq M_1$ فان

$M_1 \cup M_2 = M_1$ وهو فضاء جزئي من V.

• تقاطع الفضاءات الجزئية:

ليكن كل من M_1 و M_2 فضاءً "جزئياً" من فضاء المتجهات (V, F) نعرف تقاطع الفضائين

$$M_1 \cap M_2 = \{A \in V : A \in M_1 \text{ و } A \in M_2\}$$

برهنة: $M_1 \cap M_2$ يكون فضاء جزئي من

البرهان : لتكن $A, B \in M_1 \cap M_2$

وان $r \in F$. (V, F)

(1) $A, B \in M_1 \cap M_2 \Rightarrow$

$A, B \in M_1$ (فضاء جزئي) and $A, B \in M_2$ (فضاء جزئي)

$\Downarrow$ $\qquad\qquad$ $\Downarrow$

$A+B \in M_1$ $\qquad\qquad$ $A+B \in M_2$

$\therefore A+B \in M_1 \cap M_2$.

(2) $A \in M_1 \cap M_2 \;,\; r \in F \Rightarrow$

$A \in M_1$ (فضاء جزئي) and $A \in M_2$ (فضاء جزئي)

$\Downarrow$ $\qquad\qquad$ $\Downarrow$

$rA \in M_1$ $\qquad\qquad$ $rA \in M_2$

$\therefore rA \in M_1 \cap M_2$ ■

مثال : تأمل الفضاءين الجزئيين من $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

$M_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\}$ و

$M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 5x + y = 0\}$

جد $M_1 \cap M_2$.

الجواب :

Let $(x,y) \in M_1 \cap M_2 \Rightarrow$

$(x,y) \in M_1$ and $(x,y) \in M_2$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$x + 2y = 0$ — ① $5x + y = 0$

$\Downarrow$ $\Downarrow * 2$ بضرب

$10x + 2y = 0$ — ②

بطرح المعادلتين ① و ② نحصل على

$9x = 0 \rightsquigarrow x = 0 \rightsquigarrow y = 0$

$\therefore\; M_1 \cap M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y = 0\}$

$= \{(0,0)\}$.

واجب :- تأمل الفضائين الجزئيين من $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ المعرفين بالشكل

$M_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 3z = 0\}$

$M_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$

جد $M_1 \cap M_2$.

مثال : تأمل الفضائين الجزئيين من $(P_2(\mathbb{R}), \mathbb{R})$

$$M_1 = \{a+bx+cx^2 \in P_2(\mathbb{R}) : c=0\}$$
$$M_2 = \{a+bx+cx^2 \in P_2(\mathbb{R}) : a=0\}$$

جد $M_1 \cap M_2$.

الجواب: ليكن $a+bx+cx^2 \in M_1 \cap M_2$

عليه

$a+bx+cx^2 \in M_1$ and $a+bx+cx^2 \in M_2$

$\Downarrow$ $c=0$ $\Downarrow$ $a=0$

$$\therefore M_1 \cap M_2 = \{a+bx+cx^2 \in P_2(\mathbb{R}) : a=c=0\}$$
$$= \{bx \in P_2(\mathbb{R}) : b \in \mathbb{R}\}.$$

● جمع الفضاءات الجزئية:-

ليكن كل من M_1 , M_2 فضاءاً جزئياً من الفضاء (V,F) . يعرف جمع الفضاءين كالآتي:

$$M_1 + M_2 = \{A+B : A \in M_1, B \in M_2\}$$

مبرهنة: $M_1 + M_2$ فضاءاً جزئياً كون كل من M_1 , M_2 .

البرهان: ليكن $A, B \in M_1 + M_2$

وان $r \in F$.

(1) $A, B \in M_1 + M_2 \implies$

$$A = A_1 + A_2 \; ; \; A_1 \in M_1 , A_2 \in M_2$$

$$B = B_1 + B_2 \; ; \; B_1 \in M_1 , B_2 \in M_2$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$A+B = (A_1+B_1) + (A_2+B_2) \qquad A_1+B_1 \in M , A_2+B_2 \in M_2$$

(كون M_1 و M_2 فضاءين جزئيين)

$$\therefore A+B \in M_1 + M_2$$

(2) $A \in M_1 + M_2 \; ; r \in F \implies$

$$A = A_1 + A_2 \; ; \; A_1 \in M_1 , A_2 \in M_2$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$rA = rA_1 + rA_2 \qquad rA_1 \in M_1 , rA_2 \in M_2$$

(كون M_1 , M_2 فضائين جزئيين)

$$\therefore rA \in M_1 + M_2$$

بقي ان نثبت ان $M_1 \subseteq M_1 + M_2$

و $M_2 \subseteq M_1 + M_2$

let $A \in M_1 \implies A = A + 0 \; , \; 0 \in M_2$

$$\Downarrow$$

$$A \in M_1 + M_2$$

let $B \in M_2 \Rightarrow B = 0 + B \;,\; 0 \in M_1$

$$\Downarrow$$

$$B \in M_1 + M_2 \quad \blacksquare$$

مثال : تأمل الفضاءين الجزئيين

$M = \{(0, y, z, 0) \in \mathbb{R}^4 : y, z \in \mathbb{R}\}$

$N = \{(x, 0, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x, z, w \in \mathbb{R}\}$

في الفضاء $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$. جد $M + N$.

الجواب :

let $(x, y, z, w) \in M + N$

$\Rightarrow (x, y, z, w) = (x_1, y_1, z_1, w_1) + (x_2, y_2, z_2, w_2)$;

$(x_1, y_1, z_1, w_1) \in M$ and $(x_2, y_2, z_2, w_2) \in N$

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$x_1 = w_1 = 0 \qquad\qquad y_2 = 0$

$\therefore (x, y, z, w) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, w_1 + w_2)$

$= (x_2, y_1, z_1 + z_2, w_2)$

$\Rightarrow x = x_2$

$y = y_1$

$z = z_1 + z_2 \leadsto$ we can take $z_1 = z_2 = \frac{z}{2}$

$w = w_2$

$\therefore M + N = \{(x, y, z, w) : x, z, y, w \in \mathbb{R}\}$

لاحظ

$$(x,y,z,w) = \underset{\underset{M}{\in}}{(0,y,\tfrac{z}{2},0)} + \underset{\underset{N}{\in}}{(x,0,\tfrac{z}{2},w)}$$

◎ الجمع المباشر للفضاءات الجزئية:

يقال عن الفضاء (V,F) بأنه جمعاً "مباشراً" لفضائيه الجزئيين M, N ونكتب $V = M \oplus N$ اذا كان كل متجه $A \in V$ يمكن ان يكتب بطريقة واحدة وواحدة فقط بالشكل $A = A_1 + A_2$ حيث $A_1 \in M$ و $A_2 \in N$.

مبرهنة: $V = M \oplus N \Longleftrightarrow$

$M + N = V$ ①

$M \cap N = \{0\}$ ②

البرهان: الطرف الايمن $\Longrightarrow$ الطرف الايسر

بما انه كل متجه $A \in V$ يكتب بطريقة واحدة وواحدة فقط بالشكل $A = A_1 + A_2$ حيث $A_1 \in M$ و $A_2 \in M$

فان $M + N = V$

الآن لو كان $M \cap N \neq \{0\}$

هذا يعني وجود $A \neq 0$ بحيث $A \in M \cap N$

علية $A \in N$ and $A \in M$

$$A = 0 + A \in M + N \qquad A = A + 0 \in M + N$$

لان "$0 \in M$"   "$0 \in N$ لان"

ولكن هذا تناقض لان A كتب بطريقتين

ومنه يجب ان يكون $M \cap N = \{0\}$

الطرف الايسر $\Rightarrow$ الطرف الايمن

يكفي ان نبرهن $A \in V$ يمكن ان يكتب بطريقة واحدة

بالشكل $A = B + C \; ; B \in M, C \in N$.

لنفرض $A = B_2 + C_2$ و $A = B_1 + C_1$

$$B_2 \in M, C_2 \in N \qquad B_1 \in M, C_1 \in N$$

$$B_1 + C_1 = B_2 + C_2$$

$$\Downarrow$$

$$\underset{\substack{\cap \\ M}}{B_1 - B_2} = \underset{\substack{\cap \\ N}}{C_2 - C_1}$$

$B_1 - B_2 \, , \, C_2 - C_1 \in M \cap N = \{0\}$

$$B_1 - B_2 \, , \, C_2 - C_1 \in M \cap N = \{0\}$$

$$\Rightarrow B_1 - B_2 = 0 \quad \text{and} \quad C_2 - C_1 = 0$$

$$B_1 = B_2 \quad \text{and} \quad C_2 = C_1$$

$\therefore A$ يمكن ان يكتب بطريقة واحدة وواحدة

فقط بالشكل $A = B + C \; ; \; B \in M, C \in N$

$\therefore$ $$V = M \oplus N$$

"حسب تعريف الجمع المباشر"

مثال: تأمل الفضاءين الجزئيين من $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$

$$M = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2z - w = 0\}$$

$$N = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0\}$$

هل ان $\mathbb{R}^4 = M \oplus N$ ؟

الاجابة: كلا

يكفي أن نثبت ان $M \cap N \neq \{0\}$

ليكن $(x, y, z, w) \in M \cap N$

اذن $(x, y, z, w) \in M$ and $(x, y, z, w) \in N$

$\Downarrow$ $\quad\quad\quad\quad$ $\Downarrow$

$x + 2z - w = 0 \quad \text{—} (1) \qquad\qquad x + y + z + w = 0 \quad \text{—} (2)$

$$x + 2z - w = 0 \quad \text{—①} \qquad\qquad x + y + z + w = 0 \quad \text{—②}$$

$$x + y + z + w = 0$$

$$-y + z - 2w = 0 \qquad \text{بطرح ② , ①}$$

$$\Downarrow$$

$$y = z - 2w$$

$$x = -2z + w$$

$$\therefore M \cap N = \{(-2z+w,\ z-2w,\ z,\ w) : z, w \in \mathbb{R}\}$$

$$\neq \{(0,0,0,0)\}$$

واجب :- اذا كانت $M = \{(2x, x) : x \in \mathbb{R}\}$

$N = \{(y, y) : y \in \mathbb{R}\}$

فضائين جزئيين من الفضاء $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ،

برهن ان $\mathbb{R}^2 = M \oplus N$.

التركيب الخطي :-

ليكن (V, F) فضاء متجهات ، يسمى المتجه $A \in V$ بتركيب خطي من المتجهات $B_1, B_2, \ldots, B_k \in V$ اذا وجدت اعداد قياسية $x_1, x_2, \ldots, x_k \in F$ بحيث

$$A = x_1 B_1 + x_2 B_2 + \cdots + x_k B_k$$

مثال: تأمل المتجهين $B = (2,0,-1)$، $A = (1,5,0)$ في الفضاء $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. هل المتجه $(3,-5,-2)$ هو تركيب خطي من A ، B ؟

الجواب: - ليكن

$$(3,-5,-2) = x_1 A + x_2 B$$

$$\Rightarrow (3,-5,-2) = x_1 (1,5,0) + x_2 (2,0,-1)$$

$$= (x_1 + 2x_2, 5x_1, -x_2)$$

$$\Rightarrow x_1 + 2x_2 = 3 \rightsquigarrow (-1) + 2(2) = 3 \checkmark$$

$$5x_1 = -5 \rightsquigarrow \underline{x_1 = -1}$$

$$-x_2 = -2 \rightsquigarrow \underline{x_2 = 2}$$

عليه $(3,-5,-2)$ تركيب خطي من A ، B .

مثال: إذا كانت $C = 2 - x + x^3$ ، $B = x^2 - 3$ ، $A = 1 + x$ متجهات في الفضاء $(P_3(\mathbb{R}), \mathbb{R})$. هل أن المتجه $D = 1 - x + x^2$ تركيب خطي من A ، B ، C ؟

الجواب:

$$D = aA + bB + cC$$

نريد إيجاد a, b, c إن وجدت

$$1 - x + x^3 = a(1+x) + b(x^2 - 3) + c(2 - x + x^3)$$

نساوي معاملات قوى x لكلا الطرفين

$$a - 3b + 2c = 1 \rightsquigarrow (-2) - 3(0) + 2(1) = 0 \neq 1$$

$a - 3b + 2c = 1 \rightsquigarrow (-2) - 3(0) + 2(1) = 0 \neq 1$

$a - c = -1 \rightsquigarrow a = -2$ تناقض

$= 0$

$= 1$

عليه لا يمكن كتابة D كتركيب خطي من A, B, C .

الفضاء الجزئي المولد بمجموعة :-

لتكن $S = \{A_1, A_2, \dots\}$ مجموعة جزئية غير خالية من فضاء المتجهات (V, F) . يعرف الفضاء الجزئي المولد بالمجموعة S ويرمز له بالرمز $[S]$ كالآتي:

$$[S] = \{x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n ; x_i \in F, A_i \in S, n \in \mathbb{N}\}$$

مبرهنة: $[S]$ اصغر فضاء جزئي يحوي S .

البرهان: ليكن

$$\left.\begin{aligned} A &= x_1 A_1 + \dots + x_n A_n \\ B &= y_1 A_1 + \dots + y_m A_m \end{aligned}\right\} A_i \in S$$

متجهات في $[S]$ وان $r \in F$.

(1) $A + B = (x_1 A_1 + \dots + x_n A_n) + (y_1 A_1 + \dots + y_m A_m)$

$\therefore A + B \in [S]$

(2) $rA = r(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n)$

$= (r x_1) A_1 + \dots + (r x_n) A_n$

$\therefore A \in [S]$

الآن نثبت ان $S \subseteq [S]$

let $A \in S \Rightarrow A = 1.A \Rightarrow A \in [S]$.

اخيراً" نثبت ان $[S]$ اصغر فضاء جزئي يحوي S.

لنفرض ان W فضاء جزئي يحوي $S \Leftarrow S \subseteq W$

if $A \in [S] \Rightarrow A = x_1A_1 + \cdots + x_nA_n,\ A_i \in S$

$\Rightarrow A = x_1A_1 + \cdots + x_nA_n,\ A_i \in W$

$\Rightarrow A \in W$

$\therefore [S] \subseteq W$ $\blacksquare$

ملاحظة: اذا كانت المجموعة الجزئية S من فضاء المتجهات (V,F) تولد الفضاء V فان $V = [S]$.

مثال: بين ان المجموعة $S = \{(1,0),(0,1)\}$ تولد الفضاء $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

ينبغي ان نثبت $[S] = \mathbb{R}^2$

يكفي ان نبرهن انه $\mathbb{R}^2 \subseteq [S]$ لان $[S] \subseteq \mathbb{R}^2$

let $A = (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$(x,y) = a(1,0) + b(0,1)$$

$= (a,0) + (0,b) = (a,b)$

$\Rightarrow a = x$ and $b = y$

ومنه $A \in [S]$.

مثال : ماهو اصغر فضاء جزئي يحتوي المجموعة الجزئية $S = \{(x,y,z) : 2x - y + z = 0\}$ من فضاء المتجهات $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ ؟

من الواضح ان S بحد ذاتها فضاء جزئي يحوي S ولكن $[S]$ هو اصغر فضاء جزئي يحوي S

اذن $[S] \subseteq S \subseteq [S]$

اي ان $[S] = S$

بمعنى آخر S هو اصغر فضاء جزئي يحوي S.

مثال : اثبت ان مجموعة المتجهات $S = \{A = (1,2,0), B = (0,2,2)\}$ تولد الفضاء الجزئي $M = \{(x,y,z) : 2x - y + z = 0\}$ من الفضاء $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

الاجابة :- المطلوب اثباته هو $[S] = M$

لاحظ ان الفضاء M يحوي S

لان $A, B \in M$

$A = (1,2,0) \in M$ Since $2(1) - 2 + 0 = 0$ ✓

$B = (0,2,2) \in M$ Since $2(0) - 2 + 2 = 0$ ✓

لما كان $[S]$ هو اصغر فضاء جزئي يحوي S

$\therefore [S] \subseteq M$

بقي ان نثبت ان $M \subseteq [S]$

let $(x,y,z) \in M$ and

$$(x,y,z) = aA + bB$$

$$(x,y,z) = a(1,2,0) + b(0,2,2)$$

$$(x,y,z) = (a, 2a+2b, 2b)$$

$a = x$

$2b = z \rightsquigarrow b = \frac{z}{2}$

$2a+2b = y \rightsquigarrow 2x + \cancel{2}\frac{z}{\cancel{2}} = y$ ✓

(True since $2x - y + z = 0$
من تعريف M)

$\therefore (x,y,z) \in [S]$ ■

واجب :- في الفضاء $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

اذا كانت $S = \{(1,0,0),(0,2,0)\}$, $T = \{(0,3,-3)\}$

(أ) جد $[S]$, $[T]$

(ب) هل $(2,1,1) \in [T]$ ؟

(ج) جد $[S] \cap [T]$.