تحليل مسائل البرمجة الخطية

يتم تحليل مسائل البرمجة الخطية لتحديد قيم المتغيرات المطلوب أتخاذ القرار بشأنها X_j والتي تُعظم أو تُقلل قيمة دالة الهدف، أما بأستخدام الطريقة البيانية (طريقة الرسم) (Graphical Method) في حالة وجود متغيرين، أو بأستخدام الطريقة العامة (Simplex Method) عند وجود متغيرين أو أكثر(١).

اولاً : - الطريقة البيانية (الرسم البياني)

هذه الطريقة البيانية تعد وسيلة أولية لحل مشاكل البرمجة الخطية وتستخدم إذا كان النموذج او دالة الهدف تحتوي على متغيرين فقط يتم الحل وفق الرسم البياني وإذا كانت تحتوي على أكثر من متغيرين لا يمكن الحل بطريقة رسم البياني

خطوات الحل وفق الطريقة البيانية.

1- تحويل القيود من نوع أصغر او يساوي وأكبر ويساوي $\leq$ و $\geq$ الى نوع المساواة =

$5X_1 + 10X_2 = 20$	$5X_1 + 10X_2 \leq 20$
$6X_1 + 3X_2 = 10$	$6X_1 + 3X_2 \geq 10$

2- يتم تمثيل القيود بمستقيمات من خلال استخراج نقاط تقاطع لكل قيد (في معادلة القيد الاول) وكما يلي: -

- نعوض قيمة المتغير الاول بصفر (**0**) لاستخراج قيمة المتغير الثاني
- نعوض قيمة المتغير الثاني للصفر (**0**) لاستخراج قيمة المتغير الاول.

$5X_1 + 10X_2 \leq 20$	$X_1 = 0$ $X_2 = 20 \div 10 = 2$ (0,2) $X_1 = 20 \div 5 = 4$ $X_2 = 0$ (4,0)

ونكرر نفس العملية او الاجراءات المتبعة مع المعادلة الأول وذلك قد حصلنا على نقطة تقاطع لكل قيد.

3- اسقاط احداثيات او رسم محورين أحدهما افقي وليكن (X_1) والاخر عمودي وليكن (X_2) ووصلها بخط مستقيم

4- تحديد منطقة الحل الممكن.

5- تحديد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية من خلال تعويض احداثيات النقاط الواقعة على رؤوس منطقة الحل المقبول في دالة الهدف وهنا توجد حالتان: -

- إذا كانت دالة الهدف من نوع تعظيم الارباح Max فإن النقطة التي تعطي أكبر قيمة لدالة الهدف تمثل الحل الأمثل
- إذا كانت دالة الهدف من نوع تقليل التكلفة Min فإن احداثيات النقطة التي تعطي اقل قيمة لدالة الهدف تمثل الحل الامثل.

6- التحقق من الحل.

مثال[7]: ـ حل النموذج الرياضي الاتي بطريقة الرسم البياني لا يجاد منطقة الحل الامثل؟

$\text{Max } Z = 10X_1 + 12X_2$

S.t o

$6X_1 + 2X_2 \leq 36$

$3X_1 + 4X_2 \leq 36$

$X_1, X_2 \geq 0$

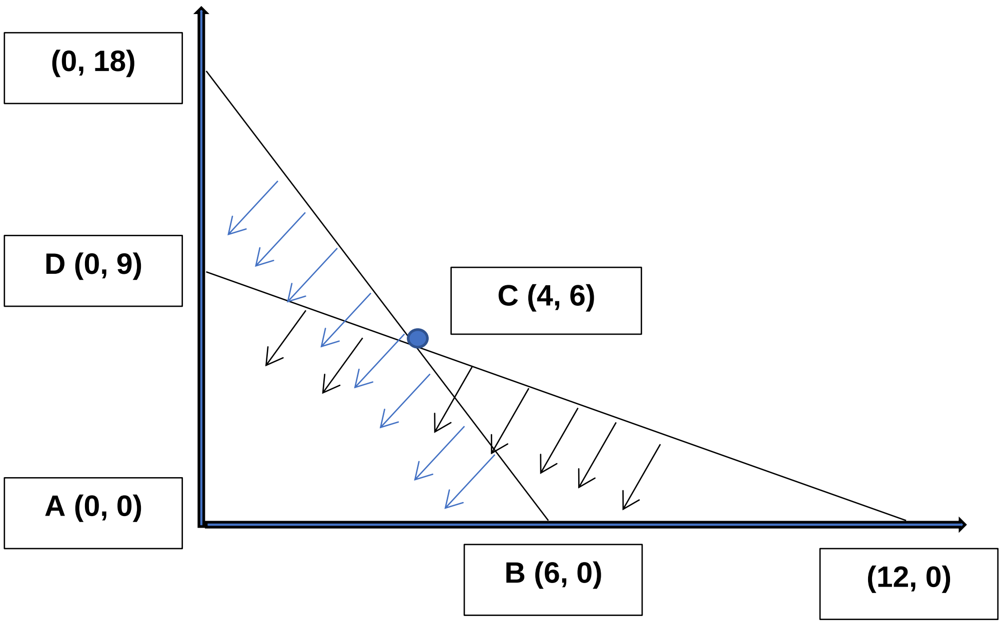
الحل / تحويل القيود الى معادلات

$6X_1 + 2X_2 = 36 \ldots \ldots \quad (1)$

$3X_1 + 4X_2 = 36 \ldots \ldots \quad (2)$

استخرج نقاط التقاطع لكل قيد ومن ثم تمثيل القيود برسم بخطوط مستقيمة

$6X_1 + 2X_2 = 36 \ldots \ldots \quad (1)$	$3X_1 + 4X_2 = 36 \ldots \ldots \quad (2)$
$X_1 = 0 \ldots X_2 = 36 \div 2 = 18 \ (0, 18)$	$X_1 = 0 \ldots X_2 = 36 \div 4 = 9 \ (0, 9)$
$X_2 = 0 \ldots X_1 = 36 \div 6 = 6 \ (6, 0)$	$X_2 = 0 \ldots X_1 = 36 \div 3 = 12 \ (12, 0)$



لا يجاد نقطة C نأخذ المعادلتين الاولى والثانية ونضرب القيد الاول في (2) حتى نحذف أحد المتغيرات ونستخرج قيمة المتغير الاخر يعني حل المعادلتين انياً وكما يلي:

$6X_1 + 2X_2 = 36 \ldots\ldots \quad (1) \quad (*2)$
$3X_1 + 4X_2 = 36 \ldots\ldots \quad (2)$
$12X_1 + 4X_2 = 72$
$3X_1 + 4X_2 = 36$ بالطرح
$9X_1 = 36 \; X_1 = 36 \div 9 = 4$

ثم نعوض قيمة X_1 بأي معادلة الأولى او الثانية لنحصل على قيمة X_2 لو عوضنا في المعادلة الثانية نحصل على

$3(4) + 4X_2 = 36$
$4X_2 = 36 - 12$
$24 \div 4 = 6 \; X_2$

أذن نقطة $C\ (X_1 = 4\ ,\ X_2 = 6)$ (4,6)
الان لدينا جميع احداثيات النقاط نعوض عن قيمة احداثيات النقطة في الدالة الهدف اي نجد قيمة الدالة الهدف في كل نقطة من نقاط منطقة الحل الامثل والتي تكون قريبة من نقطة الاصل.

A (0,0)	Max z = 10(0) + 12 (0) = 0
B (6,0)	Max z = 10(6) + 12 (0) =60
C (4,6)	Max z = 10(4) + 12 (6) = 112
D (0,9)	Max z = 10(0) + 12 (9) = 108

وحيث ان دالة الهدف تعظيم الربح فأننا نختار النقطة التي اعطتنا اعلى ربح وهي (4,6) ونعوض في القيدين فيجب ان تحقق تباين القيدين .

اي ان القرار يكون انتاج (4) وحدات من المنتج الاول و (6) وحدات من المنتج الثاني ليحقق ربح مقداره (112)

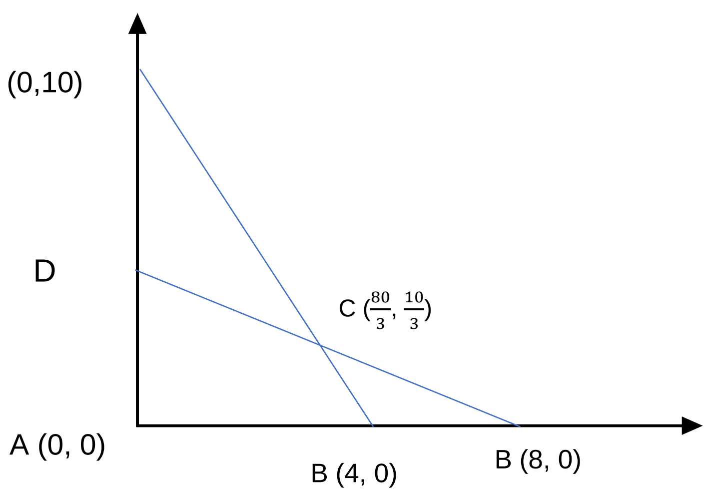
مثال / أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية الاتي بطريقة الرسم البياني؟

Max $Z = 10X_1 + 15X_2$
S.t o
$5X_1 + 8X_2 \leq 40$
$10X_1 + 4X_2 \leq 40$
$X_1, X_2 \geq 0$

الحل / تحويل القيود الى معادلات

$5X_1 + 8X_2 = 40$ … … 1
$10X_1 + 4X_2 = 40$ … .2

$5X_1 + 8X_2 = 40$ … … 1 $X_1 = 0$ …. $X_2 = 40 \div 8 = (0, 5)$ $X_2 = 0$ …. $X_1 = 40 \div 5 = 8\ (8, 0)$	$10X_1 + 4X_2 = 40$ … … .2 $X_1 = 0$ …. $X_2 = 40 \div 4 = 10\ (0, 10)$ $X_2 = 0$ …. $X_1 = 40 \div 10 = 4\ (4, 0)$



لإيجاد نقطة C نأخذ المعادلتين الاولى والثانية ونضرب القيد الاول * (2) حتى نحذف أحد المتغيرات ونستخرج قيمة المتغير الاخر يعني حل المعادلتين انياً وكما يلي: -

$$5X_1 + 8X_2 = 40 \quad (*\ 2)$$
$$10X_1 + 4X_2 = 40$$
$$10X_1 + 16X_2 = 80 \quad \text{بالطرح}$$
$$10X_1 + 4X_2 = 40$$
$$12X_2 = 40 \ \div 12 = \frac{10}{3}$$

ثم نعوض قيمة X_2 بأي معادلة الأولى او الثانية لنحصل على قيمة X_1 لو عوضنا في المعادلة الثانية نحصل:

$$10X_1 + 4\left(\frac{10}{3}\right) = 40$$

$$10X_1 = 40 - \frac{40}{3} = \frac{80}{3}$$

A (0,0)	Max z = 10(0) + 15 (0) = 0
B (4,0)	Max z = 10(4) + 15 (0) =40
C $\frac{80}{3}$ $\frac{10}{3}$	**Max z = 10($\frac{80}{3}$) + 15 ($\frac{10}{3}$) = $\frac{950}{3}$ (316.666667)**
D (0,5)	Max z = 10(0) + 15 (5) =75

اي ان القرار يكون انتاج ($\frac{80}{3}$) وحدات من المنتج الاول و ($\frac{10}{3}$) وحدات من المنتج الثاني ليحقق ربح مقداره ($\frac{950}{3}$) (316.666667)

مثال / حل النموذج البرمجة الخطية بطريقة الرسم البياني لإيجاد منطقة الحل الأمثل للنموذج الرياضي الاتي؟

$$\text{Min } Z = 5X_1 + 8X_2$$

$$20X_1 + 10X_2 \geq 100$$

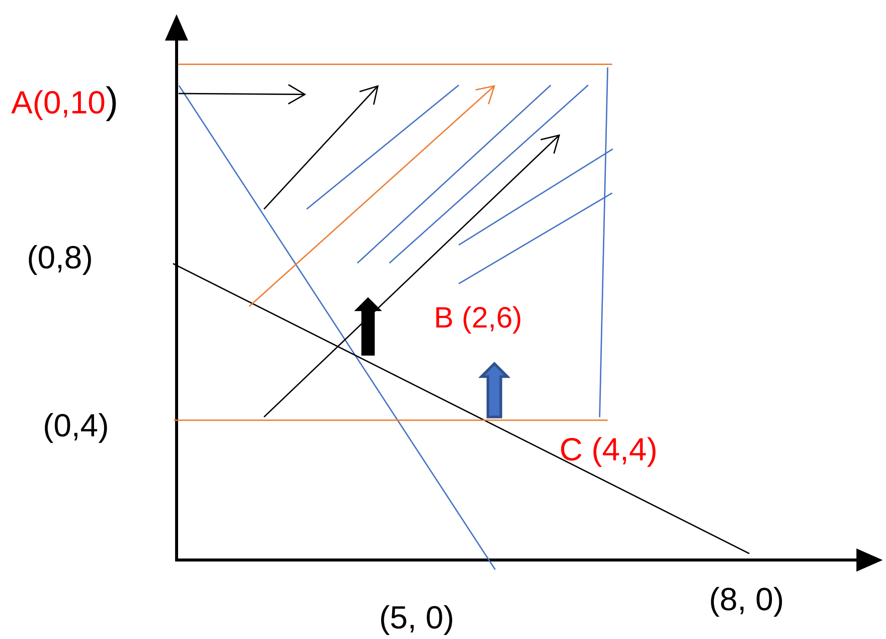
$$10X_1 + 10X_2 \geq 80$$

$$10X_2 \geq 40$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل / نحول المتباينات الى معادلات ونجد قيم المتغيرين

$20X_1 + 10X_2 = 100$	$X_1 = 0 \ldots\ldots X_2 = 100 \div 10 = 10 \quad (0,10)$ $X_2 = 0 \ldots\ldots X_1 = 100 \div 20 = 5 \; (5,0)$ القيد الاول
$10X_1 + 10X_2 = 80$	$X_1 = 0 \ldots\ldots X_2 = 80 \div 10 = 8 \quad (0,8)$ $X_2 = 0 \ldots\ldots X_1 = 80 \div 10 = 8 \; (8,0)$ القيد الثاني
$10X_2 = 40$	$X_1 = 0 \; X_2 = 40 \div 10 = (0,4)$ القيد الثالث $X_2 = 0 \quad X_1 = \; \infty(\infty, 0)$



نستخرج احداثيات نقطة B بأخذ معادلة القيد الاول والثاني ونحلها آنياً.

$20X_1 + 10X_2 = 100$

$10X_1 + 10X_2 = 80$ **بالطرح**

$10X_1 = 20 \div 10 = 2$

نعوض قيمة X_1 في المعادلة الثانية.

$10(2) + 10X_2 = 80$

$10X_2 = 80 - 20 = 60$

$X_2 = 60 \div 10 = 6 \; \ldots\ldots B\,(2,6)$

نستخرج احداثيات نقطة C بأخذ معادلة الثانية والثالثة وحلها آنيا.

$10X_1 + 10X_2 = 80$

$10X_2 = 40 \;\; -$

$10X_1 = 40$

$X_1 = 40 \div 10 = 4$

$X_2 = 4 \ldots\ldots C\,(4,4)$

A (0,10)	**Min z = 5(0) + 8 (10) = 80**
B (2,6)	**Min z = 5(2) + 8 (6) = 58**
C (4,4)	**Min z = 5(4) + 8 (4) = 52**

ومن خلال الجدول أعلاه يتضح ان نقطة C هي التي تمثل الحل الامثل التي حقق اقل تكاليف ممكنة بمقدار (52)

ملاحظة مهمه جداً جداً

عند تحديد منطقة الحل نعتمد على علامة القيد فإنه يتم العمل وفق الاتي

إذا كانت العلامة (≥) أكبر او يساوي تعني منطقة الحل على يمين او على الخط المستقيم (↑↑↑↑↑↑)

وإذا كانت العلامة (≤) اصغراو يساوي تعني منطقة الحل على يسار أو أسفل الخط المستقيم (↓↓↓↓↓)

مثال / حل النموذج الرياضي بطريقة الرسم البياني؟

Max $Z = 7X_1 + 7X_2$

S. to

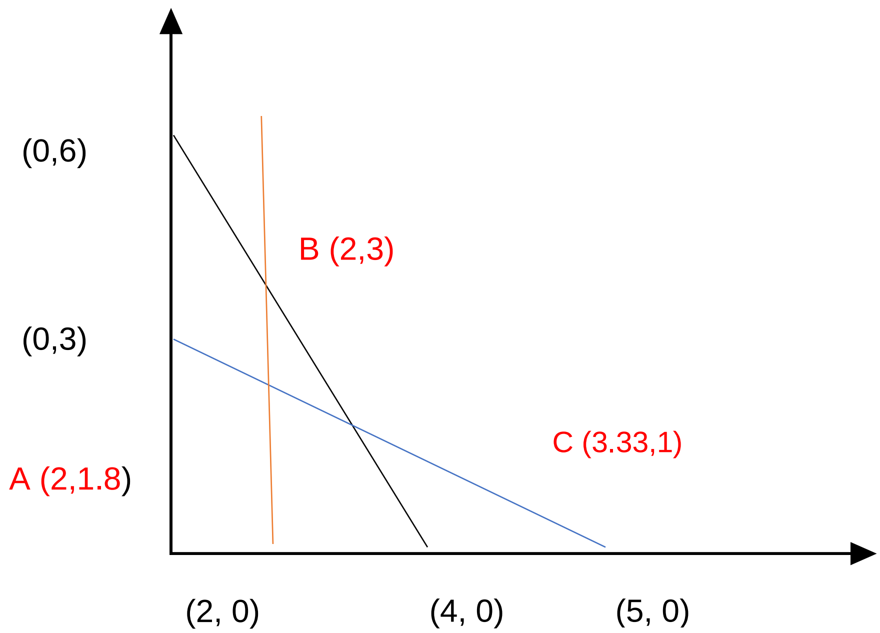
$3X_1 + 5X_2 \geq 15$

$6X_1 + 4X_2 \leq 24$

$1X_1 \geq 2$

$X_1, X_2 \geq 0$

$3X_1 + 5X_2 = 15$	$X_1 = 0 \;\ldots\; X_2 = 15 \div 5 = 3 \quad (0,3)$ $X_2 = 0 \;\ldots\; X_1 = 15 \div 3 = 5 \quad (5,0)$ القيد الاول
$6X_1 + 4X_2 = 24$	$X_1 = 0 \;\ldots\; X_2 = 24 \div 4 = 6 \quad (0,6)$ $X_2 = 0 \;\ldots\; X_1 = 24 \div 6 = 4 \quad (4,0)$ القيد الثاني
$1X_1 = 2$	$X_1 = 2 \div 1 = \quad (2,0)$ القيد الثالث



نستخرج احداثيات النقاط (A, B، C)

نستخرج نقطة A من خلال تقاطع القيد الاول مع القيد الثالث نقوم بظرب القيد الثالث (* 3) بعد عملية ظرب نطرح القيد الاول من الثالث

$3X_1 + 5X_2 = 15$

$X_1 = 2 \; (* 3)$

$3X_1 + 5X_2 = 15$

$3X_1 = 6$

$5X_2 = 9 \div 5 = \frac{9}{5} \quad 1.8$

$X_1 = 6 \div 3 = 2$	(2, 1.8) = A النقطة .

نستخرج النقطة B من خلال تقاطع القيد الثاني مع الثالث نقوم بظرب القيد الثالث (6*) من ثم نطرح القيد الثاني من الثالث

$6X_1 + 4X_2 = 24$	$6X_1 + 4X_2 = 24$
$X_1 = 2$ (*6)	$6X_1 =$ 12 -
	$4X_2 = 12 \div 4 = 3$
	(2, 3) = B نقطة

نستخرج النقطة C من خلال تقاطع القيد الاول مع الثاني نقوم بضرب القيد الاول (2*) من ثم نطرح القيد الاول من القيد الثاني.

$3X_1 + 5X_2 = 15 (2*)$
$6X_1 + 10X_2 = 30$
$6X_1 + 4X_2 = 24$
$6X_2 = 6 \div 6 = 1$
$3X_1 + 5(1) = 15$
$3X_1 = 15 - 5 = 10$

$X_1 = 10 \div 3 = \frac{10}{3}$ $X_1 = 3.33$	(3.33, 1) = C نقطة
A (2,1.8)	MAX z = 7(2) + 7 (1.8) =26.6
B (2,3)	**MAX z =7 (2) + 7 (3) = 35**
C (3.33,1)	MAX z =7 (3.33) + 7 (1) =30. 31

وبما أن الدالة الهدف من نوع تعظيم الارباح MAX فأن احداثيات (B) هي الحل الأمثل لأنها حققت أكبر قيمة لدالة الهدف وبذلك يكون

$(35) = Z$

$(2) = X_1$

$(3) = X_2$