الفصل الاول:

مدخل الى الاساليب الكمية

مفهوم الأساليب الكمية

هي مجموعة من الادوات Tools والطرق Methods التي تستخدم من قبل متخذ القرار لمعالجة مشكلة معينة أو لترشيد القرار المالي او الإداري أو الاقتصادي أو غيرها، ويفترض في هذه الحالة توافر القدر الكافي من البيانات المتعلقة بالمشكلة.

وقد عرفها البعض بأنها تلك النماذج الرياضية أو الكمية التي من خلالها يتم استيعاب كافة مفردات المشكلة والتعبير عنها بالاعتماد على العلاقات الرياضية (معادلات أو متباينات) كخطوة أولى نحو معالجاتها وحلها. ويتم تدعيم النماذج ألرياضية بالبيانات اللازمة التي يتصف البعض منها في كونها من الثوابت والبعض الاخر من المتغيرات بما يتناسب وطبيعة المشكلة المدروسة.

تتصف هذه الأساليب بأن بعضها ذات طابع أو صفة احتمالية والبعض الاخر يتصف في كونه ثابت أو ساكن والبعض الآخر يتصف في كونه متغير بشكل مستمر حسب طبيعة العمل الزمني.

وتعرف الأساليب الكمية: على انها مجموعة من الطرق المستخدمة في إعداد المعلومات بشكل يعطي الإدارة الفرصة لاتخاذ القرارات المناسبة في والوقت المناسب.

او بمعنى اخر تعرف على انها مجموعة من الطرق والأساليب التي تساعد في اتخاذ القرارات في مجالات متنوعة بهدف تحقيق الاستخدام الأمثل للموارد تفادياً لضياع الإمكانات من جهة ولتحقيق اقصى عائد مادي ممكن من الاستثمارات من جهة أخرى

اي ان الأساليب الكمية هي استخدام الأساليب والطرق الرياضية والعلمية لتنظيم تعاون العمليات والأنشطة ضمن نظام ما بغية إيجاد حل أمثل او مجموعة حلول مثلى لمشكلات هذا النظام من بين جملة من الحلول الممكنة.

وانطلاقاً مما سبق نجد إن المشكلة المراد حلها إدارياً يجب أن يعبر عنها بعلاقات رياضية أو إحصائية أو شبكية أو بيانية ندعو هذه العملية بعملية المحاكاة وندعو مجموعة العلاقات الرياضية التي تعبر بشكل كامل عن المشكلة المراد حلها واتخاذ القرار بها بالنموذج الرياضي.

ان الاساليب الكمية تقدم نموذجاً لمعالجة مشكلة ما يمكن بموجبه القياس والمقارنة والتنبؤ لتقييم بدائل متاحة لمتخذ القرار يتم على أساسها اختيار أفضل البدائل لتحقيق أفضل الحلول للمشكلة. لذلك فالأساليب الكمية تساعد متخذ القرار على اتخاذ القرارات السليمة.

أهمية الأساليب الكمية

1- حل المشكلات المالية والإدارة التي تعجز عن حلها الأساليب الأخرى
2- تساهم في تقريب المشكلة الى الواقع من خلال صيغ علمية مبسطة ونماذج رياضية متنوعة
3- تعرض النتائج التي قدمتها العمليات الرياضية والصيغ العلمية بدقة عالية
4- تعرض البدائل المتاحة التي يمكن استخدامها لتحقيق الاستخدام الأمثل للموارد وتقليل الهدر
5- تطبيق الطريقة العلمية بالاستعانة بالطرق الكمية لحل مشاكل اتخاذ القرارات المالية والإدارية التي تم تحديدها مسبقاً بواسطة الأساليب الكمية

مزايا استخدام الأساليب الكمية

1- تساعد الأساليب الكمية في تبسيط الكثير من المشكلات المعقدة وتنظيمها بشكل علمي مدروس
2- تقلل الأساليب الكمية من احتمالات الوقوع بالخطأ
3- تساعد الأساليب الكمية في تطوير النماذج الرياضية المستخدمة لمعالجة المشكلات المالية والإدارة والاقتصادية
4- تعطي الأساليب الكمية رؤيا واضحة للمشكلة امام متخذي وصناع القرار وبالتالي تسهل من عملية إيجاد والحلول المناسبة والأكثر موضوعية
5- سهولة تطبيق الأساليب الكمية وخصوصاً في الآونة الأخيرة بعد التطور السريع الحاصل في استخدام الحاسبات الالكترونية

البرمجة الخطية

مجموعة متغيرات وثوابت مرتبطة مع بعضها البعض بالعلامات الجبرية الأربعة.

وتلعب البرمجة الخطية دوراً مهماً في معالجةِ المشاكل المُؤدية لتعظيم دور الأهداف أو تصغيرها في مجال ما بالاعتماد على ما يتوفر من قيود مفروضةٍ على عددٍ من المُتغيرات الدّالة، كما يُمكننا وصفها على أنّها أسلوبٌ في غايةِ الأهميةِ لِدعم مُتخذ القرار وتمكينه من اتخاذ القرار الأمثل والصحيح بالاستناد إلى الطرق العلمية.

الافتراضات الأساسية للبرمجة الخطية

1- ان يكون هناك هدف مطلوب تحقيق (مثلاً تحقيق اقصى ربح أو تخفيض التكاليف الى أدنى حد ممكن)
2- ان تكون هنالك بدائل مختلفة للوصول الى الهدف أو طرق مختلفة لاستغلال الموارد المتاحة والمحدودة.
3- ان تكون الموارد المستخدمة محدودة لأن طريقة البرمجة الخطية تتمثل في كونها طريقة عملية تهدف الى استخدام الموارد المحدودة أفضل استخدام لتحقيق هدف معين.
4- يجب ان تكون هناك علاقة بين المتغيرات اي توفر عنصر التأكد وغياب الاحتمالات.
5- التعبير عن دالة الهدف والقيود بمعدلات أو متباينات خطية.
6- ان يعبر النموذج الخطي عن المشكلة قيد الدراسة وليس العكس بأن تصاغ المشكلة لتناسب النموذج المعد مسبقاً.

عناصر او مكونات نموذج البرمجة الخطية

1- المتغير الهدف

ويرمز للمتغير الهدف Z ويكون هو المتغير التابع في النموذج والذي تهدف من خلاله الى تحدد الهدفين الآتيين

- اما اقصى قيمة له، وتسمى Max (تعظيم الربح)
- او تحقيق أدنى قيمة له، وتسمى Min (تخفيض التكاليف)

2- متغيرات النموذج

ونعني بها المتغيرات المستقلة التي تؤثر في متغير الهدف التابع علماً انه يجب من البداهة ان يكون: -

عدد متغيرات النموذج (عدد المتغيرات في دوال القيود) = عدد المتغيرات في دالة الهدف

3- دالة الهدف

حيث ان: -

- Z تمثل المتغير التابع ويمثل المتغير الهدف في النموذج
- Xj تمثل المتغيرات المستقلة في دالة الهدف
- ai معاملات المتغيرات المستقلة تحددها في دالة الهدف تباعاً

4- دوال القيود الخاضعة (S.t)Subject to لها دالة الهدف

علماً انه توجد هناك ثلاث انواع من القيود بشكل عام

- قيد من نوع أكبر أو يساوي $\geq$
- قيد متباينة نوع أصغر أو يساوي $\leq$
- قيد من نوع معادلة أو مساواة $=$

والقيود الخاصة لها دالة الهدف هي عبارة عن معادلات او متباينات

5- الموارد المتاحة

يعبر عنها بعدد ثابت يقع عن اليمين ($i=1,2,3\ldots m$) حيث ان ($bi..bm$) تمثل عدد القيود الخاضعة لها دالة الهدف

6- قيد عدم سالبية

المتغيرات في النموذج وهذا يعني انه لا يمكن بأية حال من الاحوال ان نقبل بان تكون قيمة أحد المتغيرات في النموذج سالبة اطلاقاً وأنها يمكن ان يكون موجبة أو صفر ويكتب هذا القيد في نهاية النموذج.

عناصر نموذج البرمجة الخطية

① المتغير الهدف (المتغير التابع z)

- نوع المتغير الهدف

max (الاستقصاء)

min (الاستدناء)

② متغيرات النموذج (المتغيرات المستقلة aX's)

X_j تمثل المتغيرات المستقلة

ai تمثل معاملات المتغيرات المستقلة (اعداد ثابتة)

③ دالة الهدف

④ دوال القيود الخاضعة لها دالة الهدف

- نوع دوال القيود

أ - قيد من نوع اكبر او يساوي $\geqslant$

ب - قيد متباينة اصغر من او يساوي $\leqslant$

ج - قيد من نوع معادلة او مساواة =

⑤ المحددات الموارد المتاحة (اعداد ثابتة) b

⑥ قيد عدم سالبية

مثال على نموذج البرمجة الخطية

③ دالة الهدف

① المتغير الهدف		② متغيرات النموذج
$\min z$	=	$5X_1 + 7X_2 + 11X_3$

S.t.

④ دوال القيود

② متغيرات النموذج		⑤ المحددات b
$4X_1 + 3X_2 + 2X_3$	$\geqslant$	50
$X_1 + 5X_2 + 6X_3$	$\leqslant$	70
$6X_1 + 4X_3$	=	90

⑥ قيد عدم سالبية $X_1, X_2, X_3 \geqslant 0$

عدد متغيرات النموذج في دوال القيود = عدد المتغيرات في دالة الهدف X_1, X_2, X_3

امثلة لصياغة المشاكل باستخدام نماذج البرمجة الخطية

مثال1: - تقوم احدى الشركات بوضع خطة لاستيراد ثلاثة أنواع من السلع لغرض تسويقها في السوق المحلية وان نفقات الشراء والنفقات الأخرى موضحة ادناه في الجدول: -

النفقات	المبالغ بآلاف الدنانير للسلعة			المبالغ المُخصصة للسلعة
	الأولى	الثانية	الثالثة	
نفقات التسويق	2	2	1	مساوية لـ 400000 دينار
نفقات إدارية	2	1	2	على الأقل مساوية لـ300000 دينار
نفقات متنوعة	4	2	2	على الأكثر مساوية لـ100000 دينار
سعر الشراء	5	4	6	

المطلوب: تحديد الحجم الأمثل للاستيراد والذي يحقق أقل كلفة مُمكنة.

الحل: لصياغة النموذج الخطي يجب وضع الفرضيات الآتية:

نفرض X_1 يُمثل عدد الوحدات التي سيتم استيرادها من السلعة الأول حيثُ $X_1 \geq 0$

نفرض X_2 يُمثل عدد الوحدات التي سيتم استيرادها من السلعة الثاني حيثُ $X_2 \geq 0$

نفرض X_3 يُمثل عدد الوحدات التي سيتم استيرادها من السلعة الثالثة حيثُ $X_3 \geq 0$

Min. $X_0 = 5X_1 + 4X_2 + 6X_3$ (دالة الهدف)

Sub. to

(القيود الهيكلية)

$2X_1 + 2X_2 + X_3 = 400000$ ..... قيد نفقات التسويق

$2X_1 + X_2 + 2X_3 \geq 300000$ ..... قيد النفقات الأدارية

$4X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq 100000$ ..... قيد نفقات متنوعة

$X_1 \geq 0 , X_2 \geq 0 , X_3 \geq 0$ ..... قيد عدم السلبية

مثال2: - ينتج مصنع فاين للمناديل الورقية ثلاثة نماذج (I,II,III) من المناديل باستخدام نوعين من المواد الخام A,B علما بان الكميات المتاحة من كل نوع 12000و15500 وحدة من المادة A,B على التوالي والجدول التالي يوضح الكميات المطلوبة من كل نوع من الخامات لإنتاج المنتجات الثلاثة.

إذا كان الوقت المطلوب لكل وحدة من النموذج الأول هو ضعف الوقت المطلوب لوحدة من النموذج الثاني وثلاثة أمثال الوقت المطلوب لوحدة من النموذج الثالث

المواد الخام	المتطلبات لكل وحدة من أنواع النماذج الثلاث			ما مُتاح من كل نوع من الماده الخام
	I	II	III	
A	7	3	5	12000
B	4	2	7	15500

إن الطاقة التشغيلية للمعمل تستطيع أن تنتج ما يكافيء 700 وحدة من النموذج الأول، ولقد أشارت دراسة السوق لمحافظات العراق إلى أن الحد الأدنى المطلوب من كل نوع هو 200 و 200 و 150 وحدة على التوالي، فإذا كان ربح الوحدة الواحدة من الأنواع الثلاث على التوالي هي 3 و 2 و 6 ألف دينار. المطلوب كتابة المسألة أعلاه بصيغة برمجة خطية لتحديد عدد الوحدات المصنعة من كل نموذج بحيث تحصل الشركة على أعظم ربح مُمكن.

الحل: لصياغة النموذج الرياضي يجب إعادة تنظيم المعلومات التي بحوزتِنا وفق الجدول التالي ووضع الفرضيات الآتية:

المواد الخام	المتطلبات لكل وحدة من أنواع النماذج الثلاث			ما مُتاح من كل نوع من الماده الخام
	I	II	III	
A	7	3	5	12000
B	4	2	7	15500
ربح الوحدة الواحدة (بالآلاف)	3	2	6	
الحد الأدنى المطلوب من كل نوع	200	200	150	

نفرض X_1 يُمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتج الأول I حيثُ $X_1 \geq 0$

نفرض X_2 يُمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتج الثاني II حيثُ $X_2 \geq 0$

نفرض X_3 يُمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتج الثالث III حيثُ $X_3 \geq 0$

Max. $X_0 = 3X_1 + 2X_2 + 6X_3$ (دالة الهدف)

Sub. to

قيد المادة الخام من نوع A ..... $7X_1 + 3X_2 + 5X_3 \leq 12000$

قيد المادة الخام من نوع B ..... $4X_1 + 2X_2 + 7X_3 \leq 15500$

قيد الطاقة التشغيلية للمعمل ..... $X_1 + 0.5X_2 + (1/3)X_3 \leq 700$

قيود متطلبات السوق من المنتجات (وهو نفسه قيد عدم السالبية)

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \geq 200 \\ X_2 \geq 200 \\ X_3 \geq 150 \end{array}\right\} \text{-----}$$

مثال3: ـ تنتج شركة جوتن أربع منتجات حديثة من خلال استخدام نوعين من المكائن، الوقت المطلوب لكل وحدة منتجة مقدراً بالساعة على الماكنة الأولى هو (2, 3, 4, 2) والوقت على الماكنة الثانية هو (3, 2 , 1, 2).

إذا علمت ان الكلفة الكلية لإنتاج كل وحدة معتمد على التكاليف المباشرة لوقت الماكنة، وان كلفة الساعة الواحدة للماكينة الأولى والثانية تساوي 10 و15 ألف دينار على التوالي وان عدد الساعات الكلي المخصص للمنتجات الأربعة على الماكنتين يساوي 500 و380 ساعة، اما سعر البيع للوحدة الواحدة فهو على الترتيب:

80 , 70 , 55, 45 ألف دينار

المطلوب: صياغة المسألة بصورة برمجة خطية لتعظيم الربح الصافي من بيع المنتجات الأربعة.

الحل: في البداية يتم وضع الفرضيات الخاصة بالمسألة وهي:

نفرض إن X_1 يُمثل عدد الوحدات المُنتجة من المُنتج 1 حيثُ $X_1 \geq 0$.

و X_2 يُمثل عدد الوحدات المُنتجة من المُنتج 2 حيثُ $X_2 \geq 0$.

و X_3 يُمثل عدد الوحدات المُنتجة من المُنتج 3 حيثُ $X_3 \geq 0$.

و X_4 يُمثل عدد الوحدات المُنتجة من المُنتج 4 حيثُ $X_4 \geq 0$.

هامش الربح لكل وحدة من المنتجات الأربعة = سعر البيع – تكاليف الإنتاج

$X_1 = 80 - (2(10) + 3(15)) = 15$

$X_2 = 70 - (3(10) + 2(15)) = 10$

$X_3 = 55 - (4(10) + 1(15)) = 0$

$X_4 = 45 - (2(10) + 2(15)) = -5$

بهذا يُمكن صياغة دالة الهدف (دالة تعظيم للربح الصافي) وقيود المسألة بالصيغة الآتية:

Max. $X_0 = 15X_1 + 10X_2 + 0X_3 - 5X_4$

Sub. to

قيد عدد الساعات المُخصصة على الماكنة الأولى $2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + 2X_4 \leq 500$

قيد عدد الساعات المُخصصة على الماكنة الثانية $3X_1 + 2X_2 + X_3 + 2X_4 \leq 380$

قيد عدم السلبية $X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

مثال4: - ترغب شركة الجلود العراقية في انتاج نوعين من الحقائب النسائية، وبسعر منافس للأنواع المماثلة في السوق وبعد دراسة لمراحل انتاج هذه الحقائب اتضح ان انتاج الحقيبة الواحدة يتطلب المراحل الاتية: -

١. قص وصبغ الجلود.
٢. الخياطة.
٣. التشطيبات (إضافة سحاب، الإقفال، إلخ...).
٤. الفحص والتغليف.

كما تمكنت الشركة من الحصول على المعلومات المعطاة في الجدول إدناه عن الوقت اللازم بالساعة لانتاج كل نوع في كل مرحلة والطاقة الانتاجية المتوفرة في الشركة محسوبة بالساعة أيضاً:

نوع العملية / نوع الحقيبة	القص والصبغ	الخياطة	التشطيب	الفحص
حقيبة عادية	5	1.25	1	1.4
حقيبة ممتازة	3	2.5	1.5	1
الطاقة الإنتاجية المتوفرة	لا تقل عن 525	لا تزيد عن 600	لا تزيد عن 585	لا تزيد عن 315

وبدراسة مواصفات وتكاليف الحقائب المطلوب انتاجها قررت ادارة المحاسبة أن يكون الربح للحقيبة العادية 10 ألاف دينار وللحقيبة الممتازة 9 ألاف دينار .

المطلوب: كم يجب أن تنتج الشركة من كل نوع بحيث يحقق أقصى ربح ممكن.

الحل: إعداد النموذج الرياضي (الفرضيات):

نفرض إن X_1 يُمثل عدد الوحدات المنتجة من الحقيبة العادية حيثُ $X_1 \geq 0$

نفرض إن X_2 يُمثل عدد الوحدات المنتجة من للحقيبة الممتازة حيثُ $X_2 \geq 0$

دالة الهدف: تهدف الشركة إلى تحقيق متطلبات السوق لتحقيق أقصى ربح ممكن، حيثُ يُمكن صياغة دالة الهدف بالاعتماد على المعادلة التالية علماً إن ربح الشركة سوف يأتي من مصدرين:

ربح من انتاج X_1 من الحقائب العادية = $10\ X_1$

ربح من انتاج X_2 من الحقائب الممتازة = $9\ X_2$

$$\text{Max. } Z = 10\ X_1 + 9\ X_2$$

النموذج الرياضي: يتكون النموذج من 4 قيود هي:

١. قيد الطاقة الانتاجية لعملية القص والصبغ لا تقل عن 525 ساعة:

$$5\ X_1 + 3\ X_2 \geq 525$$

٢. قيد الطاقة الانتاجية لعملية الخياطة لا تزيد عن 600 ساعة:

$$1.25\ X_1 + 2.5\ X_2 \leq 600$$

٣. قيد الطاقة الانتاجية لعملية التشطيب لا تزيد عن 585 ساعة:

$$X_1 + 1.5\ X_2 \leq 585$$

٤. قيد الطاقة الانتاجية لعملية الفحص لا تزيد عن 315 ساعة:

$$1.4\ X_1 + X_2 \leq 315$$

يُمكن الآن كتابة النموذج الرياضي بصيغته النهائية على النحو الآتي:

$$\text{Max. } Z = 10X_1 + 9X_2$$

Sub. to

$$5X_1 + 3X_2 \geq 525 \quad ...(1)$$

$$1.25X_1 + 2.5X_2 \leq 600 \quad ...(2)$$

$$X_1 + 1.5X_2 \leq 585 \quad ...(3)$$

$$1.4X_1 + X_2 \leq 315 \quad ...(4)$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

اشكال نماذج البرمجة الخطية والصيغة الرياضية

لنماذج البرمجة الخطية ثلاثة انواع او ثلاثة اشكال وكل شكل له صيغة رياضية تعبر عنها وتتمثل رياضياً وتعرف باسمة ايضاً هذه الاشكال هي: -

اولاً: الشكل العام.

ثانياً: الشكل الاعتيادي او القانوني.

ثالثاً: الشكل المعياري او القياسي.

اولاً: الشكل العام

تتميز هذه الصيغة بما يلي: -

1- يمكن ان تكون دالة الهدف من أحد النوعين اما ان تكون من نوع تعظيم الارباح او تقليل التكلفة

2- يمكن ان تكون القيود الخاضعة لها دالة الهدف أحد الانواع او جميعها ($\leq = \geq$)

3- في حالة القيد معادلة يمكن ان يكون الطرف الايمن لبعض القيود سالباً.

4- تبقى قيود عدم سالبيه المتغيرات في النموذج متحقق.

صيغة الشكل العام لها ستكون بالشكل الاتي: -

دالة الهدف / الشكل العام (الصيغة العامة)

$$\max_{\min} Z = a_1X_1 + a_2X_2 \ldots\ldots + a_nX_n$$

دوال القيود / الشكل العام (الصيغة العامة)

S.t.

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \ldots\ldots + a_{1n}X_n \ldots\ldots (\geq = \leq)\ b_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \ldots\ldots + a_{2n}X_n \ldots\ldots (\geq = \leq)\ b_2$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 \ldots\ldots + a_{mn}X_n \ldots\ldots (\geq = \leq)\ b_m$$

قيد عدم السالبية المتغيرات في النموذج / الشكل العام (الصيغة العامة)

$$X_{ij} \geq 0 \ ; \ \& \quad \begin{matrix} i=1,2,3....m \\ j=1,2,3....n \end{matrix}$$

ثانياً: الشكل الاعتيادي او القانوني

وتتميز هذه الطريقة بالآتي: -

1- يجب ان تكون دالة الهدف من نوع تعظيم الارباح فقط (max) اما إذا جاء في السؤال تقليل التكلفة (min) نقوم بضرب الدالة بسالب واحد (1 -).
2- ان تكون جميع القيود الخاضعة له دالة الهدف هي من نوع اقل او يساوي ≤
3- إذا جاء القيد من النوع أكبر او يساوي ≥ نقوم بضرب القيد في (1-)

4- إذا جاء القيد من النوع المساواة تقوم بتحويل قيد المساواة الى قيدين **القيد الاول** من نوع أصغر او يساوي ≤ اما **القيد الثاني** يحول الى أكبر او يساوي ≥ ومن ثم يضرب هذا القيد في (1-) ثم يصبح هذا القيد من النوع أصغر او يساوي ≤ .

5- يجب تحقيق قيد عدم سالبيه المتغيرات في النموذج

الصيغة القانونية ستكون بالشكل الاتي: -

دالة الهدف / الشكل الاعتيادي او القانوني الصيغة الاعتيادية او القانونية

$$\overset{max}{Z} = a_1X_1 + a_2X_2 \ \ldots\ldots + a_nX_n$$

دوال القيود / الشكل الاعتيادي او القانوني / الصيغة الاعتيادية او القانونية

S.t.

$$\begin{aligned}
a_{11}X_1 &+ a_{12}X_2 \ \ldots\ldots + a_{1n}X_n \ \ldots\ldots \ (\leq)\ b_1 \\
a_{21}X_1 &+ a_{22}X_2 \ \ldots\ldots + a_{2n}X_n \ \ldots\ldots \ (\leq)\ b_2 \\
&\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
a_{m1}X_1 &+ a_{m2}X_2 \ \ldots\ldots + a_{mn}X_n \ \ldots\ldots \ (\leq)\ b_m
\end{aligned}$$

قيد عدم السالبية المتغيرات في النموذج / الشكل الاعتيادي او القانوني / الصيغة الاعتيادية او القانونية

$$X_{ij} \geq 0 \ ; \ \& \quad \begin{matrix} i = 1,2,3....m \\ j = 1,2,3....n \end{matrix}$$

مثال 5: - حول مشكلة البرمجة الخطية التالية الى الصيغة القانونية

Min. $Z = 3X_1 - 3X_2 + 7X_3$

Sub. to

$$X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 50$$

$$5X_1 + 3X_2 = 20$$

$$|5X_1 + 8X_3| \leq 100$$

$X_1, X_2 \geq 0$, X_3 Unrestricted in sign

الحل: يجب تحويل الـ(L.P.P.) إلى الصيغة القانونية باستخدام عمليات التحويل الأولية الآتية:

$\because X_3$ *Unrestricted in Sign*

$\therefore$ *let* $X_3 = (\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}}_3)$ *Where* $\bar{X}_3 , \bar{\bar{X}}_3 \geq 0$

Min. $Z = 3X_1 - 3X_2 + 7X_3$ $\xrightarrow{\times(-1)}$ Max. W = Max. $(-Z)$

Where $W = -Z = -3X_1 + 3X_2 - 7(\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}}_3)$

Sub. to

$X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 50$ $\xrightarrow{\times(-1)}$ $-X_1 - X_2 - 3(\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}}_3) \leq -50$

$5X_1 + 3X_2 = 20$ $\longrightarrow$ $5X_1 + 3X_2 \leq 20$; $-5X_1 - 3X_2 \leq -20$

$|5X_1 + 8X_3| \leq 100$ $\longrightarrow$ $5X_1 + 8(\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}}_3) \leq 100$; $-5X_1 - 8(\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}}_3) \leq 100$

$X_1, X_2 \geq 0$, X_3 Unrestricted in sign $\longrightarrow$ $X_1, X_2, \bar{X}_3, \bar{\bar{X}}_3 \geq 0$

ثالثاً: الشكل المعياري او القياسي

ويمتاز هذا الشكل بالآتي: -

1- يمكن ان تكون دالة الهدف أحد النوعين تعظيم الربح او تقليل التكلفة max or min.
2- ان تكون جميع القيود الخاضعة لها دالة الهدف من نوع المساواة =
3- لا يمكن ان يكون الطرف الايمن للقيود سالباً
4- يجب ان يتحقق قيد عدم السالبية المتغير في النموذج

دالة الهدف / الشكل المعياري او القياسي الصيغة المعيارية و القياسية

$$\max \text{ or } \min \quad Z = a_1X_1 + a_2X_2 \ \ldots\ldots + a_nX_n$$

دوال القيود / الشكل المعياري او القياسي الصيغة المعيارية و القياسية

S.t.

$$\begin{aligned} a_{11}X_1 &+ a_{12}X_2 \ \ldots\ldots + a_{1n}X_n \ \ldots\ldots (=)\ b_1 \\ a_{21}X_1 &+ a_{22}X_2 \ \ldots\ldots + a_{2n}X_n \ \ldots\ldots (=)\ b_2 \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}X_1 &+ a_{m2}X_2 \ \ldots\ldots + a_{mn}X_n \ \ldots\ldots (=)\ b_m \end{aligned}$$

قيد عدم السالبية المتغيرات المستقلة / الشكل المعياري او القياسي الصيغة المعيارية و القياسية

$$X_{ij} \geq 0 \ ; \ \& \quad \begin{matrix} i = 1,2,3....m \\ j = 1,2,3....n \end{matrix}$$

مثال6: - اكتب مسألة البرمجة الخطية التالية بالصيغة القياسية

Max. $Z = 3X_1 - 2X_2$

Sub. to

$$X_1 - 2X_2 \geq 3$$

$$3X_1 + 4X_2 \leq 2$$

$$X_1 + 3X_2 = 5$$

X_1, X_2 Unrestrected in sign.

الحل: يتم في البداية الاستعاضة عن المتغيرين X_1, X_2 بمتغيرات موجبة وذلك بسبب أنهما غير محددان بإشارة (Unrestricted in sign) كما ورد في قيد عدم السالبية في المسألة:

$$\text{Let } \begin{Bmatrix} X_1 = \bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}_1 \\ X_2 = \bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}_2 \end{Bmatrix} \text{ where } \bar{X}_1, \bar{\bar{X}}_1, \bar{X}_2, \bar{\bar{X}}_2 \geq 0$$

$$Max.Z - 3(\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}_1) + 2(\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}_2) + 0S_1 + 0S_2 = 0$$

Sub. to

$$X_1 - 2X_2 \geq 3 \rightarrow \bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}_1 - 2(\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}_2) - S_1 = 3$$

$$3X_1 + 4X_2 \leq 2 \rightarrow 3(\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}_1) + 4(\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}_2) + S_2 = 2$$

$$X_1 + 3X_2 = 5 \rightarrow \bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}_1 + 3(\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}_2) = 5$$

$$\bar{X}_1, \bar{\bar{X}}_1, \bar{X}_2, \bar{\bar{X}}_2, S_1, S_2 \geq 0$$

مع مُلاحظة إن إدراج مُعاملات المُتغيرات الوهمية S_1, S_2 في دالة الهدف بقيم صفرية لا يُغير دالة الهدف.