الفصل الاول

الاعداد العقدية Complex Number

التمهيد: لماذا نظام الاعداد العقدية ؟: لقد تعلمنا سابقاً ان حل المعادلة

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad (1)$$

باستخدام طريقة الدستور هو:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (2)$$

وعرفنا ان جذور المعادلة (1) حقيقية عندما يكون المقدار تحت الجذر $(b^2 - 4ac \geq 0)$ موجب، اما اذا كان المقدار $b^2 - 4ac < 0$ فهذا يعني ان جذور المعادلة (1) ليست ضمن نظام الاعداد الحقيقية. لذلك اقتضت الضرورة وجود نظام اعداد اخر يقع ضمنه الحلول غير الحقيقية للمعادلات. لقد وضع العالم الرياضي **كاوس** نظام اعداد جديد يشمل على:

١- يشمل جميع الاعداد الحقيقية.

٢- يشتمل على **الوحدة التخيلية i والتي لها الخاصية $i^2 = -1$.**

هذا النظام هو **نظام الاعداد العقدية**، حيث يعتبر $i(= \sqrt{-1})$ هو اساس النظام.

اليك بعض الامثلة البسيطة:

اليك مجموعة من الاعداد التالية:

$$\sqrt{-16} = \sqrt{-1}\sqrt{16} = 4i, \qquad \sqrt{-3} = \sqrt{-1}\sqrt{3} = i\sqrt{3}, \qquad i^3 = i^2 i = -i$$

هذه الاعداد هي اعداد **خيالية**، لكن مجموعة الاعداد التالية:

$$\sqrt{-2}\sqrt{-8} = i\sqrt{2}.\,i\sqrt{8} = -4, \qquad i^2 = -1$$

هي اعداد **حقيقية**.

الاجزاء الحقيقة والخيالية للعدد العقدي

Real and Imaginary Parts of a Complex Number

لو رجعنا الى المعادلة (1) وعوضنا عن $a = 1$ و $b = -2$ و $c = 2$، فأنها تصبح:

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \qquad (3)$$

حل المعادلة (4) يكون:

$$z = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i$$

حيث نلاحظ ان جذري z لهما جزء حقيقي والاخر خيالي معاً ، لذلك سنطلق مصطلح العدد العقدي على z ليعني المجموعة الكاملة للأعداد الحقيقية والخيالية او تركيب الاثنين معاً. لتوضيح اكثر، ان العدد العقدي $z = a + ib$ مركب من جمع حدين، الحد الحقيقي (لا يحتوي على i) ويسمى الجزء الحقيقي (العدد الحقيقي) للعدد العقدي ويرمز له $Re\{z\}$. ومعامل i في الحد الاخر يسمى بالجزء الخيالي (العدد الخيالي) للعدد العقدي ويرمز له $Im\{z\}$، حيث ان b هو ليس خيالياً. ان الجزء الحقيقي او الخيالي للعدد العقدي ممكن ان يكون صفراً، فاذا كان الجزء الحقيقي صفرا ، فأن العدد العقدي يكون خياليا، اما اذا كان الجزء الخيالي للعدد العقدي صفراً، فأن العدد العقدي يكون حقيقاً. يمكن ان نكتب العدد العقدي على شكل زوج من الاعداد الحقيقية، الجزء الحقيقي اولاً ومن ثم الجزء الخيالي، فمثلاً يمكن كتابة العدد العقدي $5 + 3i$ على الشكل التالي $(5,3)$. ان هذا ليس الشكل المناسب جداً في الحسابات، لكنه يستخدم في التمثيل الهندسي للعدد العقدي.

أن الاعداد العقدية لها اهمية كبيرة في مجالات تطبيقية عديدة مثل الهندسة الكهربائية وكذلك في حل المعادلات التفاضلية في فروع الفيزياء المختلفة بالإضافة الى حقول متقدمة في الرياضيات تتعامل مع دوال المتغير العقدي التي تعطي طرق مفيدة متعددة لحل التمارين حول انسياب الموائع ، الكهربائية ، ميكانيك الكم.

العمليات الحسابية الجبرية للأعداد العقدية

Algebraic Calculations of Complex Numbers

يمكن القيام بالعمليات الجبرية للأعداد العقدية باتباع نفس الاسلوب في جبر الاعداد الحقيقية، لأجراء العمليات الاربعة الحسابية، نفترض لدنيا العددين العقديين $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$:

١- عملية الجمع:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

٢-عملية الطرح

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

٣-عملية الضرب

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

٤-عملية القسمة

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1 x_2 - ix_1 y_2 + ix_2 y_1 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\left(\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)$$

مثال: انجز العمليات الحسابية الاربعة للعددين العقدين $z_1 = 2 + i$ و $z_2 = 3 - i$.

الحل:

1)

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = 5 + i0 = 5$$

2)

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) = -1 + 2i$$

3)

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) = 7 + i$$

4)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\left(\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$

اذا كان لدينا z_1 ، z_2 و z_3 ثلاث اعداد عقدية، فأنها تخضع الى القوانين التالية:

١- **قانون التبديل للجمع** $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

٢- **قانون التنسيق للجمع** $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

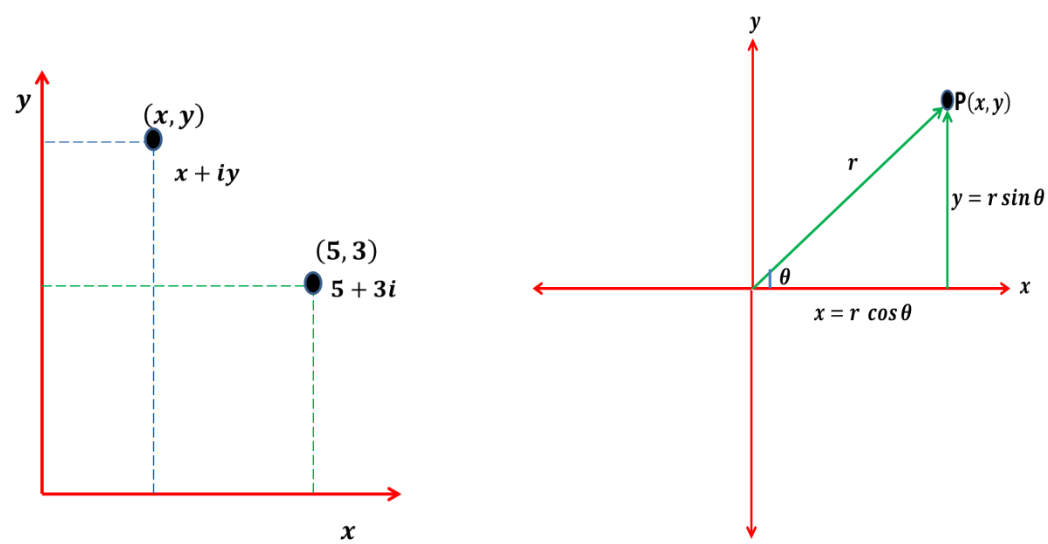
٣- **قانون التبديل للضرب** $z_1 z_2 = z_2 z_1$

٤- **قانون التنسيق للضرب** $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$

٥- **قانون التوزيع** $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

المستوي العقدي The Complex Plane

في الهندسة التحليلية، يمكن رسم النقطة $(5,3)$ كما موضح بالشكل ادناه. كما رأينا، ان الرمز $(5,3)$ قد يعني ايضاً العدد العقدي $5 + 3i$. لهذا فالنقطة $(5,3)$ تدل اما على $(5,3)$ أو $5 + 3i$ كما في الشكل(١). بنفس الطريقة ، اي عدد عقدي $x + iy$ (x, y) حقيقيان) يمكن تمثيله في المستوي xy كذلك اي نقطة (x, y) في المستوي xy يمكن تمثيلها بـ $x + iy$ بالإضافة الى (x, y). عندما يستخدم المستوي xy بهذه الطريقة لرسم الاعداد العقدية، فأنه يسمى **بالمستوي العقدي** حيث يكون x يمثل المحور الحقيقي وy المحور الخيالي.



الشكل(١) الشكل(٢)

عندما يكتب العدد العقدي بالصيغة $z = x + iy$، نقول انه بالصيغة الكارتزية (التعامدية لأن x وy هي الاحداثيات المتعامدة للنقطة التي تمثل العدد في المستوي العقدي). في الهندسة التحليلية، يمكننا تعيين موضع النقطة بإعطاء احداثياتها القطبية (الاسطوانية)(r, θ) بدلاً من احداثياتها الكارتزية (x, y) كما في الشكل(٢).

$$x = r\ \cos\theta\,, \qquad y = r\sin\theta \qquad r \geq 0 \qquad (4)$$

حيث ان $r \geq 0$, وان r, θ الاحداثيين القطبيين للنقطة (x, y) المقابلة للعدد العقدية $z = x + iy$. يمثل r **طول العدد العقدي** z ويكون

$$r = |z|$$

او ان

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(Re\{z\})^2 + (Im\{z\})^2}$$

مثال: جد قيمة r للأعداد العقدية التالية:

١- $z = 5 + 10i$
٢- $z = 3 - 2i$
٣- $z = -3$
٤- $z = 2i$

الحل: يمكن استخراج قيمة r من الصيغة الرياضية التالية:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(Re\{z\})^2 + (Im\{z\})^2}$$

1- $r = |z| = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125}$
2- $r = |z| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$
3- $r = |z| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$
4- $r = |z| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$

اما الزاوية θ التي يصنعها متجه العدد العقدي z مع المحور الحقيقي باتجاه الموجب (بعكس اتجاه عقرب الساعة) وتسمى **بزاوية العدد العقدي** او الزاوية القطبية ويرمز لها بالرمز $arg\{z\}$ (او تسمى سعة او طور او الازاحة الزاوية للعدد العقدي). ومن المعادلة (4) نكتب العدد العقدي بالصيغة:

$$z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (5)$$

ان المعادلة (5) تسمى **الصيغة القطبية** للعدد العقدي.

يمكن استخراج زاوية العدد العقدي من خلال المعادلة (4):

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (6)$$

ان الصيغة الرياضية لعلاقة اويلر تعطى بالعلاقة التالية:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

وبالتالي يمكن كتابة العدد العقدي في المعادلة (5) باستخدام صيغة اويلر **بالصيغة الاسية** كما في الشكل التالي:

$$z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} \qquad (7)$$

مثال: جد الصيغة القطبية والآسية للعدد العقدي من الصيغة الكارتيزية $z = 5 - i5$ مع الرسم.

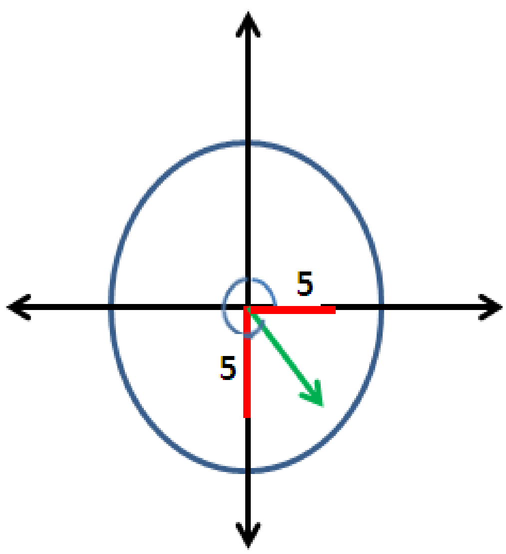
الحل:

اولاً: نقوم بتعين الجزء الحقيقي والخيالي في المستوي العقدي. ان الجزء الحقيقي موجب والخيالي سالب فأن العدد العقدي z يقع في الربع الرابع للمستوي العقدي

ثانياً: نستخرج قيم r من خلال المعادلة التالية:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(Re\{z\})^2 + (Im\{z\})^2}$$

$$r = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$



ثالثاً: نستخرج الزاوية θ من خلال العلاقة التالية:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{-5}{5}\right)$$

$$= \tan^{-1}(-1) = \frac{7\pi}{4}$$

ان قيمة الزاوية θ بالنصف قطرية ، لذلك فأن الصيغة القطبية والآسية للعدد العقدي تكون بالشكل التالية:

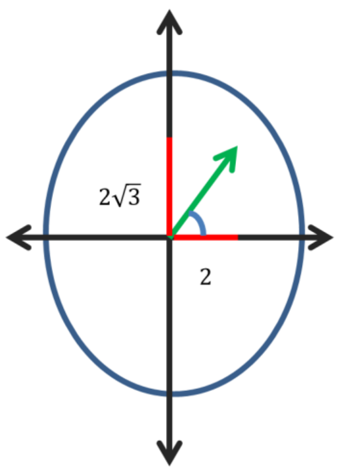
$$z = 5\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) = 5\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

مثال: جد الصيغة القطبية والآسية للعدد العقدي من الصيغة الكارتيزية $z = 2 + i2\sqrt{3}$ مع الرسم.

الحل:

اولاً: نقوم بتعين الجزء الحقيقي والخيالي في المستوي العقدي. العدد العقدي z يقع في الربع الاول للمستوي العقدي.

ثانياً: نستخرج قيم r من خلال المعادلة التالية:



$$r = |z| = \sqrt{4 + 12} = 4$$

ثالثاً: نستخرج الزاوية θ من خلال العلاقة التالية:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

لذلك فأن الصيغة القطبية للعدد العقدي تكون بالشكل التالية:

$$z = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$$

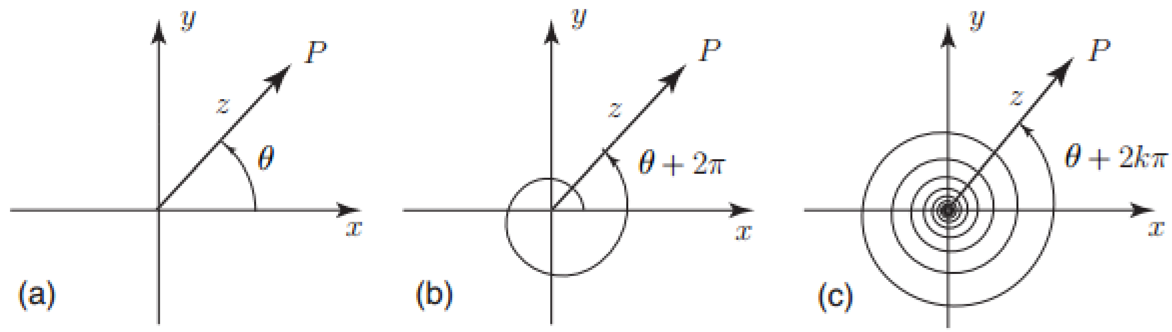
تمارين

١- جد الصيغة القطبية والآسية للعدد العقدي من الصيغة الكارتيزية $z = -5 + 5i$ مع الرسم.

٢- جد الصيغة القطبية والآسية للعدد العقدي من الصيغة الكارتيزية $z = -\sqrt{6} - \sqrt{2}i$ مع الرسم.

٣- جد الصيغة القطبية والآسية للعدد العقدي من الصيغة الكارتيزية $z = -3i$ مع الرسم.

ملاحظة: لأي عدد عقدي $z \neq 0$ توجد فقط قيمة واحدة للسعة θ في الفترة $0 \leq \theta \leq 2\pi$. في الشكل ادناه الزاوية θ التي صنعها z مع المحور الموجب كما في الشكل a. لذلك وكما في الشكل b نرى انه يمكن اضافة 2π او 360^0 ونحصل على نفس z في المستوي xy. في العموم، وكما مبين في الشكل c اي مضاعف صحيح من 2π يمكن اضافته الى او طرحه من θ بدون ان يؤثر على الصيغة الكارتيزية للعدد المعقد.



الشكل(٣).

على سبيل المثال

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$ الصيغة القطبية

ومع ذلك يمكن كتابة الصيغة اعلاه بالصورة المكافئة التالية:

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right)\right)$$

او بصورة اعم:

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right) \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots\dots$$

حيث ان k هو عدد صحيح. ان الصيغة الاخيرة تبين بأن الصيغة القطبية للعدد العقدي z ، $arg\{z\}$، يمكن ان تأخذ عدد غير محدد من القيم، كل قيمة تختلف عن الاخرى بـ $2k\pi$ وبالتالي:

$$arg\{z\} = Arg\{z\} + 2k\pi$$

هذا ليس اكثر من نتيجة لخواص الدوال المثلثية لأي عدد صحيح k :

$$\cos(\theta + 2k\pi) \equiv \cos(\theta) \quad , \quad \sin(\theta + 2k\pi) \equiv \sin(\theta),$$

بصورة عامة فأن المعادلة (8) تصبح:

$$z = r\,(\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)) = re^{i(\theta+2k\pi)} \qquad (8)$$

مثال:

$$\sqrt{3}+i=2\,cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+2i\,sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\,cos\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)+2i\,sin\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)$$

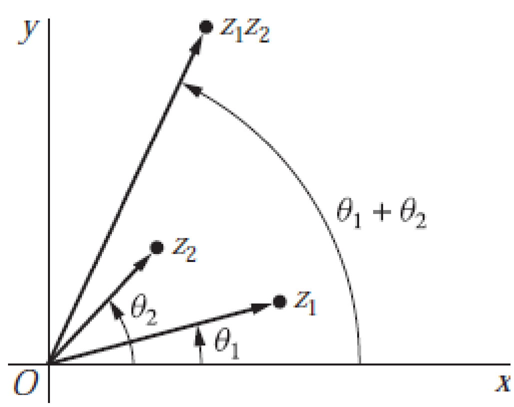
مثال:

$$-\sqrt{3}-i=2\,cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+2i\,sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=2\,cos\left(\frac{7\pi}{6}+2k\pi\right)+2i\,sin\left(\frac{7\pi}{6}+2k\pi\right)$$

ضرب وقسمة الاعداد العقدية بالصيغة القطبية والأسية

اذا كان z_1 و z_2 هما عددان عقديان لهما الصيغ القطبية التالية:

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$$
$$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$



اولاً :سنجد حاصل ضرب العددين z_1 و z_2

$$z_1z_2=[r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)][r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)]$$

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos\theta_1\cos\theta_2+i\cos\theta_1\sin\theta_2+i\sin\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2]$$

$$z_1z_2=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]$$

باستخدام المتطابقات المثلثية:

$$\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2$$

$$\sin(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2$$

اذن

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

ومنها نحصل

$$arg\{z_1 z_2\} = arg\{z_1\} + arg\{z_2\} = \theta_1 + \theta_2$$

وبدلالة صيغة اويلر $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ فأن

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

ثانياً: سنجد قسمة العددين العقديين

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}\frac{(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}\right]$$

لدينا

$$\cos(\theta_1-\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2$$

$$\sin(\theta_1-\theta_2) = \cos\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_1\cos\theta_2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)] = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

ومنها نحصل

$$arg\left\{\frac{z_1}{z_2}\right\} = arg\{z_1\} - arg\{z_2\} = \theta_1 - \theta_2$$

مثال: جد $arg\{z_1 z_2\}$، اذا علمت بأن $z_1 = -1$ و $z_2 = i$

الحل:

$$arg\{z_1z_2\} = arg\{z_1\} + arg\{z_2\} = \theta_1 + \theta_2 = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

مثال: جد $arg\left\{\frac{z_1}{z_2}\right\}$، اذا علمت بأن الصيغ الكارتزية لكل من z_1 و z_2 هي: $z_1 = -2$ و

$z_2 = 1 + \sqrt{3}i$

الحل:

$$arg\left\{\frac{z_1}{z_2}\right\} = arg\{z_1\} - arg\{z_2\} = \theta_1 - \theta_2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

مثال: جد بالإحداثيات الكارتزية z_1z_2 و $\frac{z_1}{z_2}$، اذا علمت بأن الصيغ القطبية لكل من z_1 و z_2 هي:

$$z_2 = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \text{ و } z_1 = 12\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

الحل:

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)] = 48\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$z_1z_2 = 48[\cos(\pi) + i\sin(\pi)] = -48 + 0i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)] = \frac{12}{4}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = 0 + 3i$$

تمرين: جد $arg\{z_1z_2\}$ و $arg\left\{\frac{z_1}{z_2}\right\}$ و z_1z_2 و $\frac{z_1}{z_2}$ بالصيغة القطبية ، اذا علمت بأن الصيغ الكارتزية لكل من z_1 و z_2 هي:

$$z_2 = 1 + \sqrt{3}i \text{ و } z_1 = 8i$$

نظرية دي موفر De Moivre's theorem

اذا كان z و w عددين عقديين

$$z = r\ \cos\theta + ir\sin\theta$$

و

$$w = t\cos\varphi + it\sin\varphi$$

عندئذ حاصل ضرب zw

$$zw = (r\cos\theta + ir\sin\theta)(t\cos\varphi + it\sin\varphi)$$

$$= rtcos\theta\cos\varphi + irt\,cos\theta\sin\varphi + irt\sin\theta\cos\varphi - rt\sin\theta\sin\varphi$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية:

$$\cos(\theta + \varphi) = cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$$

$$\sin(\theta + \varphi) = cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi$$

يكون

$$zw = rt\ [\cos(\theta + \varphi) + i\sin(\theta + \varphi)]$$

وكنتيجة من حاصل ضرب zw

$$arg\{zw\} = arg\{z\} + arg\{w\} = \theta + \varphi$$

لحالة خاصة: اذا كان $r = 1,\ t = 1$ و $\theta = \varphi$ بمعنى $z = w = \cos\theta + i\sin\theta$

نحصل

$$z^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta) \qquad eq(a)$$

لكن

$$z^2 = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 \qquad eq(b)$$

من المعادلتين $eq(a)$ و $eq(b)$

$$z^2 = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$$

لو ضربنا كلا الطرفين في المعادلة اعلاه بـ $\cos\theta + i\sin\theta$ ، نحصل:

$$z^3 = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$$

لو ضربنا كلا الطرفين في المعادلة اعلاه ب $\cos\theta + i\sin\theta$ وباستخدام المتطابقة المثلثية اعلاه، نحصل:

$$z^4 = (\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos(4\theta) + i\sin(4\theta)$$

لعدد معين من عمليات الضرب p نحصل

$$z^p = (\cos\theta + i\sin\theta)^p = \cos(p\theta) + i\sin(p\theta)$$

حيث p عدد صحيح. في الحقيقة هذه النتيجة يمكن ان تصح للحالات التي يكون فيها عدد p صحيح سالب ايضاً او عدد منطقي مثل $\frac{1}{2}$. هذه النتيجة تسمى **نظرية دي موفر**.

مثال: باستخدام نظرية دي موفر للأعداد المعقدة بالصيغة القطبية ، جد الصيغة الكارتيزية لـ $z^8 = (1+i)^8$.

الحل: لغرض استخراج الصيغة القطبية نتبع:

اولاً: نستخرج قيم r من خلال المعادلة التالية:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$$

ثانياً: نستخرج الزاوية θ من خلال العلاقة التالية:

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

وبالتالي

$$z = 1 + i = r\,(\cos\theta + i\sin\theta) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

نستخدم نظرية دي موفر:

$$(1+i)^8 = \left[\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]^8 = \left(\sqrt{2}\right)^8\left(\cos\left(8\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(8\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$(1+i)^8 = 16(\cos(2\pi) + i\sin(2\pi))$$

$$(1+i)^8 = 16(1 + i0)$$

$$(1+i)^8 = 16 + i0$$

مثال: باستخدام نظرية دي موفر للأعداد المعقدة بالصيغة القطبية ، جد الصيغة الكارتيزية لـ $z^{10} = \left(-1+\sqrt{3}i\right)^{10}$.

الحل:

اولاً: نستخرج قيم r من خلال المعادلة التالية:

$$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = 2$$

ثانياً: نستخرج الزاوية θ من خلال العلاقة التالية:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$$

نكتب $-1+\sqrt{3}i$ بالصيغة $r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ من خلال:

$$-1+\sqrt{3}i = r\,(\cos\theta + i\sin\theta) = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

نستخدم نظرية دي موفر:

$$\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{10} = \left[2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)\right]^{10} = (2)^{10}\left(\cos\left(10\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(10\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{10} &= 1024\left(\cos\left(\frac{20\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{20\pi}{3}\right)\right) = 1024\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}+6\pi\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}+6\pi\right)\right)\\ &= 1024\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)\end{aligned}$$

$$\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{10} = 1024(-0.5 + 0.866i)$$

تمارين

١- باستخدام نظرية دي موفر للأعداد المعقدة بالصيغة القطبية ، جد الصيغة الكارتيزية لـ $z^{15} = (1+i)^{15}$.

٢- باستخدام نظرية دي موفر للأعداد المعقدة بالصيغة القطبية ، جد الصيغة الكارتيزية لـ $z^{7} = \left(1+\sqrt{3}i\right)^{7}$.

استخراج جذور العدد المعقد حسب نظرية دي موفر

سوف نرى كيف يمكننا ان نستخدم التعميم لزاوية العدد المعقد في ايجاد جذور العدد المعقد باستخدام نظرية دي موفر:

مثال: جد جذور العدد العقدي باستخدام نظري دي موفر $z^3 = 8$.

الحل:

$$8 = 8(\cos(0) + isin(0))$$

نتوقع ثلاثة جذور لـ z تحقق المعادلة التكعيبية. هكذا اعادة ترتيب، الان نكتب الجانب الايمن كعدد معقد بالصيغة القطبية:

$$z^3 = 8(\cos(0) + i\sin(0))$$

لو استخدمنا تعميم زاوية العدد المعقد من خلال اضافة مضروب صحيح اعتباطي من 2π. سوف نحصل على التعبير المعدل التالي:

$$z^3 = 8(\cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi)) \quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3\pm, \ldots \ldots$$

الان نأخذ الجذر التكعيبي لكلا الطرفين

$$z = \sqrt[3]{8}(\cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi))^{\frac{1}{3}}$$

باستخدام نظرية دي موفر نحصل

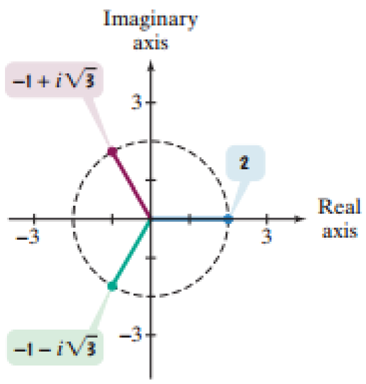
$$z = \sqrt[3]{8}(\cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi))^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right)$$

الاجراء الطبيعي يكون بأخذ ثلاثة قيم لـ k هي $0,1,2$. اي قيمة اخرى لـ k ستقود الى جذر يكون مكرر الى احد الجذور الثلاثة لقيم k اعلاه:

$$k = 0 \qquad z_0 = 2(\cos(0) + i\sin(0)) = 2$$

$$k = 1 \qquad z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -1 + i\sqrt{3}$$

$$k = 2 \qquad z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = -1 - i\sqrt{3}$$



اذن هنالك ثلاثة قيم (معقدة) لـ $8^{\frac{1}{3}}$. لو عوضنا الجذور في $z^3 = 8$ لحصلنا على ان الطرف الايسر يساوي الطرف الايمن :

$$(-1 - i\sqrt{3})^3 = 8 \qquad و \qquad (-1 + i\sqrt{3})^3 = 8 \qquad و \qquad 2^3 = 8$$

مثال: جد جذور العدد العقدي باستخدام نظري دي موفر $z^3 = i$.

الحل :

$$z^3 = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

لو استخدمنا تعميم زاوية العدد المعقد من خلال اضافة مضروب صحيح اعتباطي من 2π. سوف نحصل على التعبير المعدل التالي:

$$z^3 = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right) \quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3\pm, \dots\dots$$

الان نأخذ الجذر التكعيبي لكلا الطرفين

$$z = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)^{\frac{1}{3}}$$

باستخدام نظرية دي موفر نحصل

$$z = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)^{\frac{1}{3}} = 1\left(\cos\left(\frac{\pi+4k\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+4k\pi}{6}\right)\right)$$

الاجراء الطبيعي يكون بأخذ ثلاثة قيم لـ k هي 0,1,2 . اي قيمة اخرى لـ k ستقود الى جذر يكون مكرر لاحد الجذور الثلاثة لقيم k اعلاه:

$$k=0 \qquad z_0 = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$k=1 \qquad z_1 = 1\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$k=2 \qquad z_2 = 1\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = -i$$

مثال: جد جذور العدد العقدي باستخدام نظري دي موفر $z^2 = 1 + i$.

الحل : المطلوب ايجاد جميع الجذور $z = (1+i)^{\frac{1}{2}}$.

نقوم اولاً بإيجاد قيمة r من خلال المعادلة التالية:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(Re\{z\})^2 + (Im\{z\})^2} = \sqrt{2}$$

ومن ثم باستخدام المعادلة التالية نستخرج θ:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$z^2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

لو استخدمنا تعميم زاوية العدد المعقد من خلال اضافة مضروب صحيح اعتباطي من 2π. سوف نحصل على التعبير المعدل التالي:

$$z^2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right) \quad k = 0, \pm 1,$$

الان نأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

$$z = (\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

باستخدام نظرية دي موفر نحصل

$$z = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi + 8k\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 8k\pi}{8}\right)\right)$$

الاجراء الطبيعي يكون بأخذ قيمتان لـ k هي 0,1 . اي قيمة اخرى لـ k ستقود الى جذر يكون مكرر الى احد الجذرين لقيم k اعلاه:

$$k = 0 \qquad z_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) = 1.099 + 0.455i$$

$$k = 1 \qquad z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)\right) = -1.099 - 0.455i$$

تمارين

جد جذور العدد العقدي باستخدام نظري دي موفر **لكل مما يأتي:**

١- $z^2 = \sqrt{3} + 3i$.

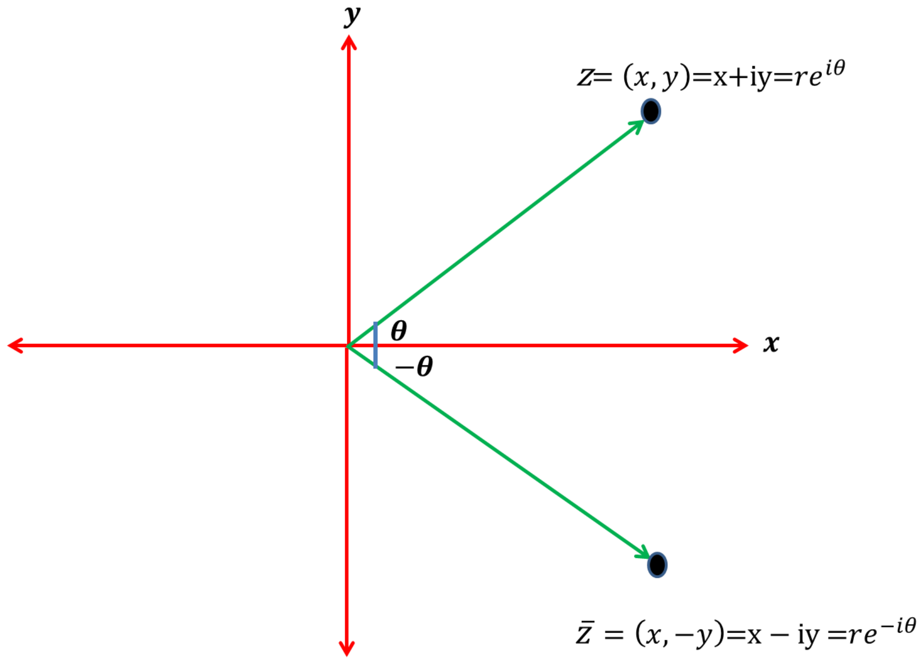
٢- $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$.

٣- $z^4 = -4$.

٤- $z^3 = -8i$.

المترافق المعقد للعدد العقدي Complex Conjugate

اذا كان $z = x + iy$ ، فأن المترافق المعقد للعدد العقدي z والذي يرمز له بالرمز $\bar{z}$ يكون $\bar{z} = x - iy$. يمثل $\bar{z}$ هندسياً بالنقطة $(x, -y)$ وهو انعكاس بالنسبة الى المحور الحقيقي x وكما بالشكل ادناه:



الشكل(٤).

ان زوج النقاط (x, y) و $(x, -y)$ في المستوي العقدي هي صورة مرآة لكل منهما حيث ان x هو المرآة كما في الشكل اعلاه. لذا فأن z و $\bar{z}$ بالصيغة القطبية لهما نفس قيمة r ، لكن قيمة θ هي سالب احدهما الاخر. فاذا كتبنا :

$$z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

فأن

$$\bar{z} = r\,(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = re^{-i\theta}$$

ان مرافق كل عدد حقيقي $z = x + i0$ هو العدد نفسه.

$$\bar{z} = \overline{x + i0} = x - i0 = z$$

اما اذا كان $z = 0 + iy$ عدد تخيلي صرف، فأن مرافقه المعقد هو $-z$

$$\bar{z} = \overline{0 + iy} = 0 - iy = -z$$

اذا كان $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ فأن:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

$$\overline{z_1 + z_2} = x_1 + x_2 - i(y_1 + y_2) = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

وبنفس الطريقة يمكن ان نبرهن على ان

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$$

$$\overline{z_1 - z_2} = x_1 - x_2 - i(y_1 - y_2) = (x_1 - iy_1) - (x_2 - iy_2) = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

اما بالنسبة الى $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ فيكون:

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)} = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + x_2 y_1) = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

بالنسبة الى $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_1 - iy_1}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1 x_2 - ix_1 y_2 + ix_2 y_1 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} - i\,\frac{(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \qquad eq(1)$$

$$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{x_1 - iy_1}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1 - iy_1}{x_2 - iy_2} \cdot \frac{x_2 + iy_2}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 x_2 + ix_1 y_2 - ix_2 y_1 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} - i\,\frac{(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \qquad eq(2)$$

من المعادلات ١ و ٢ نحصل على المساواة.

ان حاصل جمع العدد المعقد والمترافق المعقد هو $z + \bar{z} = 2x$ وحاصل طرحهما هو $z - \bar{z} = 2iy$

، وبالتالي فأن الجزء الحقيقي والخيالي بدلالة كل من العدد العقدي والمترافق المعقد يكون:

$$Re\{z\} = x = \frac{z+\bar{z}}{2}$$

$$Im\{z\} = y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

اما ناتج حاصل ضربهما $z\bar{z}$ فيكون

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = \bar{z}z = |z|^2$$

ومنها نجد ان

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = |\bar{z}|$$

تمرين: افرض ان $z = 4+3i$ و $\bar{z} = 4-3i$ جد الجزء الحقيقي والخيالي لهما:

مثال بسط (جد ناتج) $\left|\frac{(3+4i)\overline{(2-i)}}{1+3i}\right|$ حيث ان $|z| = |\bar{z}|$

الحل:

$$\left|\frac{(3+4i)\overline{(2-i)}}{1+3i}\right| = \frac{|3+4i||(2-i)|}{|1+3i|} = \frac{\sqrt{9+16}\sqrt{4+1}}{\sqrt{1+9}} = \frac{\sqrt{25}\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{25}{2}}$$

مثال: بسط (جد ناتج) $(2+i)\overline{(1+3i)} - 2 + 4i$.

الحل:

$$(2+i)\overline{(1+3i)} - 2 + 4i = (2+i)(1-3i) - 2 + 4i$$

$$= 2 - 6i + i + 3 - 2 + 4i = 3 - i$$

مثال: افرض ان $z_1 = 4+3i$ و $z_2 = 2+5i$ ، اثبت أن :

1. $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

2. $\overline{z_1-z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$

3. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

ثم جد الجزء الحقيقي والخيالي للعدد المعقد z_1 بدلالته والمترافق المعقد له.

الحل:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{(4+3i) + (2+5i\,)} = (4-3i) + (2-5i\,)$$

$$\overline{6+8i} = 6-8i$$

$$6-8i = 6-8i$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

$$\overline{(4+3i) - (2+5i\,)} = (4-3i) - (2-5i\,)$$

$$\overline{2-2i} = 2+2i$$

$$2+2i = 2+2i$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(4+3i)(2+5i\,)} = \overline{(-7+26i)} = -7-26i$$

$$\bar{z}_1 \bar{z}_2 = (4-3i)(2-5i\,) = -7-26i$$

$$Re\{z_1\} = \frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{(4+3i\,) + (4-3i)}{2} = 4$$

$$Im\{z_1\} = \frac{z-\bar{z}}{2i} = \frac{(4+3i\,) - (4-3i)}{2i} = 3$$

مثال: جد $(\bar{z}_3)^4$ اذا علمت بأن $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

الحل:

$$(\bar{z}_3)^4 = \left(\overline{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}\right)^4 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4 = \left[\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2\right]^2$$

$$= \left[\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4}i^2\right]^2 = \left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right]^2 = \left[\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4}i^2\right] = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

الجذر التربيعي للعدد المعقد Square root of complex number

الان يمكننا أن نستخرج الجذر التربيعي للعدد المعقد، لو فرضنا ان العدد $z = a + ib$ ، فأننا نبحث عن جذور العدد $X = x + iy$ بحيث ان $X^2 = z$:

$$X^2 = (x + iy)^2 = z = a + ib \qquad \dots\dots (1a)$$

$$(x^2 - y^2) + 2ixy = a + ib \qquad \dots\dots (1b)$$

من (1b) نجد ان

$$x^2 - y^2 = a \qquad \dots\dots (2)$$

$$2xy = b \qquad \dots\dots (3)$$

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 \qquad \dots\dots (4)$$

من المعادلات (2) و (3) و (4) نحصل على:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \dots\dots (5)$$

بجمع المعادلتين (2) و (5)

$$2x^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$x^2 = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right) \qquad \dots\dots (6a)$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)} \qquad \dots\dots (6b)$$

بطرح المعادلتين (2) و (5)

$$2y^2 = -a + \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$y^2 = \frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right) \qquad \ldots\ldots (7a)$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)} \qquad \ldots\ldots (7b)$$

هذه النتائج كانت تحصيلاً لحل المعادلتين (2) و (5) ، ولكن قد تؤدي إلى حل لا يحقق جميع المعادلات ، ولذلك فإن المعادلة (3) $(2xy = b)$ يجب أن تؤخذ بنظر الاعتبار عند ايجاد الحل العام. وبالتالي سوف نناقش الحالتين التاليتين:

الحالة الاولى: عندما $b \neq 0$

أ) $b > 0$ فإن x و y يجب أن يحملان نفس الاشارة.

ب) $b < 0$ فإن x و y يجب أن يحملان اشارتين مختلفتين.

بجذر المعادلة $(1a)$ وتعويض المعادلتان $(6b)$ و $(7b)$

$$X_{1,2} = \sqrt{a+ib} = x + iy = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right)} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2+b^2}\right)}\right) \qquad for \quad b > 0$$

$$X_{1,2} = \sqrt{a-ib} = x - iy = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right)} - i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2+b^2}\right)}\right) \qquad for \quad b < 0$$

الحالة الثانية: عندما $b = 0$

$$X^2 = a$$

$$X_{1,2} = \pm\sqrt{a} \qquad for \quad a > 0$$

$$X_{1,2} = \pm i\sqrt{a} \qquad for \quad a < 0$$

الحالة الثالثة: عندما $a = b = 0$

$$X_{1,2} = 0$$

مثال: حل (جد الجذر التربيعي) المعادلة التالية: $X^2 = -i$

الحل:

$$a = 0, \qquad b = -1 \qquad , b < 0$$

بما ان $b < 0$ نستخدم العلاقة التالية:

$$X_{1,2} = \sqrt{a - ib} = x - iy = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)} - i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)}\right)$$

وبالتالي فأن الجذرين الخياليين هما: $X_1 = +\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ و $X_2 = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

مثال: حل (جد الجذر التربيعي) المعادلة التالية: $X^2 = -5 + 12i$

الحل:

$$a = -5, \qquad b = 12 \qquad , b > 0$$

بما ان $b > 0$ نستخدم العلاقة التالية:

$$X_{1,2} = \sqrt{a + ib} = x + iy = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)}\right)$$

$$X_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(-5 + \sqrt{25 + 144}\right)} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left(5 + \sqrt{25 + 144}\right)}\right)$$

$$X_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}(-5 + 13)} + i\sqrt{\frac{1}{2}(5 + 13)}\right) = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}(8)} + i\sqrt{\frac{1}{2}(18)}\right) = \pm(2 + 3i)$$

وبالتالي فأن الجذرين الخياليين هما: $X_1 = +(2 + 3i)$ $X_2 = -(2 + 3i)$

مثال: جد الجذر التربيعي للعدد العقدي $X^2 = \frac{-1+5i}{2+3i}$.

الحل: نجد حاصل القسمة من خلال الخطوات التالية:

$$\frac{-1+5i}{2+3i}=\frac{-1+5i}{2+3i}\frac{2-3i}{2-3i}=\frac{13+13i}{4+9}=1+i$$

بما ان $b>0$ نستخدم العلاقة التالية:

$$X_{1,2}=\sqrt{a+ib}=x+iy=\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}+i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right)$$

$$X_{1,2}=\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+1}\right)}+i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1+1}\right)}\right)$$

$$X_{1,2}=\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)}+i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{2}\right)}\right)$$

$$X_{1}=\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)}+i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{2}\right)}\right)$$

$$X_{2}=-\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)}+i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{2}\right)}\right)$$

معادلات متعدد الحدود Polynomial Equations

في الرياضيات، المعادلات الحدودية أو معادلات متعددات الحدود Polynomial equations هي معادلات تأخذ الشكل التالي:

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + \cdots + a_1 X + a_0 = 0$$

حيث $a_i,$ معاملات المعادلة، والهدف هو إيجاد جميع قيم المجهول x. ونقول أن كثير الحدود من الدرجة الأولى إذا كانت أعلى قوة لـ X تظهر في المعادلة هي واحد. وهي من الدرجة الثانية إذا كانت أعلى قوة لـ X هي اثنين وهكذا. إذن نقول أن كثيرة الحدود من الدرجة n إذا كانت أعلى قوة لـ X هي n. وتقول المبرهنة الأساسية في الجبر أن لكل معادلة حدودية من الدرجة n يوجد عدد n من الحلول (ذلك إذا احتسبنا الحلول المكررة أي التي يجب أن نعدها مرتين). كما تجدر الإشارة إلى أن كل معادلة حدودية ذات معاملات تنتمي إلى الأعداد الحقيقية إن كان لها حلول تنتمي إلى الأعداد المعقدة فإن هذه الحلول تكون دائما مترافقة أي أنه يكون دائما هناك حل في شكل $a + ib$ وآخر في شكل $a - ib$.

أولاً لنفرض ان لدينا معادلة من الدرجة الثانية:$aX^2 + bX + c = 0$ ، لكي نجد جذور العدد X نتبع الآتي:

بنقل c الى الطرف الاخر والقسمة على a الذي لا يساوي الى الصفر نحصل على

$$X^2 + \frac{b}{a}X = -\frac{c}{a}$$

نستخدم طريقة اكمال المربع، بإضافة $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ الى طرفي المعادلة اعلاه

$$X^2 + \frac{b}{a}X + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$X + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

وبالتالي نحصل على

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال: حل المعادلة $X^2 + (2i-3)X + (5-i) = 0$.

الحل: باستخدام طريقة الدستور:

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(2i-3) \pm \sqrt{(2i-3)^2 - 4(5-i)}}{2}$$

$$X_{1,2} = \frac{-2i + 3 \pm \sqrt{-4 - 12i + 9 - 20 + 4i}}{2} = \frac{3 - 2i \pm \sqrt{-15 - 8i}}{2}$$

الان نحاول ان نجد الجذرين $\sqrt{-15-8i}$ من خلال المعادلة التالية:

$$X_{1,2} = \sqrt{a - ib} = x - iy = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)} - i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)}\right) \qquad for \quad b < 0$$

$$X_{1,2} = \sqrt{-15 - i8} = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(-15 + \sqrt{225 + 64}\right)} - i\sqrt{\frac{1}{2}\left(15 + \sqrt{225 + 64}\right)}\right)$$

$$X_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(-15 + \sqrt{289}\right)} - i\sqrt{\frac{1}{2}\left(15 + \sqrt{289}\right)}\right)$$

$$X_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}(-15 + 17)} - i\sqrt{\frac{1}{2}(15 + 17)}\right) = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}(2)} - i\sqrt{\frac{1}{2}(32)}\right) = \pm(1 - 4i)$$

وبالتالي فأن جذري $\pm\sqrt{-15-8i}$ هما $\pm(1-4i)$ وبالتالي:

$$X_{1,2} = \frac{3 - 2i \pm \sqrt{-15 - 8i}}{2} = \frac{3 - 2i \pm (1 - 4i)}{2}$$

وبالتالي فأن الجذرين الخياليين هما: $X_1 = 2 - 3i$ و $X_2 = 1 + i$.

اما بالنسبة الى معادلات متعددة الحدود من الرتب العالية فنتبع الطرق الموضحة في الأمثلة التالية:

مثال: جد الجذور الحقيقية والمعقدة المترافقة لمعادلة متعددة الحدود التالية:

$$6X^4 - 25X^3 + 32X^2 + 3X - 10 = 0$$

الحل: نأخذ العوامل الاولية لكل من المعاملات $a_4 = 6$ و $a_0 = -10$ وتكون:

عوامل $a_4 = 6$ هي $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ وعوامل $a_0 = -10$ هي $\pm1, \pm2, \pm5, \pm10$. نقسم عوامل a_0 على a_4 على شرط ان لا يكون هنالك قاسم مشترك بين العوامل ما عدا ±1 فنحصل على الحلول الجذرية الحقيقية الممكنة:

$$\pm1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{5}, \pm\frac{1}{6}, \pm2, \pm\frac{2}{3}, \pm5, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{5}{6}, \pm10, \pm\frac{10}{3}$$

نجرب الحلول الجذرية الحقيقية في المعادلة متعددة الحدود، نختار فقط الحلول الجذرية التي تجعل المعادلة تساوي الصفر. من خلال ذلك نجد ان $X_1 = -\frac{1}{2}$ و $X_2 = \frac{2}{3}$ **هما الجذران الحقيقيان لمعادلة متعدد الحدود.** نعمل على ايجاد الجذور الخيالية من خلال القسمة الطويلة:

$$6X^4 \quad - 25X^3 + 32X^2 + 3X \quad - 10$$

$$\begin{array}{l|rrrrr}
-\frac{1}{2}) \times & 6 & -25 & 32 & 3 & -10 \\
 & & -3 & 14 & -23 & 10 \\
\hline
\frac{2}{3}) \times & 6 & -28 & 46 & -20 & 0 \\
 & & 4 & -16 & 20 & \\
\hline
 & 6 & -24 & 30 & 0 &
\end{array}$$

نرى ان ناتج القسمة يقبل القسمة على 6 وبالتالي نحصل على

$$1 \qquad -4 \qquad 5$$

وبالتالي:

$$6X^4 - 25X^3 + 32X^2 + 3X - 10 = (2X + 1)(3X - 2)(X^2 - 4X + 5)$$

الان نستخدم طريقة الدستور لإيجاد جذور $(X^2 - 4X + 5)$

$$X_{3,4} = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = 2 \pm i$$

اذن الحلول هي $X_1 = -\frac{1}{2}$ و $X_2 = \frac{2}{3}$ و $X_3 = 2 + i$ و $X_4 = 2 - i$

مثال: أوجد الجذور الخيالية للمعادلة $X^4 - 5X^2 - 10X - 6 = 0$ اذا علمت بأن الجذور الحقيقية هي -1 و3.

الحل: نعمل على ايجاد الجذور الخيالية من خلال القسمة الطويلة:

$-1) \times$	1	0	-5	-10	-6
		-1	1	4	6
$3) \times$	1	-1	-4	-6	0
		3	6	6	
	1	2	2	0	

وبالتالي فأن

$$X^4 - 5X^2 - 10X - 6 = 0 = (X+1)(X-3)(X^2+2X+2)$$

المعادلة $(X^2 + 2X + 2)$ من الدرجة الثانية ، لذلك نستخدم طريقة الدستور لغرض استخراج الجذور الخيالية:

$$X_{3,4} == \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$$

اذن الحلول هي $X_1 = -1$ و $X_2 = 3$ و $X_3 = -1 + i$ و $X_4 = -1 - i$

مثال: أوجد الجذر التربيعي للمعادلة $2X^4 - 3X^3 - 7X^2 - 8X + 6 = 0$ اذا علمت بأن الجذور الحقيقية هي $\frac{1}{2}$ و 3.

الحل: نعمل على ايجاد الجذور الخيالية من خلال القسمة الطويلة:

$\frac{1}{2}) \times$	2	-3	-7	-8	6
		1	-1	-4	-6
$3) \times$	2	-2	-8	-12	0
		6	12	12	
	2	4	4	0	

وبالتالي فأن

$$2X^4 - 3X^3 - 7X^2 - 8X + 6 = 0 = (2X - 1)(X - 3)(2X^2 + 4X + 4)$$

المعادلة $(2X^2 + 4X + 4)$ من الدرجة الثانية ، لذلك نستخدم طريقة الدستور لغرض استخراج الجذور الخيالية ، حيث نقسم طرفي المعادلة على 2 لنحصل على $(X^2 + 2X + 2)$:

$$X_{3,4} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$$

اذن الحلول هي $X_1 = \frac{1}{2}$ و $X_2 = 3$ و $X_3 = -1 + i$ و $X_4 = -1 - i$

مثال: أوجد الجذر التربيعي للمعادلة $X^3 - 7X^2 + 19X - 13 = 0$ اذا علمت بأن الجذر الحقيقي هو 1

الحل: نعمل على ايجاد الجذور الخيالية من خلال القسمة الطويلة:

$1) \times$	1	-7	19	-13
		1	-6	13
	1	-6	13	0

وبالتالي فأن

$$X^3 - 7X^2 + 19X - 13 = 0 = (X - 1)(X^2 - 6X + 13)$$

المعادلة $(X^2 - 6X + 13)$ من الدرجة الثانية ، لذلك نستخدم طريقة الدستور لغرض استخراج الجذور الخيالية :

$$X_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{36-52}}{2} = 3 \pm 2i$$

اذن الحلول هي $X_1 = 1$ و $X_2 = 3 + 2i$ و $X_3 = 3 - 2i$

الفصل الثاني

الدوال النظامية البسيطة

المتغير ودوال المتغير العقدي

يسمى الرمز z الذي يعبر عن أي عنصر في فئة الاعداد المعقدة بالمتغير المعقد. اذا كان لكل قيمة للمتغير المعقد z توجد قيمة واحدة او عدة قيم للمتغير المعقد w، فيقال ان w هي دالة لـ z وتكتب:

$$w = f(z)$$

يسمى z بالمتغير المعقد المستقل، بينما w بالمتغير المعقد المعتمد. اذا وجدت لكل قيمة للمتغير المستقل z قيمة واحدة فقط للمتغير المعتمد w ، فإننا نقول ان w دالة وحيدة القيمة للمتغير z او ان $f(z)$ وحيدة القيمة. اما اذا وجدت لكل قيمة مقابلة للعدد z اكثر من قيمة لـ w ، فإننا نقول ان w دالة متعددة القيم او كثيرة القيم للمتغير z. فاذا كانت $w = z^2$ فإن لكل قيمة للمتغير z قيمة واحدة فقط w، اما $w = z^{\frac{1}{2}}$ فأن لكل قيمة z توجد قيمتان لـ w .

الدوال العكسية

اذا كان $w = f(z)$ ، فإنه يمكن أيضاً أن نعتبر z كدالة في المتغير w وتكتب $z = g(w) = f^{-1}(w)$ وعادة تسمى الدالة f^{-1} بالدالة العكسية المناظرة للدالة f.

التحويلات

اذا كان $w(= u + iv)$ (حيث u و v حقيقيان) د الة واحدة القيمة في المتغير $z(= x + iy)$ (حيث x و y حقيقيان) فأنه يمكن ان نكتب:

$$u + iv = f(x + iy)$$

وبمساواة الجزأين الحقيقيين والجزأين الخياليين في الطرفين فإننا نرى أنها تكون مكافئة الى:

$$u = u(x, y) \quad , \quad v = v(x, y)$$

اذا اعطينا نقطة مثل P في المستوي z ، فأنه توجد نقطة مثل $\acute{P}$ مناظرة في المستوي w. ونقول ان النقطة P نقلت او حولت الى النقطة $\acute{P}$ باستخدام التحويل وتسمى $\acute{P}$ بصورة P.

مثال: أكتب $f(z) = z^2$ على شكل $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

الحل:

$$w = u + iv = f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

وبمساواة الجزأين الحقيقيين والجزأين الخياليين في الطرفين فأننا نرى:

$$u = u(x,y) = x^2 - y^2$$

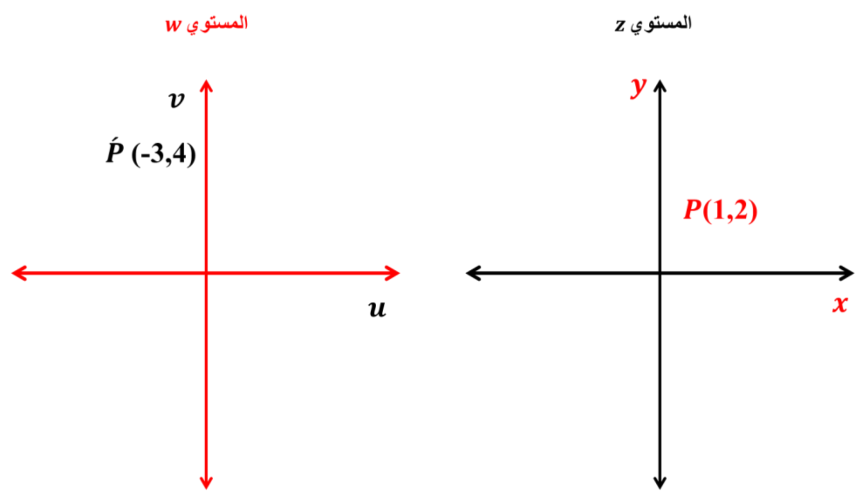
$$v = v(x,y) = 2xy$$

لنقل النقطة $(1,2)$ في المستوي العقدي z الى النقطة المناظرة لها في المستوي w:

$$u = 1^2 - 2^2 = -3$$

$$v = 2xy = 4$$

اذن تكون النقطة المناظرة في المستوي w هي $(-3,4)$وكما في الرسم التقريبي في ادناه:



مثال: لديك $w = f(z) = z^2 + 3z$، جد u و v واحسب f في $z = 1 + 3i$.

الحل:

$$u = Re\{f(z)\} = x^2 - y^2 + 3x$$

$$v = Im\{f(z)\} = 2xy + 3y$$

$$f(1+3i) = (1+3i)^2 + 3(1+3i) = 1 - 9 + 6i + 3 + 9i = -5 + 15i$$

وهكذا نرى بأن

$v(1,3) = 15$ و $u(1,3) = -5$

مثال: لديك $w = f(z) = 2zi + 6\bar{z}$، جد u و v واحسب f في $z = \frac{1}{2} + 4i$.

الحل:

$$f(z) = 2i(x+iy) + 6(x-iy)$$

$$u(x,y)) = 6x - 2y$$

$$v(x,y) = 2x - 6y$$

$$f\left(\frac{1}{2} + 4i\right) = 2i\left(\frac{1}{2} + 4i\right) + 6\left(\frac{1}{2} - 4i\right) = i - 8 + 3 - 24i = -5 - 23i$$

وهكذا نرى بأن

$$u\left(\frac{1}{2}, 4\right) = -5$$

$$v\left(\frac{1}{2}, 3\right) = -23$$

مثال: اعتبر $w = f(z) = z^2$ ، اوجد قيم w المناظرة لكل من:

(أ) $z = -2 + i$ ، (ب): $z = 1 - 3i$

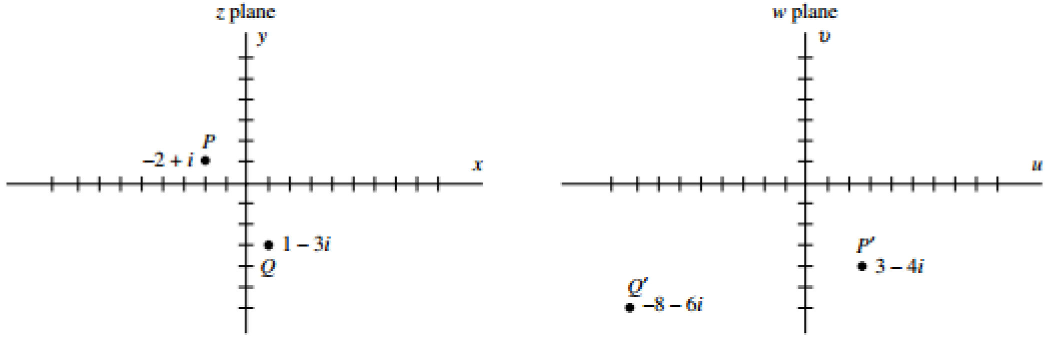
وبين كيف يمكن تمثيل هذا التناظر بيانياً.

الحل: (أ)

$$w = f(-2+i) = (-2+i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 3 - 4i$$

(ب):

$$w = f(1-3i) = (1-3i)^2 = 1 - 6i + 9i^2 = -8 - 6i$$



النقطة $z = -2 + i$ ، الممثلة بالنقطة P في المستوي z لها صورة $\mathrm{w} = 3 - 4i$ الممثلة بالنقطة $\acute{P}$ في المستوي w، نقول ان P قد نقلت الى $\acute{P}$ بواسطة دالة الرسم او التحويل $w = z^2$. بالمثل $z = 1 - 3i$ قد نقلت الى $\mathrm{w} = -8 - 6i$، اذن لكل نقطة واحدة في المستوي z توجد نقطة واحدة تمثلها في المستوي w وبالتالي تكون دالة وحيدة القيمة للمتغير z.

الاحداثيات الانحنائية

اذا اعطينا التحويل $w = f(z)$ او المكافئ له $v = v(x, y)$ و $u = u(x, y)$ فأننا نسمي (x, y) الاحداثيات المتعامدة بالنسبة الى نقطة ما في المستوي z و (u, v) بالإحداثيات الانحنائية للنقطة P في المستوي z .

التحويل الخطي Linear Transformation

يسمى التحويل $w = az + b$ بالتحويل الخطي حيث ان a و b اعداد معقدة و w دالة خطية. هنالك ثلاثة انواع من التحويل الخطي يتم فيها تحويل النقاط من المستوي z الى المستوي المعقد w و هي:

١- تحويل النقل (ازاحة بمقدار *b*) *Transport Transformation*:

إذا كان $a = 1$ و b اختيارية فأن

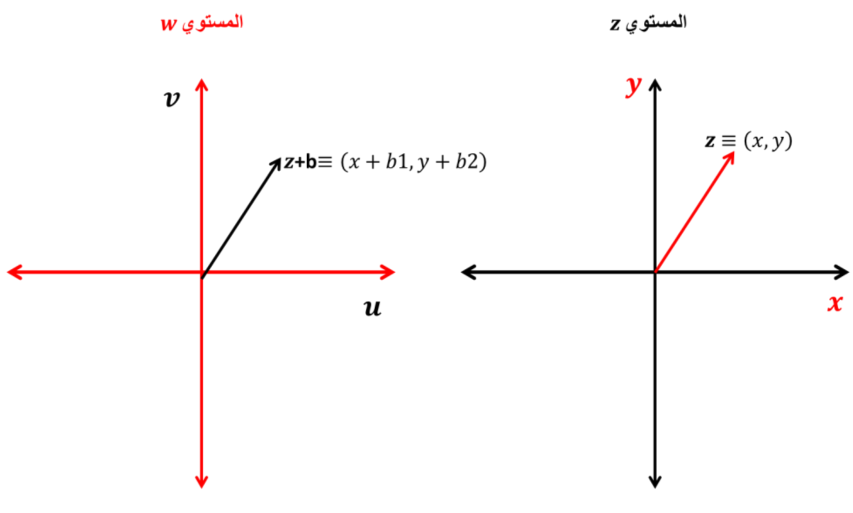
$$w = f(z) = z + b$$

وهنا نلاحظ أن كل نقطة z أزيحت بإضافة العدد b . وبما ان $b = b1 + ib2$ فأن

$$w = u + iv = x + iy + b1 + ib2$$

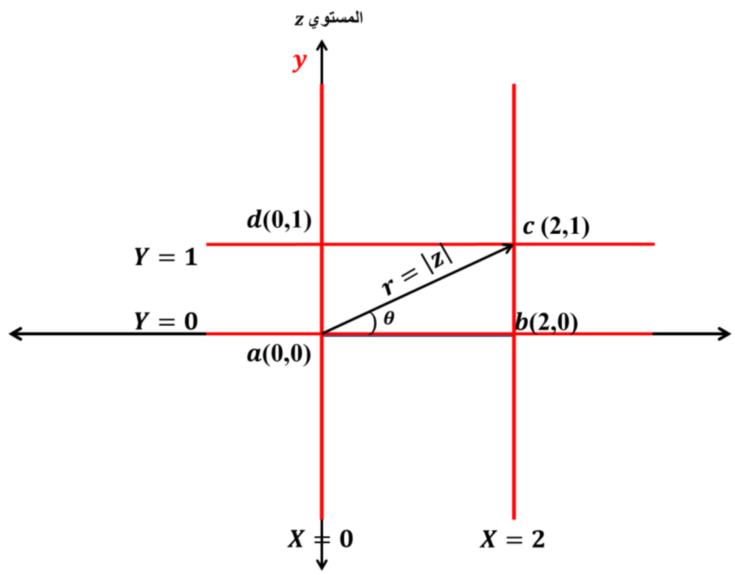
$$u = x + b1$$
$$v = y + b2$$

هذا يعني ان النقطة (x, y) في المستوي z هي النقطة $(x + b1, y + b2)$ في المستوي w كما في الشكل ادناه



مثال: افرض ان لدينا المستطيل الذي تكون من تقاطع المستقيمات $X = 0$ و $X = 2$ و $Y = 0$ و $Y = 1$ وكما موضح في الرسم ادناه حيث كل نقطة من نقاط المستطيل تكونت من تقاطع مستقيمين، جد r و θ ومن ثم باستخدام التحويل الخطي حول المستطيل في المستوي z الى المستوي w، باستخدام تحويل النقل اذا علمت بأن $w = z + 1 - 2i$.

الحل:



العدد العقدي z ممثل بالرسم بالنقطة c بحيث ان

$$z = 2 + i \equiv (2,1)$$

نستخرج قيمة r من خلال التالي:

$$r = |z| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

نستخرج قيمة θ بالدرجة من خلال:

$$\theta = \tan^{-1}\frac{1}{2} = 26.5^o$$

لاستخراج النقاط المقابلة في المستوي w نعوض نقاط المستطيل الناتجة من تقاطع كل مستقيمين في المستوي المعقد z في التحويل الخطي ، بالنسبة الى $a(0,0)$

$$w = (0 + i0) + 1 - 2i = 1 - 2i \equiv a'(1, -2)$$

اما بالنسبة الى $b(2,0)$

$$w = (2 + i0) + 1 - 2i = 3 - 2i \equiv b'(3, -2)$$

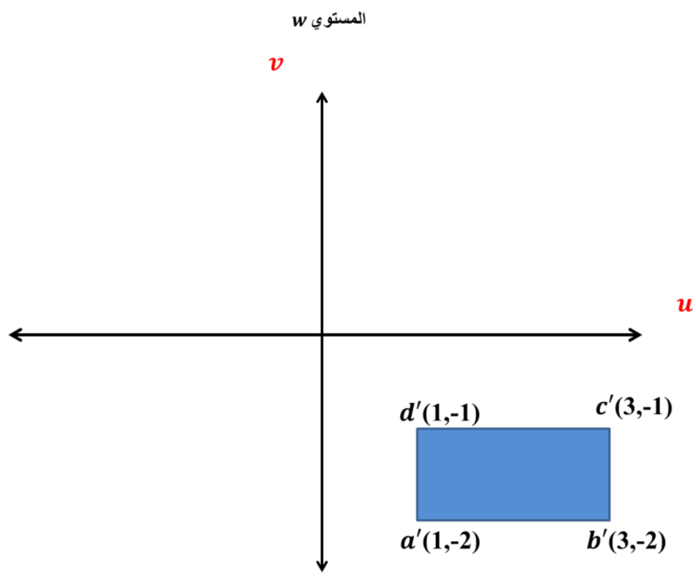
اما بالنسبة الى $c(2,1)$

$$w = (2 + i) + 1 - 2i = 3 - i \equiv c'(3, -1)$$

اما بالنسبة الى $d(0,1)$

$$w = (0 + i) + 1 - 2i = 1 - i \equiv d(1, -1)$$

لذلك نعين نقاط المستوي w كما في الشكل ادناه:



٢- تحويل التدوير (ازاحة بمقدار $arg\{a\}$ (Rotation Transformation:

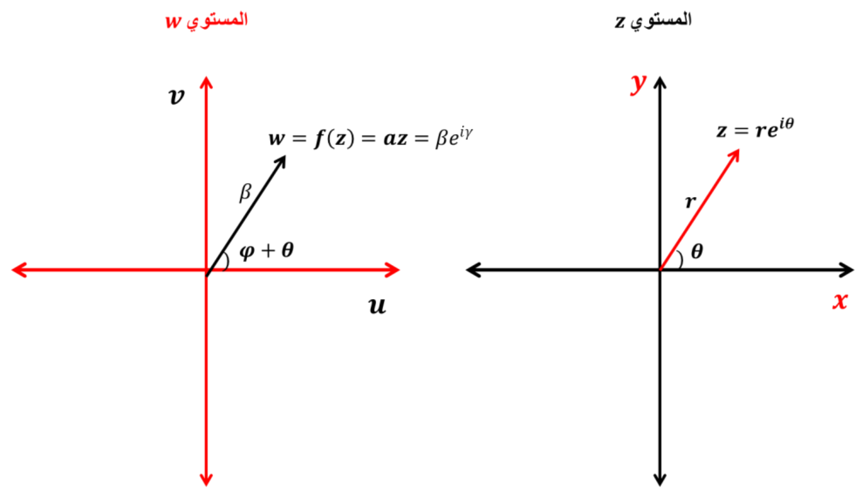
إذا كان $b = 0$ و a اختيارية وهو عدد معقد أي أن

$$w = f(z) = az$$

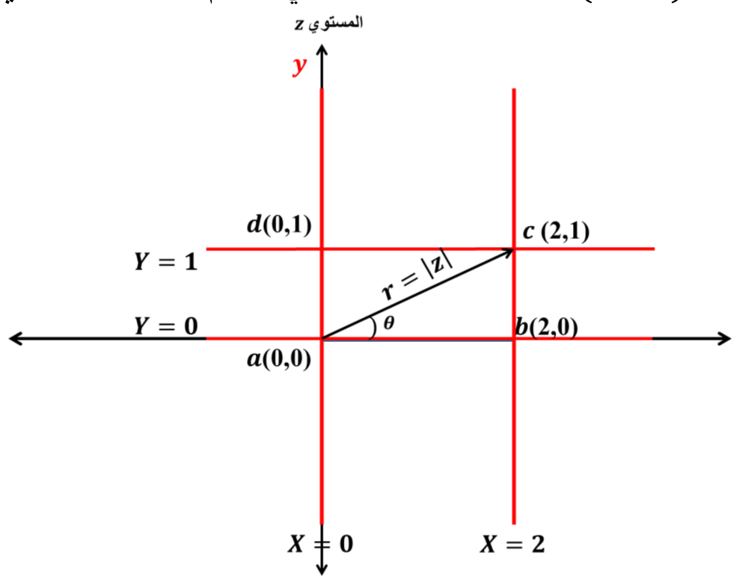
حيث أن $a = \rho e^{i\varphi}$ و $z = re^{i\theta}$ ، وعلية يكون

$$w = f(z) = \rho r e^{i(\varphi + \theta)} = \beta e^{i\gamma}$$

هذا النوع من التحويل يعني تدوير (ازاحة) المتجه z حول نقطة الاصل بزاوية φ حيث $\varphi = arg\{a\}$ مع تصغير او تكبير هذا المتجه بمقدار ρ حيث $\rho = |a|$.



مثال: استعمل التحويل $w = (1 + i)z$ بنقل المستطيل في الرسم ادناه من المستوي z الى المستوي w.



الحل:

$$w = f(z) = \rho r e^{i(\varphi+\theta)} = \beta e^{i\gamma}$$

نجد r و θ :

$$r = \sqrt{5}$$

$$\theta = 26.5^0$$

نستخرج ρ و φ من

$$\rho = |a| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{1}{1} = 45^0$$

وبالتالي فأن β والزاوية γ تكون

$$\beta = r\rho = \sqrt{10}$$

$$\gamma = 71.5^0$$

لذا فأن $f(z)$ تكون

$$f(z) = \beta e^{i\gamma} = \sqrt{10}e^{i71.5}$$

لاستخراج النقاط المقابلة في المستوي w نعوض نقاط المستطيل - الناتجة من تقاطع كل مستقيمين في المستوي المعقد z - في التحويل الخطي ، بالنسبة الى $a(0,0)$

$$w = (1+i)(0+i0) \equiv a'(0,0)$$

اما بالنسبة الى $b(2,0)$

$$w = (1+i)(2+i0) \equiv b'(2,2)$$

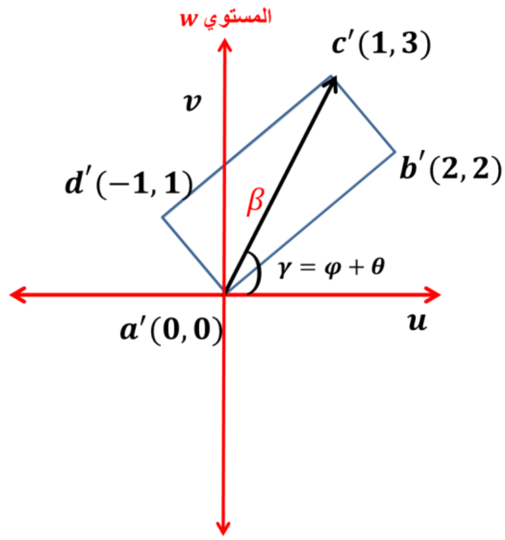
اما بالنسبة الى $c(2,1)$

$$w = (1+i)(2+i) \equiv c'(1,3)$$

اما بالنسبة الى $d(0,1)$

$$w = (1+i)(0+i) \equiv d'(-1,1)$$

لذلك نعين نقاط المستوي w كما في الشكل ادناه:

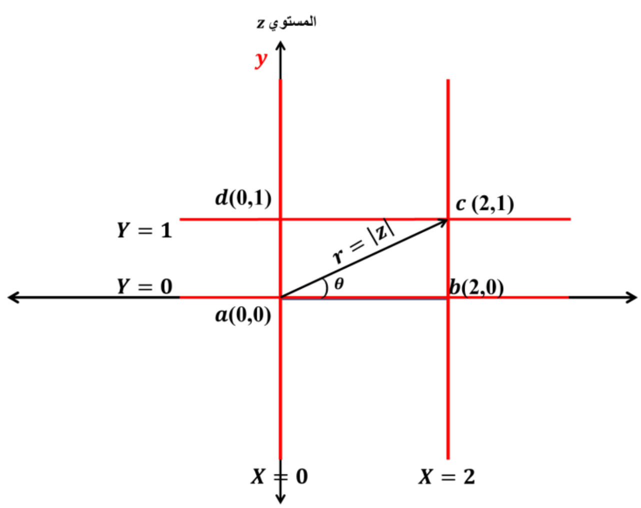


٣- تحويل النقل و التدوير (ازاحة بمقدار b و $\{arg\{a\}$)

Transport &Rotation Transformation

يجمع التحويل $w = az + b$ بين تحويل النقل و التدوير وكما مبين في المثال التالي:

مثال: أستخدم التحويل $w = (1 + i)z + (1 - 2i)$ لنقل المستطيل الى المستوي w



$$w = f(z) = \rho r e^{i(\varphi+\theta)} = \beta e^{i\gamma}$$

كما في المثال اعلاه نجد r و θ :

$$r = \sqrt{5}$$

$\theta = 26.5^0$

نستخرج ρ و φ من

$\rho = |a| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\varphi = \tan^{-1}\frac{1}{1} = 45^0$

وبالتالي فأن β والزاوية γ تكون

$\beta = r\rho = \sqrt{10}$

$\gamma = 71.5^0$

لذا فأن $f(z)$ تكون

$f(z) = \beta e^{i\gamma} = \sqrt{10}e^{i71.5}$

لاستخراج النقاط المقابلة في المستوي w نعوض نقاط المستطيل - الناتجة من تقاطع كل مستقيمين في المستوي المعقد z - في التحويل الخطي $w = (1+i)z + (1-2i)$ ، بالنسبة الى $a(0,0)$

$w = (1+i)(0+i0) + 1 - 2i = 1 - 2i \equiv a'(1,-2)$

اما بالنسبة الى $b(2,0)$

$w = (1+i)(2+i0) + 1 - 2i = 3 - 0i \equiv b'(3,0)$

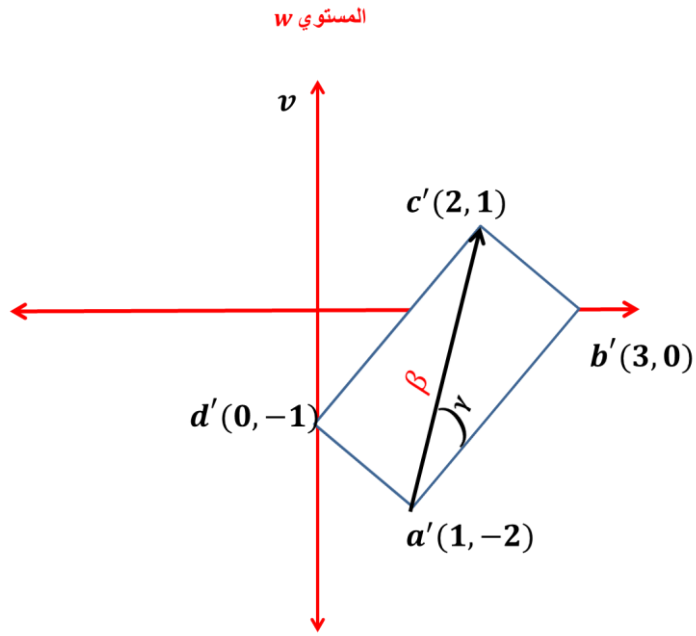
اما بالنسبة الى $c(2,1)$

$w = (1+i)(2+i) + 1 - 2i = 2 + i \equiv c'(2,1)$

اما بالنسبة الى $d(0,1)$

$w = (1+i)(0+i) + 1 - 2i = 0 - i \equiv d'(0,-1)$

لذلك نعين نقاط المستوي w كما في الشكل ادناه:


المستوي w
v
$c'(2,1)$
$b'(3,0)$
$d'(0,-1)$
β
γ
$a'(1,-2)$

الدوال البسيطة:

١- **الدوال المعقدة الآسية :** تكتب الدالة المعقدة الآسية $f(z) = e^z$ في المستوي المعقد بدلالة الاحداثيات المتعامدة وباستخدام صيغة اويلر كالآتي:

$$f(z) = e^z$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

لحالة $y = 0$ ، الدالة المعقدة الآسية تكون

$$e^z = e^x$$

نلاحظ ان هذه الدالة تتحول الى دالة آسية لمتغيرات حقيقية. اما عندما $x = 0$ ، الدالة المعقدة الآسية تكون

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y$$

وتعرف بصيغة اويلر. ان الدالة الاسية المعقدة تحقق قانون الاشتقاق لكل z

$$\frac{d}{dz}e^z = e^z$$

يمكن اعادة كتابة صيغة الدالة المعقدة الآسية $f(z) = e^z$ في المستوي المعقد بدلالة الاحداثيات المتعامدة وباستخدام صيغة اويلر بالشكل:

$$f(z) = e^z = (e^x\cos y) + i(e^x\sin y)$$

الصيغة القطبية للدالة المعقدة الآسية

$$f(z) = e^z = (\rho\cos\varphi) + i(\rho\sin\varphi)$$

من المقارنة بين الصيغتين نجد ان

$$\rho = e^x$$

و

$$\varphi = y$$

حيث تقاس y بنصف قطرية وهي الزاوية القطبية للدالة المعقدة الآسية ويرمز لها بالرمز $arg\,(f(z))$ **ويتم حسابها بنفس طريقة حساب θ في الفصل الاول.**

اما بالنسبة للقيمة المطلقة للدالة المعقدة الآسية فهي

$$|f(z)| = |\, e^z|$$

$$= \left|\, e^x\, e^{iy}\right| = |e^x\,||e^{iy}|$$

$$= |e^x||(cosy + isiny)|$$

$$= e^x\sqrt{cos^2y + sin^2y}$$

$$|f(z)| = e^x = \rho$$

ان المعادلة الاخيرة تتيح لنا حساب ρ بنفس طريقة حساب r من القيمة المطلقة $|z|$ في الفصل الاول. ان $e^x > 0$ لكل عدد حقيقي x لهذا فأن $|e^z| > 0$ وان $e^z \neq 0$ لكل عدد عقدي z. هذا يعني ان مدى الدالة المعقدة الآسية هو كل المستوي العقدي ماعدا نقطة الاصل.

اما الجزء الحقيقي و الخيالي للدالة المعقدة الآسية $f(z) = e^z$ فهما:

$$Re(e^z) = e^x cosy$$

$$Im(e^z) = e^x siny$$

مثال: اكتب $f(z) = e^{z^2}$ بدلالة الاحداثيات المتعامدة وباستخدام صيغة اويلر ، وما الجزء الحقيقي، والخيالي، والزاوية والقيمة المطلقة للدالة المعقدة الاسية ؟

الحل: نكتب الدالة الاسية بدلالة الاحداثيات المتعامدة x و y وباستخدام صيغة اويلر، بالشكل التالي:

$$e^{z^2} = e^{(x^2-y^2)+2ixy} = e^{(x^2-y^2)}(cos(2xy) + isin(2xy))$$

لغرض ايجاد الجزء الحقيقي والخيالي ، نعيد كتابة المعادلة اعلاه بالشكل التالي:

$$e^{z^2} = \left(e^{(x^2-y^2)}cos(2xy)\right) + i\left(e^{(x^2-y^2)}sin(2xy)\right)$$

من المعادلة اعلاه ، الجزء الحقيقي يكون:

$$Re\left(e^{z^2}\right) = e^{(x^2-y^2)}cos(2xy)$$

والجزء الخيالي يكون:

$$Im\left(e^{z^2}\right) = e^{(x^2-y^2)}sin(2xy)$$

اما زاوية الدالة المعقدة الآسية تكون:

$$arg\left(e^{z^2}\right) = 2xy$$

والقيمة المطلقة للدالة المعقدة الآسية تكون:

$$\left|e^{z^2}\right| = e^{(x^2-y^2)}\sqrt{cos^2(2xy) + sin^2(2xy)} = e^{(x^2-y^2)}$$

مثال: اثبت ان $e^{z+2\pi i} = e^z$.

الحل:

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos(2\pi) + \mathrm{i}\sin(2\pi)) = e^z(1 + i0)$$

$$= e^z$$

مثال: جد حل الدالة الاسية المعقدة $e^z = -1$.

الحل: يمكن ان نكتب (-1) بالصيغة القطبية التالية:

$$-1 = 1(cos\pi + isin\pi)$$

حيث ان

$$\rho = |e^x| = |e^z| = |-1 + 0| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$$

$$\varphi = tan^{-1}\left(\frac{0}{-1}\right) = \pi$$

من مساواة صيغة الدالة المعقدة الآسية وصيغة الدالة المعقدة القطبية يمكن كتابة

$$e^x(cosy + isiny) = 1(cos\pi + isin\pi)$$

نجد ان

$$e^x = 1 \qquad x = 0$$

و

$$y = \pi$$

ولعدد k من الدورات تكون y :

$$y = \pi + 2k\pi \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \dots \dots ..$$

وبالتالي يكون الحل

$$z = x + iy = i\pi(1 + 2k)$$

مثال: جد حل الدالة الاسية المعقدة $e^{2z} = 1 + i$.

الحل: يمكن ان نكتب (1+i) بالصيغة القطبية التالية :

$$1 + i = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$$

حيث

$$\rho = |e^{2x}| = |e^{2z}| = |1 + i| = \sqrt{(1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\varphi = tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

من مساواة صيغة الدالة المعقدة الآسية وصيغة الدالة المعقدة القطبية يمكن كتابة

$$e^{2x}(cos2y + isin2y) = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$$

حيث

$$e^{2x} = \sqrt{2}$$

بأخذ اللوغاريتم للطرفين

$$ln(e^{2x}) = ln(\sqrt{2})$$

$$2x = ln(\sqrt{2})$$

$$x = \frac{1}{2}ln(\sqrt{2}) = ln(\sqrt{2})^{\frac{1}{2}} = ln(2)^{\frac{1}{4}}$$

$$x = ln\sqrt[4]{2}$$

و

$$y = \frac{\pi}{8}$$

ولعدد k من الدورات تكون y :

$$y = \left(\frac{\pi + 8k\pi}{8}\right)$$

وبالتالي يكون الحل

$$z = x + iy = ln\sqrt[4]{2} + i\left(\frac{\pi + 8k\pi}{8}\right)$$

من خواص الدالة الاسية ما يأتي:

1- $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

2- $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$

3- $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$

4- $(e^z)^n = e^{nz}$

حيث ان n عدد صحيح.

تمارين:

اثبت مايآتي

١- $e^{(2+3\pi i)} = -e^{2}$ ٢- $e^{\left(\frac{2+\pi i}{4}\right)} = \sqrt{e}\,\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ٣- $e^{z+\pi i} = -e^{z}$

جد حل الدوال الاسية المعقدة التالية:

١- $e^{z} = 1$

٢- $e^{z} = 2 - 2i$

٣- $e^{2z} = i$

٤- $e^{4z} = i$

٥- $e^{z} = 1 + i\sqrt{3}$

٢- **الدوال المثلثية المعقدة :** تعرف الدوال المثلثية $\sin z$ و $\cos z$ والدوال الاخرى بدلالة الدالة الاسية للمتغير z كما يأتي:

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z \qquad (1)$$

$$e^{-iz} = \cos z - i\sin z \qquad (2)$$

من جمع المعادلتين اعلاه نحصل على

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

من طرح المعادلتين اعلاه نحصل على

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

بالنسبة الى تفاضل كل من $\cos z$ و $\sin z$ فيكون

$$\frac{d}{dz}\cos z = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = i\frac{\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)}{2} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z$$

$$\frac{d}{dz}\sin z = \frac{ie^{iz} - \left(-ie^{-iz}\right)}{2i} = i\frac{\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

بالنسبة للدالة المثلثية المعقدة $\cos z$ يمكن كتابتها بالصيغة الرياضية التالية:

$$\cos z = \cos x \ \cosh y - i\sin x \ \sinh y$$

حيث يمكن اثبات العلاقة اعلاه من خلال التالي:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad , z = x + iy$$

$$\cos z = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^{y}}{2} \qquad , \quad ii = -1 \quad , -ii = 1$$

$$\cos z = \frac{e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^{y}(\cos x - i\sin x)}{2}$$

$$\cos z = \cos x\left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right) - i\sin x\left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right)$$

$$\cos z = \cos x \ \cosh y - i\sin x \ \sinh y$$

يمكن ايجاد القيمة المطلقة $\cos z$ بشكل التالي:

$$|cos\, z| = |cos(x+iy)| = |cos\, x\ coshy - i\, sinx\ sinh\, y|$$

$$= \sqrt{cos^2x\, cosh^2y + sin^2 x\ sinh^2 y} \qquad , -ii = 1$$

$$= \sqrt{cos^2x(1+sinh^2y) + (1-cos^2x)\ sinh^2 y}$$

$$= \sqrt{cos^2x + cos^2xsinh^2y + sinh^2 y - cos^2x\ sinh^2 y}$$

$$|\cos z| = \sqrt{cos^2x + sinh^2 y}$$

كذلك الحال بالنسبة للقيمة المطلقة $sin\, z$ (اختبر نفسك)

$$|\sin z| = \sqrt{sin^2x + sinh^2 y}$$

الان نريد ان اثبت $sinz_1\, cosz_2 + cosz_1\, sinz_2 = \sin(z_1+z_2)$

$$sinz_1\, cosz_2 + cosz_1\, sinz_2 =$$

$$= \left(\frac{e^{iz_1}-e^{-iz_1}}{2i}\right)\left(\frac{e^{iz_2}+e^{-iz_2}}{2}\right) + \left(\frac{e^{iz_1}+e^{-iz_1}}{2}\right)\left(\frac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2i}\right)$$

$$= \left[\frac{1}{2i\times 2}(e^{iz_1}-e^{-iz_1})(e^{iz_2}+e^{-iz_2})\right] + \left[\frac{1}{2\times 2i}(e^{iz_1}+e^{-iz_1})(e^{iz_2}-e^{-iz_2})\right]$$

$$= \frac{\left[e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} - e^{i(z_2-z_1)} - e^{-i(z_1+z_2)}\right] + \left[e^{i(z_1+z_2)} - e^{i(z_1-z_2)} + e^{i(z_2-z_1)} - e^{-i(z_1+z_2)}\right]}{4i}$$

$$= \frac{2e^{i(z_1+z_2)} - 2e^{-i(z_1+z_2)}}{4i} = \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} = \sin(z_1+z_2)$$

بطريقة اخرى

$$\sin(z_1+z_2) = \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i}$$

$$= \frac{e^{iz_1}.e^{iz_2} - e^{-iz_1}.e^{-iz_2}}{2i}$$

$$= \frac{[(cosz_1 + isinz_1)(cosz_2 + isinz_2)] - [(cosz_1 - isinz_1)(cosz_2 - isinz_2)]}{2i}$$

$$= \frac{[cosz_1 cosz_2 + cosz_1 isinz_2 + isinz_1 cosz_2 - sinz_1 sinz_2] - [cosz_1 cosz_2 - cosz_1 isinz_2 - isinz_1 cosz_2 - sinz_1 sinz_2]}{2i}$$

$$= \frac{2icosz_1 sinz_2 + 2isinz_1 cosz_2}{2i}$$

$$= sinz_1 \, cosz_2 + cosz_1 \, sinz_2$$

بالنسبة للدالة المثلثية المعقدة ادناه

$$tan\, z = \left(\frac{sinx \cos x}{cos^2 x \; + \; sinh^2 y}\right) + i\left(\frac{coshy \;\, sinh\, y}{cos^2 x \; + \; sinh^2 y}\right)$$

فيكون اثباتها من خلال

$$tan\, z = \frac{sin\, z}{cos\, z} = \frac{sin(x+iy)}{cos(x+iy)} = \frac{sinx\; coshy + i\cos x \;\, sinh\, y}{\cos x \;\, coshy - isinx \;\, sinh\, y}$$

$$= \frac{sinx\; coshy + i\cos x \;\, sinh\, y}{\cos x \;\, coshy - isinx \;\, sinh\, y} \cdot \frac{\cos x \;\, coshy + isinx \;\, sinh\, y}{\cos x \;\, coshy + isinx \;\, sinh\, y}$$

$$= \frac{sinx \cos x\, cosh^2 y + isin^2 x\; coshy \;\, sinh\, y + i\cos^2 x \;\, sinh\, y\, coshy - \cos x\, sinx \;\, sinh^2 y}{cos^2 x \; + \; sinh^2 y}$$

$$= \frac{sinx \cos x\, (cosh^2 y - \; sinh^2 y) + i(cos^2 x + sin^2 x)\; coshy \;\, sinh\, y}{cos^2 x \; + \; sinh^2 y}$$

$$= \frac{sinx \cos x + i\; coshy \;\, sinh\, y}{cos^2 x \; + \; sinh^2 y}$$

$$= \left(\frac{sinx \cos x}{cos^2 x \; + \; sinh^2 y}\right) + i\left(\frac{coshy \;\, sinh\, y}{cos^2 x \; + \; sinh^2 y}\right)$$

الان نحاول ان نثبت ان

$$sin^3 x = \frac{3sinx - sin3x}{4}$$

يكون ذلك من خلال

$$sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \left(\frac{1}{2i}\right)^3 (e^{ix} - e^{-ix})^3$$

$$= \left(\frac{1}{2i}\right)^3 \left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2i}\right)^3 \left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\left(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2i}\right)^3 \left(e^{3ix} - 2e^{ix} + e^{-ix} - e^{ix} + 2e^{-ix} - e^{-3ix}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2i}\right)^3 \left(\left(e^{3ix} - e^{-3ix}\right) - 3\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{\left(e^{3ix} - e^{-3ix}\right)}{2i} - 3\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)\right)$$

$$= \frac{3sinx - sin3x}{4}$$

مثال: اثبت ان $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$

الحل:

الدالة المثلثية المعقدة $sin\, z$ تعطى بالعلاقة التالية:

$$sin\, z = sinx\, coshy + i\, cos\, x\ \ sinh\, y$$

في الطرف الايسر، المترافق المعقد للدالة المثلثية المعقدة $sin\, z$ تعطى بالعلاقة التالية:

$$\overline{sin\, z} = \overline{sinx\, coshy + i\, cos\, x\ \ sinh\, y} = sinx\, coshy - i\, cos\, x\ \ sinh\, y$$

يمكن كتابة الدالة المثلثية المعقدة $sin\, z$:

$$sin\, z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

الطرف الايمن، المترافق المعقد للدالة المثلثية المعقدة $sin\, z$ في المعادلة اعلاه:

$$sin\, \bar{z} = \frac{e^{i\bar{z}} - e^{-i\bar{z}}}{2i} = \frac{e^{i(x-iy)} - e^{-i(x-iy)}}{2i} = \frac{e^{ix}e^{y} - e^{-ix}e^{-y}}{2i} \qquad , z = x + iy$$

$$= \frac{(cosx + isinx)e^{y} - (cosx - isinx)e^{-y}}{2i} = \frac{(e^{y}cosx + e^{y}isinx) - (e^{-y}cosx - e^{-y}isinx)}{2i}$$

$$= \frac{e^{y}cosx + e^{y}isinx - e^{-y}cosx + e^{-y}isinx}{2i} = \frac{(e^{y} - e^{-y})cosx + (e^{y} + e^{-y})isinx}{2i}$$

$$= cosx\frac{(e^{y}-e^{-y})}{2i} + isinx\frac{(e^{y}+e^{-y})}{2i} = -icosx\frac{(e^{y}-e^{-y})}{2} + sinx\frac{(e^{y}+e^{-y})}{2}$$

$$= sinx\frac{(e^{y}+e^{-y})}{2} - icosx\frac{(e^{y}-e^{-y})}{2}$$

$$= sinx\cosh y - icosx\sinh y$$

وبالتالي يتساوى الطرفان.

من المتطابقات الاخرى هي

$$sec\, z = \frac{1}{cos\, z}$$

$$csc\, z = \frac{1}{sin\, z}$$

$$cot\, z = \frac{cos\, z}{sin\, z}$$

$$1 + tan^2 z = sec^2 z$$

$$1 + cot^2 z = csc^2 z$$

تمرين: اختبر نفسك لأثبات الاتي:

$$sin\, z = sinx\, coshy + i\, cos\, x\ \ sinh\, y$$

$$sinz_1\, cosz_2 - cosz_1\, sinz_2 = sin(z_1 - z_2)$$

$$cosz_1\, cosz_2 + sinz_1\, sinz_2 = cos(z_1 + z_2)$$

$$cosz_1\, cosz_2 - sinz_1\, sinz_2 = cos(z_1 - z_2)$$

$$\overline{cos\, z} = cos\, \bar{z}$$

$$sin(-z) = -sin\, z$$

$$cos(-z) = cos\, z$$

$$tan(-z) = -tan\, z$$

$$cot(-z) = cot\, z$$

٣- الدوال المثلثية الزائدية المعقدة

تعرف دالة الجيب الزائدية وجيب التمام الزائدية للمتغير العقدي z بالمعادلتين:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

اما بالنسبة لاشتقاقهما:

$$\frac{d}{dz}\cosh z = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = sinh\ z$$

$$\frac{d}{dz}sinhz = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos hz$$

للدالتين $\sinh z$ و $\cosh z$ خصائص مشابهة لما هي عليه كل من $\sin z$ و $\cos z$، نجمل بعضها بما يلي:

$$sinh\ z = \frac{e^{(x+iy)} - e^{-(x+iy)}}{2} = \frac{1}{2}e^x(cosy + i\ siny) - \frac{1}{2}e^{-x}(cosy - i\ siny)$$

$$sinh\ z = cosy\frac{e^x - e^{-x}}{2} + i\ siny\frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

وعلى هذا يكون

$$sinh\ z = \sinh x\ cos\ y\ + i\cosh x\ sin\ y$$

وبطريقة مشابهة نجد

$$cosh\ z = \cosh x\ cos\ y\ + i\sinh x\ sin\ y$$

$$coshz = \frac{e^{(x+iy)} + e^{-(x+iy)}}{2} = \frac{1}{2}e^x(cosy + i\ siny) + \frac{1}{2}e^{-x}(cosy - i\ siny)$$

$$coshz = cosy\frac{e^x + e^{-x}}{2} + isiny\frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

وعلى هذا يكون

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2 = 1$$

$$\sinh(-z) = -\sinh z$$

$$\sinh(-z) = \frac{e^{-z} - e^{+z}}{2} = -\frac{e^z - e^{-z}}{2} = -\sinh z$$

$$\cosh(-z) = \cosh z$$

$$\cosh(-z) = \frac{e^{-z} + e^{+z}}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$$

$$= \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$$

$$= \left(\frac{e^{z_1} - e^{-z_1}}{2}\right)\left(\frac{e^{z_2} + e^{-z_2}}{2}\right) + \left(\frac{e^{z_1} + e^{-z_1}}{2}\right)\left(\frac{e^{z_2} - e^{-z_2}}{2}\right)$$

$$= \frac{e^{z_1+z_2} + e^{z_1-z_2} - e^{-z_1+z_2} - e^{-(z_1+z_2)}}{4} + \frac{e^{z_1+z_2} - e^{z_1-z_2} + e^{-z_1+z_2} - e^{-(z_1+z_2)}}{4}$$

$$= \frac{2e^{z_1+z_2} - 2e^{-(z_1+z_2)}}{4} = \frac{e^{z_1+z_2} - e^{-(z_1+z_2)}}{2} = \sinh(z_1 + z_2)$$

بنفس الطريقة

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$$

$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$$

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$$

$$|\sinh z|^2 = |\sinh x \cos y + i \cosh x \sin y|^2$$

$$= \left(\sqrt{\sinh^2 x \cos^2 y + \cosh^2 x \sin^2 y}\right)^2$$

$$= \sinh^2 x \cos^2 y + (1 + \sinh^2 x)\sin^2 y$$

$$= \sinh^2 x \cos^2 y + \sin^2 y + \sinh^2 x \sin^2 y$$

$$= \sinh^2 x (\cos^2 y + \sin^2 y) + \sin^2 y$$

$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$$

$$\sinh(iz) = i \sin z$$

$$\sinh(iz) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i \sin z$$

$$\cosh(iz) = \cos z$$

$$\cosh(iz) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

اما الدوال الزائدية الاربع الاخرى، يتم تعريفها بطريقة مشابهة لنظائرها من الدوال المثلثية، بحيث ان

$$\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$$

$$\operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}$$

مثال: اثبت ان

$$sinh(z + i\pi) = -sinh\, z$$

الحل:

$$sinh(z + i\pi) = \frac{e^{(z+i\pi)} - e^{-(z+i\pi)}}{2} = \frac{e^{z}e^{i\pi} - e^{-z}e^{-i\pi}}{2}$$

$$= \frac{e^{z}(cos\pi + isin\pi) - e^{-z}(cos\pi - isin\pi)}{2} = \frac{e^{z}(-1 + i0) - e^{-z}(-1 - i0)}{2}$$

$$= \frac{-e^{z} + e^{-z}}{2} = -\frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = -sinh\, z$$

بنفس الطريقة

$$cosh(z + i\pi) = -\cosh z$$

ومن اعلاه نستطيع ان نثبت

$$tanh(z + i\pi) = \frac{sinh(z + i\pi)}{cosh(z + i\pi)} = \frac{-sinh\, z}{-\cosh z} = tanh\, z$$

مثال: اثبت ان

$$1 - tanh^2 z = sech^2 z$$

الحل

$$cosh^2 z - sinh^2 z = \left(\frac{e^{z} + e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{z} - e^{-z}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2z} + 2 + e^{-2z}}{2} - \frac{e^{2z} - 2 + e^{-2z}}{2} = 1$$

اذن

$$cosh^2 z - sinh^2 z = 1$$

بالقسمة على $cosh^2 z$ نحصل على

$$\frac{cosh^2 z}{cosh^2 z} - \frac{sinh^2 z}{cosh^2 z} = \frac{1}{cosh^2 z}$$

$$1 - tanh^2 z = sech^2 z$$

٤- دالة اللوغاريتم المعقدة

الصيغة الاسية للعدد العقدي $z = re^{i\theta}$، فأن دالة اللوغاريتم الطبيعي له تكون:

$$lnz = ln\left(re^{i\theta}\right) = lnr + ln\left(e^{i\theta}\right) = ln\,r + i\theta$$

حيثlnr تمثل دالة اللوغاريتم الطبيعي للعدد الحقيقي الموجب r والذي يكون $r = |z|$ وان $\theta = \arg z$، لهذا فأنlnz دالة متعددة القيم للعدد العقدي غير الصفري z. اذا كان φ القيمة الرئيسية لـ $\arg z$ حيث $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ وبالتالي يمكن ان نكتب $\theta = \varphi + 2n\pi$ حيث ان $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots\dots..$ ، لهذا يمكن كتابة المعادلة اعلاه بالصورة التالية:

$$ln\,z = ln\,r + i(\varphi + 2n\pi)$$

حيث تبين المعادلة اعلاه ان lnz هو دالة متعددة لقيم z وبعدد غير منتهي من قيم دالة اللوغاريتم، التي لها الجزء الحقيقي نفسه، اما الجزء الخيالي فيختلف بمضاعفات صحيحة من العدد 2π.

عندما $n = 0$ نحصل على ما يسمى بالقيمة الرئيسية لدالة اللوغاريتم وتكتب بالشكل:

$$ln\,z = ln\,r + i\varphi \qquad r > 0, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi$$

حيث تكون $ln\,z$ مفردة القيمة، تحتوي منطقة تعريفها على الاعداد العقدية غير الصفرية، ومداها هي الشريحة $-\pi < Im(lnz) < \pi$.

<u>مثال:</u> اوجد ln z اذا علمت بأن $z = 1 + i$.

الحل:

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\varphi = arg\,z = tan^{-1}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$

$$ln\,(1 + i) = ln\,\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)$$

مثال: اوجد $\ln z$ اذا علمت بأن $z = \sqrt{3} + i$.

الحل:

$$r = |z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$$

$$\varphi = arg\, z = tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

$$ln\left(\sqrt{3} + i\right) = ln\, 2 + i\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right)$$

مثال: اذا علمت بأن الصيغة الأسية للعدد العقدي هي $z = re^{i\theta}$، اثبت ان

$$\frac{d}{dz}lnz = \frac{1}{z}$$

الحل:

الصيغة الأسية للعدد العقدي هي: $z = re^{i\theta}$

مشتقة الصيغة الأسية للعدد العقدي هي:

$$dz = rie^{i\theta}d\theta + e^{i\theta}dr = e^{i\theta}(ird\theta + dr)$$

$$\frac{dz}{e^{i\theta}} = ird\theta + dr \qquad (1)$$

دالة اللوغاريتم الطبيعي للعدد العقدي z تعطى:

$$lnz = ln\, r + i\theta$$

مشتقة دالة اللوغاريتم الطبيعي للعدد العقدي z :

$$dlnz = \frac{dr}{r} + id\theta = \frac{1}{r}(ird\theta + dr)$$

باستخدام (1) تصبح المعادلة اعلاه

$$dlnz = \frac{1}{r}\frac{dz}{e^{i\theta}}$$

$$\frac{d}{dz}lnz = \frac{1}{z}$$

من الخواص الاخرى ، اذا كان z_1 و z_2 عددين عقديين غير صفريين، حيث

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \quad , \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

من السهولة ان نبرهن ان

$$lnz_1z_2 = lnz_1 + lnz_2$$

$$lnz_1z_2 = \ln\left(r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2}\right) = ln\left(r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}\right) = lnr_1r_2 + i(\theta_1 + \theta_2)$$

لتبسيط المعادلة اعلاه نستخدم

$$lnr_1r_2 = lnr_1 + lnr_2$$

وبالتالي

$$lnz_1z_2 = lnr_1 + lnr_2 + i\theta_1 + i\theta_2 = (lnr_1 + i\theta_1) + (lnr_2 + i\theta_2)$$

$$lnz_1z_2 = lnz_1 + lnz_2$$

مثال: افرض أن الصيغة الكارتيزية لكل من z_1 و z_2 تعطى

$$z_1 = e^{i\pi} \quad , \quad z_2 = e^{-i\pi}$$

اثبت ان

$$lnz_1z_2 = lnz_1 + lnz_2$$

بالنسبة للطرف الايسر

$$lnz_1z_2 = l\,n\left(e^{i\pi}.\,e^{-i\pi}\right) = l\,n(e^0) = l\,n\,1 = 0$$

بالنسبة للطرف الايمن

$$lnz_1 + lnz_2 = ln\left(e^{i\pi}\right) + ln\left(e^{-i\pi}\right) = i\pi - i\pi = 0$$

نلاحظ ان

$$lnz_1z_2 = lnz_1 + lnz_2$$

وهي ليس لجميع القيم، فعلى سبيل المثال نفرض ان الصيغة الكارتيزية لكل من z_1 و z_2 تعطى

$$z_1 = z_2 = e^{i\pi}$$

نحاول اثبات ان

$$lnz_1z_2 = lnz_1 + lnz_2$$

بالنسبة للطرف الايسر

$$lnz_1z_2 = ln\left(e^{i\pi}.e^{i\pi}\right) = ln(e^{i2\pi})$$

$$lnz_1z_2 = l\,n(cos2\pi + isin2\pi) = l\,n(1+0) = 0$$

وبالنسبة للطرف الأيمن

$$lnz_1 + lnz_2 = ln(e^{i\pi}) + ln(e^{i\pi})$$

$$lnz_1 + lnz_2 = i\pi + i\pi = i2\pi$$

نلاحظ ان

$$lnz_1z_2 \neq lnz_1 + lnz_2$$

كذلك من الخواص الاخرى هي

$$ln\frac{z_1}{z_2} = lnz_1 - lnz_2$$

اثبت بنفس اسلوب اثبات

$$lnz_1z_2 = lnz_1 + lnz_2$$

ايضاً من الخواص

$$ln\left(z^{\frac{1}{m}}\right)=\frac{1}{m}lnz \qquad m=1,2,\ldots,\ldots,$$

لأثبات تلك العلاقة نتبع التالي:

الصيغة القطبية للعدد العقدي تعطى بالشكل

$$z=r(cos\theta+isin\theta)$$

باستخدام تعميم الزاوية القطبية

$$z=r\big(cos(\theta+2\pi k)+isin(\theta+2\pi k)\big)$$

نجذر الطرفين بالنسبة الى m

$$z^{\frac{1}{m}}=r^{\frac{1}{m}}[cos(\theta+2\pi k)+isin(\theta+2\pi k)]^{\frac{1}{m}}$$

باستخدام نظرية دي موفر للطرف الايمن

$$=r^{\frac{1}{m}}\left(\left[cos\left(\frac{\theta+2\pi k}{m}\right)+isin\left(\frac{\theta+2\pi k}{m}\right)\right]\right)$$

يمكن كتابة المعادلة اعلاه بالصيغة الآسية

$$z^{\frac{1}{m}}=r^{\frac{1}{m}}e^{i\left(\frac{\theta+2\pi k}{m}\right)}$$

من معادلة اللوغاريتم الطبيعي للعدد العقدي بالصيغة الأسية تكون المعادلة اعلاه بالشكل التالي:

$$lnz^{\frac{1}{m}}=lnr^{\frac{1}{m}}+i\left(\left(\frac{\theta+2\pi k}{m}\right)+2\pi n\right)$$

$$lnz^{\frac{1}{m}}=lnr^{\frac{1}{m}}+i\left(\frac{\theta+2\pi k+2\pi nm}{m}\right)=\frac{1}{m}\big(lnr+i(\theta+2\pi q)\big) \qquad ,q=(k+nm)$$

$$lnz^{\frac{1}{m}}=\frac{1}{m}lnz$$

من الخواص الاخرى هي

$$e^{lnz} = z$$

حيث ان الطرف الايسر

$$e^{lnz} = e^{ln|z|+i\theta} = e^{ln|z|}e^{i\theta} = |z|e^{i\theta} = re^{i\theta} = z$$

من الخواص الاخرى هي

$$lnz^n = nlnz$$

وهي ليست بصورة عامة

مثال: اثبت ان

$$ln(1+i)^2 = 2ln(1+i)$$

الحل:

بالنسبة للطرف الايسر

$$ln(1+i)^2 = ln(1+2i-1) = \ln(0+2i)$$

$$ln2i = ln(0^2+2^2)^{\frac{1}{2}} + i\tan^{-1}\left(\frac{2}{0}\right)$$

$$ln2i = ln2 + i\tan^{-1}(\infty)$$

$$ln2i = ln2 + i\frac{\pi}{2}$$

بالنسبة للطرف الايمن

$$2ln(1+i) = 2\left[ln\sqrt{1^2+1^2} + i\tan^{-1}\frac{1}{1}\right]$$

$$= 2\left[ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= 2ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{2}$$

$$= ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 + i\frac{\pi}{2}$$

$$2ln(1+i) = ln2 + i\frac{\pi}{2}$$

وبالتالي:

$$ln(1+i)^2 = 2ln(1+i)$$

وهو المطلوب

مثال: اثبت ان

$$ln((-1+i)^4) \neq 4ln(-1+i)$$

الحل:

بالنسبة للطرف الايسر

$$ln((-1+i)^4) = ln(((-1+i)^2)^2)$$

$$ln((-1+i)^4) = ln((1-2i-1)^2) = ln((-2i)^2)$$

$$= ln(-4) = ln((-4)^2+0^2)^{\frac{1}{2}} + i\tan^{-1}\left(\frac{0}{-4}\right)$$

$$ln((-1+i)^4) = ln(4) + i\pi$$

بالنسبة للطرف الايمن

$$4ln(-1+i) = 4\left[ln\sqrt{1^2+1^2} + i\tan^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right)\right]$$

$$= 4\left[ln\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4}\right]$$

$$= 4ln\sqrt{2} + i3\pi$$

$$= 2ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 + i3\pi$$

$$= 2ln2 + i3\pi$$

وبالتالي

$$ln((-1+i)^4) \neq 4ln(-1+i)$$

وهو المطلوب

٦- دوال القوى المعقدة

تعرف الدالة الآسية العامة a^z ، $a \neq 0$ بالمعادلة:

$$a^z = e^{z \ln a}$$

وعندما $z = 0$، تكون $a^0 = 1$ وبخلافه فأن

$$\ln a = \ln|a| + i\, arg\{a\}$$

ويكون للدالة الآسية العامة متعددة القيم

$$a^z = e^{z\{\ln|a| + i\,(\arg\{a\} + 2n\pi)\}}$$

مثال: اثبت ان

$$(1+i)^i = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{4}}}\left[\cos\left(\frac{\ln(2)}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\ln(2)}{2}\right)\right]$$

الحل:

باستخدام

$$a^z = e^{z \ln a}$$

نعيد كتابة $(1+i)^i$ على شكل

$$(1+i)^i = e^{i \ln(1+i)} = e^{i(\ln|a| + i\, arg\{a\})}$$

$$= e^{i\left\{\ln\left(\sqrt{1^2+1^2}\right) + i \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right)\right\}}$$

$$= e^{i\left\{\ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4}\right\}} = e^{-\frac{\pi}{4}} e^{i\ln(\sqrt{2})}$$

$$p\ln f = \ln f^p$$

باستخدام صيغة اويلر نحصل على

$$(1+i)^i = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{4}}}\left[\cos\left(\frac{\ln(2)}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\ln(2)}{2}\right)\right]$$

مثال: اثبت ان

$$2i^{(-2i)} = e^{\pi}[cos(ln(4)) - isin(ln(4))]$$

الحل:

باستخدام

$$a^z = e^{z\,ln\,a}$$

نعيد كتابة $2i^{(-2i)}$ على شكل

$$= e^{-2i\left\{ln\left(\sqrt{0^2+2^2}\right)+i\,tan^{-1}\left(\frac{2}{0}\right)\right\}}$$

$$= e^{-2i\left\{ln(2)+i\frac{\pi}{2}\right\}} = e^{\pi}e^{-2iln(2)} = e^{\pi}e^{-iln(4)} \qquad ,\ plnf = lnf^{p}$$

باستخدام صيغة اويلر نحصل على

$$2i^{(-2i)} = e^{\pi}[cos(ln(4)) - isin(ln(4))]$$

مثال: اذا علمت بأن $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$ ، اثبت ان

$$-(-i)^i = e^{\frac{\pi}{2}}[cos(\pi) + isin(\pi)]$$

الحل:

باستخدام $a^z = e^{z\,ln\,a}$ ، نعيد كتابة $(-i)^i$ على شكل

$$(-i)^i = e^{i\left\{ln\left(\sqrt{0^2+(-1)^2}\right)+i\,tan^{-1}\left(\frac{-1}{0}\right)\right\}}$$

وبالتالي فأن $-(-i)^i$

$$-(-i)^i = -1e^{i\left\{ln(1)-i\frac{\pi}{2}\right\}} = -e^{\frac{\pi}{2}} \qquad ,where\ ln(1) = 0$$

$$-(-i)^i = e^{\frac{\pi}{2}}[cos(\pi) + isin(\pi)] \qquad ,where\ -1 = cos(\pi) + isin(\pi)$$

مثال: اثبت ان

$$(1-i)^{4i}=\frac{cos\big(ln(4)\big)}{e^{7\pi}}+i\,\frac{sin\big(ln(4)\big)}{e^{7\pi}}$$

الحل: باستخدام $a^z = e^{z\,ln\,a}$ ، نعيد كتابة $(1-i)^{4i}$على شكل

$$(1-i)^{4i}=e^{4i\left\{ln\left(\sqrt{1^2+(-1)^2}\right)+i\,tan^{-1}\left(\frac{-1}{1}\right)\right\}}$$

$$=e^{4i\left\{ln(\sqrt{2})+i\frac{7\pi}{4}\right\}}=e^{\{4iln(\sqrt{2})-7\pi\}}=e^{-7\pi}e^{4iln(\sqrt{2})}=e^{-7\pi}e^{iln(\sqrt{2})^4}=e^{-7\pi}e^{iln4}$$

باستخدام صيغة اويلر نحصل على

$$(1-i)^{4i}=\frac{cos\big(ln(4)\big)}{e^{7\pi}}+i\,\frac{sin\big(ln(4)\big)}{e^{7\pi}} \qquad ,where\ e^{-7\pi}=\frac{1}{e^{7\pi}}$$

٧- معكوس الدوال المثلثية المعقدة

يمكن تعريف معكوس الدوال المثلثية بدلالة الدالة اللوغاريتمية، لتعريف دالة معكوس دالة جيب للعدد العقدي z :

$$w = sin^{-1} z$$

يمكن كتابة المعادلة اعلاه

$$z = sin\, w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

وبالتالي:

$$2iz = e^{iw} - e^{-iw}$$

بضرب الطرفين بـ e^{iw} نحصل على

$$2ize^{iw} = e^{2iw} - 1$$

ومنها نحصل على معادلة من الدرجة الثانية في e^{iw}

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$$

لنفرض ان $v = e^{iw}$ ونعيد كتابة المعادلة اعلاه، وبالتالي:

$$v^2 - 2izv - 1 = 0$$

باستخدام طريقة الدستور

$$v = iz + \sqrt{1 - z^2}$$

$$v = iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$$

باستخدام $a^z = e^{z \ln a}$ بالنسبة الى $(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$ في المعادلة اعلاه، نحصل

$$v = iz + e^{\left(\frac{1}{2}[ln|1-z^2|+i\, arg\{1-z^2\}]\right)} = iz + e^{\left(\frac{1}{2}ln|1-z^2|+\frac{i}{2}arg\{1-z^2\}\right)}$$

$$v = iz + e^{\left(ln|1-z^2|^{\frac{1}{2}}+\frac{i}{2}arg\{1-z^2\}\right)}$$

$$v = iz + |1 - z^2|^{\frac{1}{2}} e^{\left(\frac{i}{2} arg\{1-z^2\}\right)}$$

باستخدام التعريف

$$v = e^{iw}$$

واخذ اللوغاريتم

$$iw = lnv$$

$$w = \frac{1}{i} lnv = \frac{1}{i} ln\left\{iz + |1 - z^2|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2} arg\{1-z^2\}}\right\}$$

$$w = sin^{-1} z = \frac{1}{i} ln\left\{iz + |1 - z^2|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2} arg\{1-z^2\}}\right\}$$

او

$$w = sin^{-1} z = \frac{1}{i} ln\left\{iz + \sqrt{1 - z^2}\right\}$$

بنفس الطريقة (اختبر نفسك) نستطيع اثبات ان

$$cos^{-1} z = w = \frac{1}{i} ln\left\{z + |z^2 - 1|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2} arg\{z^2-1\}}\right\}$$

او

$$cos^{-1} z = w = \frac{1}{i} ln\left\{z + \sqrt{z^2 - 1}\right\}$$

الان نحاول ان نثبت ان

$$tan^{-1} z = \frac{1}{2i} ln\left(\frac{i - z}{i + z}\right)$$

$$w = tan^{-1} z$$

$$z = \tan w = \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{\left(\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}\right)}{\left(\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}\right)} = \frac{1}{i}\left(\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}}\right)$$

$$iz = \left(\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}}\right)$$

$$iz\left(e^{iw} + e^{-iw}\right) = e^{iw} - e^{-iw}$$

نضرب طرفي المعادلة اعلاه e^{iw} نحصل

$$iz\left(e^{2iw} + 1\right) = e^{2iw} - 1$$

نرتب المعادلة اعلاه

$$ize^{2iw} + iz = e^{2iw} - 1$$

$$ize^{2iw} - e^{2iw} = -1 - iz$$

$$(iz - 1)e^{2iw} = -1 - iz$$

نضرب طرفي المعادلة بـ i

$$-(z + i)e^{2iw} = -(i - z)$$

$$e^{2iw} = \frac{i - z}{z + i}$$

نأخذ اللوغاريتم للطرفين

$$2iw = ln\left(\frac{i - z}{z + i}\right)$$

$$w = \frac{1}{2i} ln\left(\frac{i - z}{z + i}\right)$$

$$w = tan^{-1}z = \frac{1}{2i} ln\left(\frac{i - z}{z + i}\right)$$

مثال: اثبت ان

$$sin^{-1}(2) = \frac{\pi}{2} - iln(2+\sqrt{3})$$

الحل:

$$w = sin^{-1}(z) = \frac{1}{i} ln\left\{iz + \sqrt{1-z^2}\right\}$$

$$sin^{-1}(2) = \frac{1}{i} ln\left(i2 + \sqrt{1-2^2}\right) = \frac{1}{i} ln(i2 + \sqrt{-3}) = \frac{1}{i} ln(i2 + i\sqrt{3})$$

$$= \frac{1}{i} ln[i(2+\sqrt{3})] = \frac{1}{i}[lni + ln(2+\sqrt{3})] = -i[lni + ln(2+\sqrt{3})]$$

$$= -ilni - iln(2+\sqrt{3}) = -i\left(ln1 + i\frac{\pi}{2}\right) - iln(2+\sqrt{3})$$

$$= -i\left(0 + i\frac{\pi}{2}\right) - iln(2+\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} - iln(2+\sqrt{3})$$

$$sin^{-1}(2) = \frac{\pi}{2} - iln(2+\sqrt{3})$$

مثال: اثبت ان

$$w = cos^{-1}(i) = \frac{\pi}{2} - iln(1+\sqrt{2})$$

الحل:

$$cos^{-1}(z) = \frac{1}{i} ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$$

$$cos^{-1}(i) = \frac{1}{i} ln(i + \sqrt{-1-1}) = \frac{1}{i} ln(i + i\sqrt{2}) = \frac{1}{i} ln(i(1+\sqrt{2}))$$

$$= \frac{1}{i}[lni + ln(1+\sqrt{2})] = -ilni - iln(1+\sqrt{2})$$

$$= -i\left(ln\sqrt{0+1^2} + i\tan^{-1}\frac{1}{0}\right) - iln(1+\sqrt{2})$$

$$= -i\left(ln1 + i\frac{\pi}{2}\right) - iln(1+\sqrt{2}) = -i\left(0 + i\frac{\pi}{2}\right) - iln(1+\sqrt{2}) = \frac{\pi}{2} - iln(1+\sqrt{2})$$

مثال: اثبت ان

$$w = tan^{-1}(2i) = \frac{i}{2}ln3 + \frac{\pi}{2}$$

الحل:

$$tan^{-1}z = \frac{1}{2i}ln\left(\frac{i-z}{z+i}\right)$$

$$tan^{-1}(2i) = \frac{1}{2i}ln\left(\frac{i-2i}{2i+i}\right) = \frac{1}{2i}ln\left(\frac{-i}{3i}\right) = \frac{1}{2i}ln\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(ln\left(\frac{1}{3}\right) + i\pi\right) = \frac{1}{2i}(ln(1) - ln(3) + i\pi) = \frac{1}{2i}(0 - ln(3) + i\pi)$$

$$tan^{-1}(2i) = \frac{-1}{2i}ln(3) + \frac{\pi}{2} = \frac{i}{2}ln(3) + \frac{\pi}{2}$$

من الدوال المثلثية المعقدة المعكوسة الاخرى:

$$\csc^{-1}(z) = \frac{1}{i}ln\left(\frac{i+\sqrt{z^2-1}}{z}\right)$$

$$\sec^{-1}(z) = \frac{1}{i}ln\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right)$$

$$cot^{-1}z = \frac{1}{2i}ln\left(\frac{i+z}{z-i}\right)$$

٨- الدوال الزائدية المعقدة المعكوسة

يمكن تعريف معكوس الدوال الزائدية بدلالة الدالة اللوغاريتمية المعقدة كالتالي :

اذا كان $w = sinh^{-1}z$ ، فأن

$$z = sinh\, w = \frac{e^{w} - e^{-w}}{2}$$

افرض ان $v = e^{w}$ وبالتالي:

$$2z = v - \frac{1}{v}$$

$$v^2 - 2zv - 1 = 0$$

$$v = z + (1 + z^2)^{\frac{1}{2}} = z + e^{\frac{1}{2}ln(1+z^2)} = z + e^{\frac{1}{2}[ln|1+z^2| + iarg(1+z^2)]}$$

$$= z + |1 + z^2|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}arg(1+z^2)}$$

من التعريف $v = e^{w}$ اعلاه

$$w = lnv = ln\left(z + |1 + z^2|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}arg(1+z^2)}\right)$$

وبالتالي:

$$w = sinh^{-1}z = ln\left(z + |1 + z^2|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}arg(1+z^2)}\right)$$

او يكون $sinh^{-1}z$ بالصيغة التالية:

$$w = sinh^{-1}z = ln\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right)$$

وبنفس الطريقة (اختبر نفسك) نستطيع ان نثبت بأن:

$$w = cosh^{-1}z = ln\left(z + |z^2 - 1|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}arg(z^2-1)}\right)$$

او يكون $cosh^{-1}z$ بالصيغة التالية:

$$w = cosh^{-1}z = ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

الان نعمل على ايجاد:

$$w = tanh^{-1} z$$

$$z = tanh\, w = \frac{sinh\, w}{cosh\, w} = \frac{\frac{e^w - e^{-w}}{2}}{\frac{e^w + e^{-w}}{2}} = \frac{e^w - e^{-w}}{e^w + e^{-w}}$$

$$z = \frac{e^{2w} - 1}{e^{2w} + 1}$$

$$e^{2w} = \frac{1 + z}{1 - z}$$

$$w = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right)$$

$$w = tanh^{-1} z = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right)$$

مثال: جد ناتج $cosh^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

الحل:

$$w = cosh^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = ln\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1}\right) = ln\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}}\right) = ln\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= ln\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + i\tan^{-1}(-\sqrt{3})$$

$$cosh^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = i\frac{2\pi}{3} \qquad ,ln1 = 0$$

مثال: جد ناتج $.cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

الحل:

$$w = cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1}\right) = ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{-\frac{1}{2}}\right) = ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= ln\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} + i\tan^{-1}(1)$$

$$cosh^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} = i\frac{\pi}{4} \qquad ,ln1 = 0$$

مثال: جد ناتج $.tanh^{-1}(1+2i)$

الحل:

$$w = tanh^{-1}(1+2i) = \frac{1}{2}ln\left(\frac{1+1+2i}{1-1-2i}\right) = \frac{1}{2}ln(-1+i) = \frac{1}{4}ln2 + i\frac{3}{8}\pi$$

من الدوال الزائدية المعقدة المعكوسة الاخرى هي

$$w = csch^{-1}z = ln\left(\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\right)$$

$$w = sech^{-1}z = ln\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right)$$

$$w = coth^{-1}z = \frac{1}{2}ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

الفصل الثالث

تفاضل الدوال العقدية ومعادلات كوشي-ريمان

الدوال التحليلية: يقال أن الدالة $f(z)$ تكون تحليلية في المجال D إذا كانت $f(z)$ معرفة وقابلة للتفاضل في جميع نقاط D. ويقال أن الدالة $f(z)$ تحليلية عند نقطة $z = z_0$ في D إذا $f(z)$ تحليلية في جوار z_0.

التفاضل:

لتكن $f(z)$ معرفة عند العدد z_0 بالمستوي العقدي، فأن تفاضل $f(z)$ عند z_0 باستخدام التعريف هو:

$$\acute{f}(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}\right)$$

بشرط ان تكون هذه الغاية موجودة. ويقال للدالة $f(z)$ بانها قابلة للتفاضل عند z_0 عندما يكون تفاضل الدالة عند z_0 موجود.

مثال: جد تفاضل الدالة $f(z) = z^2$ و هل هي دالة معرفة وقابلة للتفاضل.

الحل:

$$\acute{f}(z) = \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}\right) = \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z}\right)$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{z^2 + 2z\Delta z + (\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z}\right)$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z}\right) = \lim_{\Delta z \to 0}(2z + \Delta z) = 2z$$

الدالة $f(z) = z^2$ دالة معرفة بالمستوي المعقد كله وقابلة للتفاضل في جميع نقاطه.

مثال: جد تفاضل الدالة $f(z) = z^2 - 5z$ وهل هي دالة معرفة وقابلة للتفاضل.

الحل:

$$\acute{f}(z) = \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}\right) = \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{(z+\Delta z)^2 - 5(z+\Delta z) - z^2 + 5z}{\Delta z}\right)$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{z^2 + 2z\Delta z + (\Delta z)^2 - 5z - 5\Delta z - z^2 + 5z}{\Delta z}\right)$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2 - 5\Delta z}{\Delta z}\right) = \lim_{\Delta z \to 0}(2z + \Delta z - 5)$$

$$\acute{f}(z) = 2z - 5$$

الدالة $f(z) = z^2 - 5z$ دالة معرفة بالمستوي المعقد كله وقابلة للتفاضل في جميع نقاطه.

مثال: اثبت ان الدالة $f(z) = x + 4iy$ غير قابلة للتفاضل لأي نقطة من نقاط z.

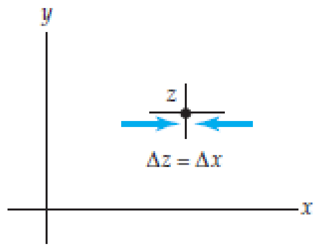
الحل: نفرض ان z نقطة في المستوي المعقد.

$$\acute{f}(z) = \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}\right) = \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{(x+\Delta x) + 4i(y+\Delta y) - x - 4iy}{\Delta x + i\Delta y}\right)$$

$$\acute{f}(z) = \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{\Delta x + 4i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}\right)$$

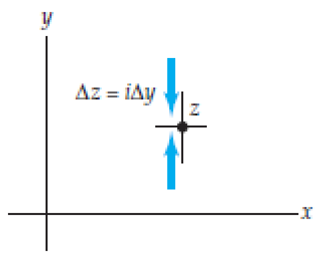
الان، وكما في الشكل ادناه ، لو فرضنا ان $\Delta z \to 0$ على طول الخط الموازي الى المحور x ، وعندئذ $\Delta y = 0$ و $\Delta z = \Delta x$ وبالتالي:

$$\acute{f}(z) = \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta x}\right) = 1 \qquad (1)$$



من جهة اخرى، وكما في الشكل ادناه، لو فرضنا ان $\Delta z \to 0$ على طول الخط الموازي الى المحور y ، وعندئذ $\Delta x = 0$ و $\Delta z = i\Delta y$ وبالتالي:

$$\acute{f}(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \left(\frac{4i\Delta y}{i\Delta y} \right) = 4 \qquad (2)$$



مما سبق فان القيم في المعادلة 1 و 2 مختلفة، وبالتالي نستخلص بأن الدالة $f(z) = x + 4iy$ غير قابلة للتفاضل عند اي نقطة من نقاط z.

مثال: جد تفاضل الدالة $f(z) = \bar{z}$ وهل هي دالة معرفة وقابلة للتفاضل.

الحل:

$$\acute{f}(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \left(\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right) = \lim_{\Delta z \to 0} \left(\frac{\overline{z + \Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} \right)$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \left(\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} \right) = \lim_{\Delta z \to 0} \left(\frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \right)$$

الان، لو فرضنا ان $\Delta z \to 0$ على طول الخط الموازي الى المحور x ، وعندئذ $\Delta y = 0$ و $\Delta z = \Delta x$ وبالتالي:

$$\acute{f}(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta x} \right) = 1 \qquad (3)$$

من جهة اخرى، لو فرضنا ان $\Delta z \to 0$ على طول الخط الموازي الى المحور y ، وعندئذ $\Delta x = 0$ و $\Delta z = i\Delta y$ وبالتالي:

$$\acute{f}(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \left(\frac{-i\Delta y}{i\Delta y} \right) = -1 \qquad (4)$$

مما سبق فان القيم في المعادلة 3 و 4 مختلفة وتعتمد على الطريق الذي يقترب فيه Δz من الصفر، وبالتالي نستخلص بأن الدالة $f(z) = \bar{z} = x - iy$ غير قابلة للتفاضل عند أي نقطة من نقاط z وانها دالة غير تحليلية في اي مكان.

مثال: جد تفاضل الدالة $f(z) = |z|^2$ وهل هي دالة معرفة وقابلة للتفاضل.

الحل:

$$\acute{f}(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \left(\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right) = \lim_{\Delta z \to 0} \left(\frac{|z + \Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z} \right)$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \left(\frac{(z + \Delta z)(\overline{z + \Delta z}) - z\bar{z}}{\Delta z} \right) = \lim_{\Delta z \to 0} \left(\bar{z} + \overline{\Delta z} + z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} \right)$$

الان، لو فرضنا ان $\Delta z \to 0$ على طول الخط الموازي الى المحور x ، وعندئذ $\Delta y = 0$ و $\Delta z = \Delta x$ وبالتالي:

$$\acute{f}(z) = \bar{z} + z \qquad (5)$$

من جهة اخرى، لو فرضنا ان $\Delta z \to 0$ على طول الخط الموازي الى المحور y ، وعندئذ $\Delta x = 0$ و $\Delta z = i\Delta y$ وبالتالي:

$$\acute{f}(z) = \bar{z} - z \qquad (6)$$

مما سبق فان القيم في المعادلة 5 و 6 مختلفة، وبالتالي نستخلص بأن الدالة $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ غير قابلة للتفاضل عند اي نقطة من نقاط z.

تمارين: باستخدام التعريف، اوجد مشتقة الدالة:

١- $f(z) = z^3 - 2z$ عند نقطة $z = -1$.

٢- $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$، حدد اين تكون الدالة غير تحليلية:

٣- برهن ان $\frac{d}{dz} f(z) = z^2\bar{z}$ غير موجودة في اي مكان.

قواعد التفاضل

اذا كانت $f(z)$ و $g(z)$ و $h(z)$ دوال تحليلية في z فأن قواعد التفاضل للدوال المعقدة التالية (مطابقة لقوانين تفاضل الدوال الحقيقية) تتحقق:

1- $\frac{d}{dz}\{f(z)+g(z)\}=\frac{d}{dz}f(z)+\frac{d}{dz}g(z)=\acute{f}(z)+\acute{g}(z)$

2- $\frac{d}{dz}\{f(z)-g(z)\}=\frac{d}{dz}f(z)-\frac{d}{dz}g(z)=\acute{f}(z)-\acute{g}(z)$

3- $\frac{d}{dz}\{cf(z)\}=c\frac{d}{dz}f(z)=c\acute{f}(z) \qquad ,where\ c=constant$

4- $\frac{d}{dz}\{f(z)g(z)\}=f(z)\frac{d}{dz}g(z)+g(z)\frac{d}{dz}f(z)=f(z)\acute{g}(z)+g(z)\acute{f}(z)$

5- $\frac{d}{dz}\left\{\frac{f(z)}{g(z)}\right\}=\frac{g(z)\frac{d}{dz}f(z)-f(z)\frac{d}{dz}g(z)}{\{g(z)\}^2}=\frac{g(z)\acute{f}(z)-f(z)\acute{g}(z)}{\{g(z)\}^2} \qquad ,where\ g(z)\neq 0$

6- *If* $w=f(\xi)$, *where* $\xi=g(z)$

$$\frac{dw}{dz}=\frac{dw}{d\xi}\frac{d\xi}{dz}=\acute{f}(\xi)\frac{d\xi}{dz}=\acute{f}(g(z))\acute{g}(z)$$

7- *If* $w=f(\xi)$, *where* $\xi=g(\eta)$ *and* $\eta=h(z)$

$$\frac{dw}{dz}=\frac{dw}{d\xi}\frac{d\xi}{d\eta}\frac{d\eta}{dz}$$

تسمى العلاقات ٦ و ٧ بقواعد تسلسل التفاضل (دوال الدوال).

8- *If* $w=f(z)$

لذلك فأن

$z=f^{-1}(w)$

وبالتالي فأن كل من $\frac{dw}{dz}$ و $\frac{dz}{dw}$ تحقق

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{dw}}$$

9- *If* $z = f(t)$ *and* $w = g(t)$ *,where t parameter*

فأن

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\frac{dw}{dt}}{\frac{dz}{dt}} = \frac{\acute{g}(z)}{\acute{f}(z)}$$

10- $\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}$ $\quad n$ *an integer*

العلاقة اعلاه، لا يمكن تطبيقها لقوى المترافق المعقد،

11- $\frac{d}{dz}[g(z)]^n = n[g(z)]^{n-1}\, \acute{g}(z)$ $\quad n$ *an integer*

مثال: استخدم قواعد التفاضل لإيجاد تفاضل الدوال المعقدة التالية:

1- $f(z) = 3z^4 - 5z^3 + 2z \quad \Longrightarrow \acute{f}(z) = 12z^3 - 15z^2 + 2$

2- $f(z) = \frac{z^2}{4z+1} \quad \Longrightarrow \acute{f}(z) = \frac{(4z+1)(2z) - z^2(4)}{(4z+1)^2} = \frac{4z^2+2z}{(4z+1)^2}$

3- $f(z) = (iz^2 + 3z)^5 \Longrightarrow 5(iz^2 + 3z)^4(2iz + 3)$

4- $f(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right) \Rightarrow \frac{d}{dz}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{(1-z)(1)-(1+z)(-1)}{(1-z)^2} = \frac{2}{(1-z)^2}$

الدالة$\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = f(z)$دالة تحليلية لكل قيم z ما عدا $z = 1$ حيث ان تفاضل الدالة غير موجود والدالة غير تحليلية. اما النقطة $z = 1$ فتسمى النقطة الشاذة.

مثال: باستخدام قاعدة قسمة دالتين اثبت ان:

$$\frac{d}{dz}\tan z = \sec^2 z$$

الحل:

$$\frac{d}{dz}\tan z = \frac{d}{dz}\left(\frac{\sin z}{\cos z}\right) = \frac{\cos z \frac{d}{dz}\sin z - \sin z \frac{d}{dz}\cos z}{(\cos z)^2}$$

$$= \frac{\cos z\,(\cos z) - \sin z\,(-\sin z)}{(\cos z)^2} = \frac{\cos^2 z + \sin^2 z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z} = \sec^2 z$$

مثال: برهن ان

$$\frac{d}{dz}\ln f(z) = \frac{\acute{f}(z)}{f(z)}$$

الحل:

لنفرض ان $w = ln\xi$ وان $\xi = f(z)$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\xi}\frac{d\xi}{dz} = \frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{dz} = \frac{1}{f(z)}\acute{f}(z) \qquad ,where \qquad d\xi = \acute{f}(z)dz$$

مثال: برهن ان

$$\frac{d}{dz}\tanh^{-1} z = \frac{1}{1-z^2}$$

الحل:

$$\frac{d}{dz}\tanh^{-1} z = \frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{2}\,ln\frac{1+z}{1-z}\right\} = \frac{1}{2}\frac{d}{dz}ln(1+z) - \frac{1}{2}\frac{d}{dz}ln(1-z)$$

$$\frac{d}{dz}\tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\frac{1}{1+z} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-z^2}$$

مثال: باستخدام قواعد التفاضل، جد

$$f(z) = \cos^2(2z + 3i)$$

الحل:

$$\frac{d}{dz}\cos^2(2z + 3i) = 2\{\cos(2z + 3i)\}\left\{\frac{d}{dz}\cos(2z + 3i)\right\}$$

$$= 2\{\cos(2z + 3i)\}\{-\sin(2z + 3i)(2)\}$$

$$\frac{d}{dz}\cos^2(2z + 3i) = -4\cos(2z + 3i)\sin(2z + 3i)$$

مثال: باستخدام قواعد التفاضل، جد تفاضل حاصل ضرب الدالتين:

$$z\tan^{-1}(ln\, z)$$

الحل:

$$\frac{d}{dz}(z\tan^{-1}(ln\, z)) = z\frac{d}{dz}(\tan^{-1}(ln\, z)) + \tan^{-1}(ln\, z)$$

$$= z\left\{\frac{1}{1 + (ln\, z)^2}\right\}\frac{d}{dz}(ln\, z) + \tan^{-1}(ln\, z) \qquad ,where \quad \frac{d}{dz}(\tan^{-1}(z)) = \frac{1}{1 + z^2}$$

$$= z\left\{\frac{1}{1 + (ln\, z)^2}\right\}\frac{1}{z} + \tan^{-1}(ln\, z)$$

$$\frac{d}{dz}(z\tan^{-1}(ln\, z)) = \left\{\frac{1}{1 + (ln\, z)^2}\right\} + \tan^{-1}(ln\, z)$$

تمرين: باستخدام قواعد التفاضل ودوال القوى المعقدة، جد

$$f(z) = (z - 3)^{4z+3}$$

تمرين: باستخدام قواعد التفاضل، جد

$$f(z)=\{\tanh^{-1}(iz+2)\}^{-1}$$

العلاقات الخاصة بتفاضل الدوال المعقدة البسيطة

1. $\frac{d}{dz}(c)=0$
2. $\frac{d}{dz}z^n=nz^{n-1}$
3. $\frac{d}{dz}e^z=e^z$
4. $\frac{d}{dz}a^z=a^z\ln a$
5. $\frac{d}{dz}\sin z=\cos z$
6. $\frac{d}{dz}\cos z=-\sin z$
7. $\frac{d}{dz}\tan z=\sec^2 z$
8. $\frac{d}{dz}\cot z=-\csc^2 z$
9. $\frac{d}{dz}\sec z=\sec z\tan z$
10. $\frac{d}{dz}\csc z=-\csc z\cot z$
11. $\frac{d}{dz}\log_e z=\frac{d}{dz}\ln z=\frac{1}{z}$
12. $\frac{d}{dz}\log_a z=\frac{\log_a e}{z}$
13. $\frac{d}{dz}\sin^{-1} z=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$
14. $\frac{d}{dz}\cos^{-1} z=\frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}$
15. $\frac{d}{dz}\tan^{-1} z=\frac{1}{1+z^2}$
16. $\frac{d}{dz}\cot^{-1} z=\frac{-1}{1+z^2}$
17. $\frac{d}{dz}\sec^{-1} z=\frac{1}{z\sqrt{z^2-1}}$
18. $\frac{d}{dz}\csc^{-1} z=\frac{-1}{z\sqrt{z^2-1}}$
19. $\frac{d}{dz}\sinh z=\cosh z$
20. $\frac{d}{dz}\cosh z=\sinh z$
21. $\frac{d}{dz}\tanh z=\mathrm{sech}^2 z$
22. $\frac{d}{dz}\coth z=-\mathrm{csch}^2 z$
23. $\frac{d}{dz}\mathrm{sech}\, z=-\mathrm{sech}\, z\tanh z$
24. $\frac{d}{dz}\mathrm{csch}\, z=-\mathrm{csch}\, z\coth z$
25. $\frac{d}{dz}\sinh^{-1} z=\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$
26. $\frac{d}{dz}\cosh^{-1} z=\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$
27. $\frac{d}{dz}\tanh^{-1} z=\frac{1}{1-z^2}$
28. $\frac{d}{dz}\coth^{-1} z=\frac{1}{1-z^2}$
29. $\frac{d}{dz}\mathrm{sech}^{-1} z=\frac{-1}{z\sqrt{1-z^2}}$
30. $\frac{d}{dz}\mathrm{csch}^{-1} z=\frac{-1}{z\sqrt{z^2+1}}$

معادلات كوشي – ريمان Cauchy -Riemann equations

مما سبق، رأينا أن الدالة $f(z)$ للمتغير المعقد z تكون تحليلية عند النقطة z عندما تكون الدالة $f(z)$ قابلة للتفاضل عند z وفي كل نقطة في جوار z. هذا المتطلب أكثر من مجرد التفاضل في نقطة ما لأن الدالة المعقدة يمكن أن تكون قابلة للتفاضل عند النقطة z ولكن لا يمكن أن تكون قابلة للتفاضل في أي مكان آخر. تكون الدالة $f(z)$ تحليلية في مجالD إذا كانت الدالة $f(z)$ قابلة للتفاضل في جميع النقاط D. لقد تم تطوير اختباراً اخراً لتقصي تحليلية الدالة المعقدة $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ يقوم على التفاضل الجزئي لأجزائها الحقيقية والخيالية u و v.

نرى أنه إذا كانت الدالة $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ قابلة للتفاضل عند النقطة z، فيجب أن تحقق الدالتان u و v زوج من المعادلات التفاضلات الجزئية من الدرجة الأولى.

لنفترض ان $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ قابلة للتفاضل عند $z = x + iy$. عندها في النقطة z تكون التفاضلات من الرتبة الاولى لكل من u و v موجودة وتحقق معادلتي كوشي – ريمان التالية:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

من معادلتي كوشي ريمان بالصيغة الكارتيزية يمكن كتابة تفاضل $f(z)$ كالتالي:

$$\acute{f}(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

مثال: حقق معادلتي كوشي ريمان للدالة $f(z) = z^2 + z$ ، حيث ان الدالة $f(z)$ تحليلية لكل قيم z.

الحل:

ان $f(z)$ بدلالة x و y تكتب بالشكل التالي:

$$f(z) = x^2 - y^2 + x + i(2xy + y)$$

وبالتالي فأن

$$u(x,y) = x^2 - y^2 + x$$

$$v(x,y) = 2xy + y$$

التفاضلات الجزئية من الرتبة الاولى لكل من u و v

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

اما

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

لذلك بالنسبة لأي نقطة (x, y) في المستوى المعقد، نرى أن معادلتي كوشي ريمان قد تحققت. من معادلتي كوشي ريمان يمكن كتابة تفاضل $f(z)$ كالتالي:

$$\acute{f}(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\acute{f}(z) = 2x + 1 + i2y = 2x + 1 + i2y$$

$$\acute{f}(z) = 2z + 1$$

معيار عدم التحليلية *Criterion for Non-analyticity*

إذا لم تتحقق معادلتا كوشي- ريمان في كل نقطة من z في المجال D، فإن الدالة $f(z) = u + iv$ تكون غير تحليلية في D.

مثال: اثبت ان الدالة المعقدة $f(z) = 2x^2 + y + i(y^2 - x)$ دالة غير تحليلية في كل نقطة من z.

الحل:

$$u(x, y) = 2x^2 + y$$

$$v(x, y) = y^2 - x$$

التفاضلات الجزئية من الرتبة الاولى لكل من u و v

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$$

اما

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

نرى أن معادلات كوشي ريمان تتحقق فقط اذا كانت $y = 2x$، لذلك نستنتج بأن الدالة غير تحليلية في اي نقطة من z.

كافية التحليل A Sufficient Condition for Analyticity

بحد ذاتها ، لا تضمن لنا معادلتا كوشي ريمان فيما اذا كانت الدالة $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ دالة تحليلية عند النقطة $z = x + iy$. من الممكن أن تتحقق معادلات كوشي- ريمان عند z ومع ذلك قد لا تكون $f(z)$ قابلة للتفاضل عند z. في كلتا الحالتين، فإن $f(z)$ ليست تحليلية عند z، عندما نضيف شرط الاستمرارية إلى u و v وإلى المشتقات الجزئية الأربعة $\frac{\partial v}{\partial y}$ و $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ و $\frac{\partial v}{\partial x}$، يمكن إظهار أن معادلات كوشي- ريمان ليست ضرورية فقط ولكنها أيضًا كافية لضمان تحليل $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ عند z.

معيار التحليلية

افترض أن الدوال$u(x, y)$ و $v(x, y)$ حقيقية ومستمرة ولديهما مشتقات جزئية من الدرجة الأولى مستمرة في المجال D. إذا حققت u و v معادلات كوشي- ريمان في جميع نقاط D، فإن الدالة المعقدة

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ تحليلية في D.

مثال: بالنسبة للدالة $f(z)=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$، الدوال $u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$ و $v(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}$

دوال مستمرة ما عدا النقطة $x^2+y^2=0$ اي عند $z=0$. اكثر من ذلك، التفاضلات الجزئية من الرتبة الاولى تكون مستمرة ما عدا النقطة $x^2+y^2=0$ اي عند $z=0$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

وهكذا نستنتج أن $f(z)$ تحليلية في أي مجال D لا يحتوي على النقطة $z=0$.

مثال: باستخدام معادلتي كوشي – ريمان، جد تفاضل الدالة $f(z)=lnz$.

الحل:

$$f(z)=lnz=ln(x+iy)=ln|x+iy|+iarg(x+iy)$$

$$w=u+iv=f(z)=\frac{1}{2}ln(x^2+y^2)+i\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

وبالتالي

$$u=\frac{1}{2}ln(x^2+y^2)$$

$$v=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

باستخدام تفاضلات كوشي – ريمان وباستخدام قواعد التفاضل نحصل:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{x}{(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-\left(\frac{y}{x^2}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\frac{y}{(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

وبالتالي تحققت معادلتا كوشي – ريمان. من معادلتي كوشي ريمان يمكن كتابة تفاضل $f(z)$ كالتالي:

$$\acute{f}(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\acute{f}(z) = \frac{x}{(x^2+y^2)} - i\frac{y}{(x^2+y^2)} = \frac{x}{(x^2+y^2)} - i\frac{y}{(x^2+y^2)}$$

$$\acute{f}(z) = \frac{x-iy}{(x^2+y^2)} = \frac{x-iy}{(x^2+y^2)} = \frac{1}{z}$$

الصيغة القطبية لمعادلات كوشي – ريمان

يمكن التعبير عن الدالة المعقدة بدلالة الإحداثيات القطبية. في الواقع ، الصيغة

$$f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$$

وهي غالبا ما تكون أكثر ملائمة للاستخدام. في الإحداثيات القطبية تصبح معادلات كوشي ريمان

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

من معادلتي كوشي ريمان بالصيغة القطبية يمكن كتابة تفاضل $f(z)$ كالتالي:

$$\acute{f}(z) = e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{e^{-i\theta}}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - i\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$$

مثال: اذا كان لدينا

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

برهن انه يمكن كتابة معادلات كوشي – ريمان بدلالة الاحداثيات القطبية بالشكل التالي:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

الحل:

من الفصل الاول عرفنا ان الجزء الحقيقي والخيالي للعدد المعقد يكتب بدلالة الاحداثيات القطبية بالشكل التالي:

$$x = rcos\theta$$

$$y = rsin\theta$$

وان كل من r و θ يمكن ايجادها من خلال الصيغ التالية:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

التفاضل الجزئي $\frac{\partial u}{\partial x}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{1}{cos\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{1}{sin\theta} \qquad (1)$$

التفاضل الجزئي $\frac{\partial u}{\partial y}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{1}{sin\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{1}{cos\theta} \qquad (2)$$

التفاضل الجزئي $\frac{\partial v}{\partial x}$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial r}\frac{1}{cos\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{1}{sin\theta} \qquad (3)$$

التفاضل الجزئي $\frac{\partial v}{\partial y}$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial r}\frac{1}{sin\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{1}{cos\theta} \qquad (4)$$

من معادلة كوشي ريمان الاولى $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}$ وباستخدام (1) و (4)

$$\frac{\partial u}{\partial r}\frac{1}{cos\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{1}{sin\theta}-\frac{\partial v}{\partial r}\frac{1}{sin\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{1}{cos\theta}=0 \qquad (5)$$

من معادلة كوشي ريمان الثانية $-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}$ وباستخدام (2) و (3)

$$\frac{\partial u}{\partial r}\frac{1}{sin\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{1}{cos\theta}+\frac{\partial v}{\partial r}\frac{1}{cos\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{1}{sin\theta}=0 \qquad (6)$$

بضرب المعادلة (5) بـ $sin\theta$ وضرب المعادلة (6) بـ $cos\theta$ والجمع نحصل على :

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

بضرب المعادلة (5) بـ $-cos\theta$ وضرب المعادلة (6) بـ $sin\theta$ والجمع نحصل على :

$$\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

مثال: حقق معادلتي كوشي ريمان بالصيغة القطبية للدالة $f(z)=\frac{1}{z}$.

الحل:

الصيغة الآسية والقطبية للدالة تعطى

$$f(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{re^{i\theta}}=\frac{cos\theta}{r}-i\frac{sin\theta}{r}$$

وبالتالي

$$u(r,\theta)=\frac{cos\theta}{r}$$

$$v(r,\theta) = -\frac{sin\theta}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{cos\theta}{r^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{cos\theta}{r}$$

وبالتالي

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

بالنسبة الى

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{sin\theta}{r^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{sin\theta}{r}$$

اذن

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

وبالتالي تتحقق معادلتا كوشي – ريمان بالصيغة القطبية.

من معادلتي كوشي ريمان بالصيغة القطبية يمكن كتابة تفاضل $f(z)$ كالتالي:

$$\acute{f}(z) = e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{e^{-i\theta}}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - i\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$$

$$\acute{f}(z) = e^{-i\theta}\left(-\frac{cos\theta}{r^2} + i\frac{sin\theta}{r^2}\right) = \frac{e^{-i\theta}}{r}\left(-\frac{cos\theta}{r} + i\frac{sin\theta}{r}\right)$$

$$\acute{f}(z) = -\frac{e^{-i\theta}}{r^2}(cos\theta - isin\theta) = -\frac{e^{-i\theta}}{r^2}(cos\theta - isin\theta)$$

$$\acute{f}(z) = -\frac{e^{-i\theta}}{r^2}\left(e^{-i\theta}\right) = -\frac{e^{-i\theta}}{r^2}\left(e^{-i\theta}\right) = -\frac{1}{z^2}$$

الدوال النظامية

يقال لدالة المتغير العقدي $f(z)$ بأنها نظامية عند z_0 اذا كان تفاضلها موجود عند z_0 وعند كل نقطة من z تقع في جوار العدد z_0. او يقال ان $f(z)$ نظامية في D اذا كانت نظامية عند كل نقاط D.

امثلة:

$f(z) = z^2$ نظامية في المستوي العقدي كله.

$f(z) = \bar{z}$ ليست نظامية، لأنها غير قابلة للاشتقاق.

ماذا بالنسبة الى $f(z) = |z|^2$؟؟؟؟.

اذا كانت $f(z)$ دالة نظامية في المنطقة D، فينبغي ان يوجد حول كل نقطة في D جوار تكون فيه الدالة معرفة. وهذا يعني ان تكون z نقطة داخلية في المنطقة. وعندئذ تكون الدالة النظامية معرفة في هذه المنطقة.

يقال ان الدالة النظامية كلية اذا كانت نظامية عند كل نقطة بالمستوي العقدي كله.

الدوال التوافقية Harmonic functions

افترض أن الدالة المعقدة $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ تحليلية في مجال D. وأن u و v لديهم مشتقات جزئية مستمرة من الدرجة الثانية في D. بما أن $f(z)$ تحليلية، فإن معادلات كوشي – ريمان تتحقق في كل نقطة z. فاذا فاضلنا معادلتي كوشي– ريمان، المعادلة الاولى بالنسبة الى x و الثانية بالنسبة الى y، نحصل

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

بجمع المعادلتين نحصل

$$\boldsymbol{\nabla^2 u(x,y)} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (L1)$$

اذا تحققت المعادلة اعلاه، فهذا يدل أن $u(x,y)$ دالة توافقية. اما اذا فاضلنا معادلتي كوشي– ريمان، المعادلة الاولى بالنسبة الى y والثانية بالنسبة الى x، نحصل

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

بطرح المعادلتين، نحصل

$$\nabla^2 v(x,y) = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \qquad (L2)$$

اذا تحققت المعادلة اعلاه، فهذا يدل أن $v(x,y)$ دالة توافقية. تسمى المعادلات $(L1)$ و $(L2)$ معادلات لابلاس، ويسمى ∇^2 **بثابت لا بلاس.**

الدوال التوافقية المترافقة

لقد أوضحنا للتو أنه إذا كانت دالة $f(z) = u\,(x,y) + iv\,(x,y)$ تحليلية في المجال D، فإن أجزائها الحقيقية والخيالية u و v توافقية بالضرورة في D. الآن لنفترض $u\,(x,y)$ هي دالة حقيقية توافقية في D. إذا كان من الممكن ايجاد دالة توافقية حقيقية أخرى $v\,(x,y)$ بحيث u و v يحققان معادلات كوشي- ريمان في المجال D، تسمى الدالة $v\,(x,y)$ مترافقة توافقية لـ $u\,(x,y)$. من خلال الجمع بين الدالات مثل $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ نحصل على دالة تحليلية في D.

مثال: لديك الدالة $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 5y$، حقق المطالب التالية:

(١) اثبت ان الدالة هي دالة توافقية في كامل المستوي المعقد.

(٢) جد الدالة التوافقية المترافقة $v\,(x,y)$ للدالة $u(x,y)$.

الحل:

اولاً: الان نحاول ان نثبت ان $u(x,y)$ تحقق معادلة لا بلاس. المشتقة الجزئية الاولى للدالة u بالنسبة الى x.

$$\frac{\partial u}{\partial \mathrm{x}} = 3x^2 - 3y^2 \qquad (1CR)$$

المشتقة الجزئية الثانية للدالة u بالنسبة الى x.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x$$

المشتقة الجزئية الاولى للدالة u بالنسبة الى y.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy - 5 \qquad (2CR)$$

المشتقة الجزئية الثانية للدالة u بالنسبة الى y.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x$$

وبالتالي

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0$$

نلاحظ بان الدالة u حققت معادلة لا بلاس وبالتالي فهي دالة توافقية.

ثانياً: نحاول ايجاد الدالة التوافقية المترافقة $v(x,y)$ للدالة $u(x,y)$. ان من خصائص الدالة التوافقية المترافقة هي ان الدالة تحقق معادلتي كوشي– ريمان.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

باستخدام $(1CR)$ و $(2CR)$ فأن

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 \qquad (3CR)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + 5 \qquad (4CR)$$

التكامل الجزئي للمعادلة $(3CR)$ بالنسبة الى y

$$v(x,y) = 3x^2y - y^3 + h(x) \qquad (5CR)$$

لاستخراج قيمة $h(x)$ ، نأخذ المشتقة الجزئية للمعادلة $(5CR)$ بالنسبة الى x.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + h'(x) \qquad (6CR)$$

نعوض المعادلة $(6CR)$ في المعادلة $(4CR)$، ومن ذلك نحصل:

$$h'(x) = 5 \qquad (7CR)$$

نكامل المعادلة $(7CR)$ بالنسبة الى x نحصل

$$h(x) = 5x + C$$

حيث C ثابت حقيقي. لذلك فأن الدالة التوافقية المرافقة للدالة u في المعادلة $(5CR)$ تأخذ الصيغة التالية:

$$v(x,y) = 3x^2y - y^3 + 5x + C \qquad (8CR)$$

الان نحاول ان نثبت بأن v دالة توافقية من خلال تحقق معادلة لا بلاس $(L2)$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -6y$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 6y$$

وبالتالي

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

اذن الدالة v تحقق معادلة لا بلاس وبالتالي فهي دالة توافقية.

مثال: اذا كان لدينا الدالة $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$، حيث ان $u(x,y) = ln(x^2 + y^2)$ دالة حقيقية. حقق المطالب التالية:

١- اثبت ان الدالة $u(x,y)$ دالة توافقية.
٢- جد الدالة التوافقية المترافقة $v(x,y)$.
٣- عند $y = 0$ و $z = x$ ، أثبت ان الدالة التحليلية $f(z)$ بدلالة z تعطى بالشكل التالي:

$$f(z) = ln(z^2) + iC$$

حيث ان C هو ثابت التكامل.

الحل:

اولاً: الان نحاول ان نثبت ان $u(x,y)$ تحقق معادلة لا بلاس $(L1)$. المشتقة الجزئية الاولى للدالة u بالنسبة الى x.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2} \qquad (1CR)$$

المشتقة الجزئية الثانية للدالة u بالنسبة الى x.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

المشتقة الجزئية الاولى للدالة u بالنسبة الى y.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2} \qquad (2CR)$$

المشتقة الجزئية الثانية للدالة u بالنسبة الى y.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

نلاحظ بان الدالة u حققت معادلة لا بلاس وبالتالي فأنها دالة توافقية.

نحاول ايجاد الدالة التوافقية المترافقة $v(x,y)$ للدالة $u(x,y)$ من خلال تحقيق معادلة لا بلاس $(L2)$. ان من خصائص الدالة التوافقية المترافقة $v(x,y)$هي انها تحقق معادلتي كوشي– ريمان.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

باستخدام $(1CR)$ و $(2CR)$ فأن

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2x}{x^2 + y^2} \qquad (3CR)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2y}{x^2 + y^2} \qquad (4CR)$$

التكامل الجزئي للمعادلة $(3CR)$ بالنسبة الىy

$$v(x,y) = 2\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + h(x) \qquad (5CR)$$

لاستخراج قيمة $h(x)$، نأخذ المشتقة الجزئية للمعادلة $(5CR)$ بالنسبة الىx.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2y}{x^2+y^2} + \acute{h}(x) \qquad (6CR)$$

نعوض المعادلة $(6CR)$ في المعادلة $(4CR)$، ومن ذلك نحصل:

$$\acute{h}(x) = 0 \qquad (7CR)$$

نكامل المعادلة $(7CR)$ نحصل

$$h(x) = C$$

حيث C ثابت حقيقي. لذلك فأن الدالة التوافقية المرافقة للدالة u في المعادلة $(5CR)$ تأخذ الصيغة التالية:

$$v(x,y) = 2\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + C \qquad (8CR)$$

الان نحاول ان نثبت بأن الدالة v توافقية من خلال تحقق معادلة لا بلاس

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

وبالتالي فأن v تحقق معادلة لا بلاس فهي دالة توافقية.

نحاول ان نجد $f(z) = ln(z^2) + iC$، عند $y = 0$ و $z = x$

$$f(z) = \ln(z^2) + iC$$

تمارين

لديك الدوال التالية

١. $u(x,y) = x^2 - y^2 - y$
٢. $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$
٣. $u(x,y) = sinx\ coshy$
٤. $u(x,y) = 2x - 2xy$

٥. $u(x,y) = e^{-x}(x\,siny - ycosy)$

حقق المطالب التالية:

(أ) اثبت ان الدالة $u(x,y)$ دالة توافقية.

(ب) جد الدالة $v(x,y)$ التوافقية المترافقة.

(ج) جد الدالة التحليلية $f(z)$

النقاط المنفردة

هي النقاط التي ليس للدالة فيها مشتقة، فاذا لم تكن لدالة نظامية او تحليلية مشتقة في z_0 ولكن توجد لها مشتقة في نقاط اخرى، تسمى بذلك z_0 نقطة منفردة.

مثال: لدينا الدالة

$$f(z) = \frac{1}{z+1}$$

نفاضل الدالة

$$\acute{f}(z) = -\frac{1}{(z+1)^2}$$

الدالة نظامية او تحليلية ماعدا $z = -1$ تصبح الدالة غير معرفة، حيث تمثل نقطة منفردة وحيدة.

الاقطاب

اذا كانت لدينا الدالة

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^n}$$

حيث تمثل $\psi(z)$ دالة تحليلية عند جميع النقاط. لمنطقة تضم $z = z_0$. اذا كان n عدد صحيح موجب، تكون نقطة منفردة للدالة $f(z)$ عند $z = z_0$، تسمى هذه النقطة "قطب" من الرتبة n. فاذا كانت $n = 1$ فأن القطب عادة ما يسمى بالقطب البسيط، اما اذا كانت $n = 2$ فأنه يسمى بالقطب المزدوج وهكذا.

مثال: لديك الدالة

$$f(z) = \frac{z}{(z-3)^2(z+1)}$$

للدالة نقطتان منفردتان هما

١- قطب بسيط $z=-1$.
٢- قطب مزدوج $z=3$.

او بطريقة اخرى ايضا لعدد صحيح n بحيث

$$\lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)^n f(z)\right)=A\neq 0$$

فأن $z=z_0$ يسمى قطباً من الرتبة n. فاذا كانت $n=1$ فأن القطب عادة ما يسمى بالقطب البسيط، اما اذا كانت $n=2$ فأنه يسمى بالقطب المزدوج و هكذا.

مثال: لديك الدالة

$$f(z)=\frac{z}{(z-3)^2(z+1)}$$

الحل:

عند النقطة المفردة $z=3$

$$\lim_{z\to 3}\left((z-3)^2\frac{z}{(z-3)^2(z+1)}\right)=\frac{3}{4}\neq 0$$

اذن النقطة $z=3$ تمثل قطباً مزدوجاً للدالة من الرتبة $n=2$.

عند النقطة المفردة $z=-1$

$$\lim_{z\to -1}\left((z+1)\frac{z}{(z-3)^2(z+1)}\right)=\frac{-1}{16}\neq 0$$

اذن النقطة $z=-1$ تمثل قطباً بسيطاً للدالة من الرتبة $n=1$.

نقاط التفرعات

للدوال المتعددة القيم نقاط فرعية منفردة

مثال: $f(z)=(z-3)^{1/2}$ لها نقطة تفرع $z=3$.

مثال: $f(z)=ln(z^2+z-2)$ لها نقطتا تفرع $z=1$ و $z=-2$.

النقاط المنفردة القابلة للرفع

النقطة المنفردة z_0 للدالة $f(z)$ تسمى نقطة منفردة قابلة للرفع اذا كانت غاية الدالة

$$\lim_{z\to z_0} f(z)$$

موجودة.

مثال: النقطة $z=0$ هي نقطة منفردة قابلة للرفع للدالة $f(z)=\frac{\sin z}{z}$، وذلك لان

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$$

موجودة.

النقاط المنفردة الاساسية

النقطة المنفردة التي ليست قطباً ولا نقطة تفرع او قابلة للرفع تسمى نقطة منفردة اساسية.

مثال: الدالة

$$f(z)=e^{\frac{1}{z-2}}$$

لها نقطة منفردة اساسية هي $z=2$.

ملاحظة:

اذا كانت الدالة احادية القيمة ولها نقاط منفردة تدعى بالأقطاب او نقاط منفردة قد تكون اساسية واحياناً غير اساسية، فأن ذلك يتم تحديده من خلال:

١- **نقاط منفردة غير اساسية** اذا كان

$$\operatorname{Lim}_{z\to z_0}\big((z-z_0)^n f(z)\big)=A\neq 0$$

٢- **نقاط منفردة اساسية** اذا كان

$$\lim_{z\to z_0}\big((z-z_0)^n f(z)\big)=A=0$$

تمرين: جد وحدد نوع النقاط المنفردة للدالة:

$$f(z)=\frac{z}{(z+2i)^2(z-2i)^2}$$

الفصل الرابع

تكامل الدوال المعقدة ونظرية كوشي

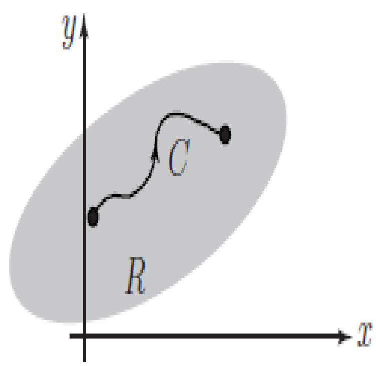
المحاضرة (١)

التكامل المعقد Complex integral

لتكن الدالة $f(z)$ دالة مستمرة عند كل نقاط المنحني C محدود الطول (انظر الشكل(١))، فأن التكامل الخطي (في متغير واحد) غير المحدد للدالة المعقدة $f(z)$ على مسار المنحني C او التكامل الخطي المحدد للدالة المعقدة $f(z)$ من a الى b على المنحني C يعطى بالعلاقة:

$$\int_C f(z)dz \qquad OR \qquad \int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a) \tag{4-1a}$$

حيث F ناتج التكامل.



الشكل (١)

في مثل الحالة اعلاه، يقال ان الدالة قابلة للتكامل على المنحني C. لاحظ انه اذا كانت $f(z)$ تحليلية عند كل نقاط المنطقة R و اذا كان C يقع في R، فأن $f(z)$ تكون قابلة للتكامل على المنحني C.

مثال١: حساب التكامل $\int_1^i zdz$ يكون:

$$\int_1^i zdz = \left[\frac{1}{2}z^2\right]_1^i = \frac{1}{2}\{(i)^2 - (1)^2\} = -1$$

مثال٢: حساب التكامل $\int_1^i z^2 dz$ يكون:

$$\int_1^i z^2 dz = \left[\frac{1}{3}z^3\right]_1^i = -\frac{1}{3}(1+i)$$

مثال٣: حساب التكامل $\int_1^i (z^2+z)\,dz$ يكون:

$$\int_1^i (z^2+z)\,dz = -\frac{4}{3} - \frac{i}{3}$$

لو كانت $f(z)$ دالة عقدية مستمرة ومعرفة في المنطقة R، بحيث $z(t) = x(t) + iy(t)$ وان $a \le t \le b$ و C تقع كليا في R وتكون $\acute{z}(t) = \acute{x}(t) + i\acute{y}(t)$ موجودة ومستمرة عند $a \le t \le b$.
وبالتالي يكون التكامل:

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z)\frac{dz}{dt}dt \qquad (4-1b)$$

مثال٤: جد قيمة التكامل $\int_C z^2 dz$ على امتداد المسار C المعطى في $z(t) = t + it^2$ وان $0 \le t \le 1$.

الحل:

نعوض عن $z(t) = t + it^2$ و $dz = (1+2it)dt$، في التكامل

$$\int_C z^2 dz = \int_0^1 \left(t + it^2\right)^2 (1+2it)\,dt$$

لنبسط الكمية داخل التكامل:

$$\left(t + it^2\right)^2 (1+2it) = (t^2 - 5t^4) + i(4t^3 - 2t^5)$$

وبالتالي:

$$\int_C z^2 dz = \int_0^1 (t^2 - 5t^4)\,dt + i\int_0^1 (4t^3 - 2t^5)\,dt = \left[\frac{t^3}{3} - t^5\right]_0^1 + i\left[t^4 - \frac{t^6}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(i-1)$$

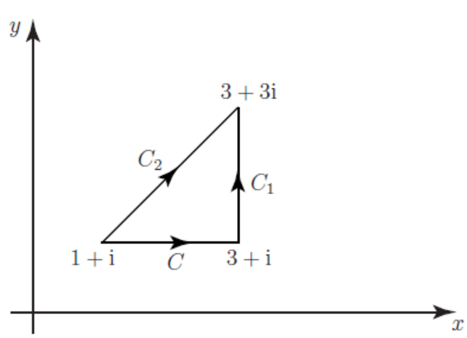
اما اذا كانت $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = u + iv$، فأن المعادلة $(4-1a)$ ، يمكن التعبير عنها بدلالة التكاملات الخطية للدوال الحقيقية:

$$.\int_C f(z)dz = \int_C (u+iv)(dx+idy) \qquad \Leftarrow, dz = dx + idy \qquad (4-1c)$$

يمكن فصل التكامل في المعادلة $(4-1c)$ إلى الأجزاء الحقيقية والخيالية كالتالي:

$$\int_C f(z)dz = \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy) \qquad (4-2)$$

مثال٥: اذا علمت بأن $z = x + iy$ و $f(z) = u + iv$، جد التكامل المعقد $\int_C zdz$ للمسارات الموضحة في الشكل (٢):



الشكل (٢)

الحل:

بالنسبة للمسار C ، نظرًا لأن قيمة y ثابتة $(y=1)$ على طول المسار المحدد الموازي للمحور x ، فإن $z=x+1i$، مما يعني أن $u=x$ و $v=1$. أيضاً ، نظراً لأن y ثابتة ، فإن تفاضل الثابت $dy=0$.
باستخدام $(2-4)$:

$$\int_C zdz=\int_1^3 xdx+i\int_1^3 dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3+i[x]_1^3=4+2i$$

بالنسبة للمسار $C1$، نظرًا لأن قيمة x ثابتة $(x=3)$ على طول المسار المحدد الموازي للمحور y، فإن $z=3+iy$ ، مما يعني أن $u=3$ و $v=y$. أيضاً، نظراً لأن x ثابتة ، ، فإن تفاضل الثابت $dx=0$.
باستخدام $(2-4)$:

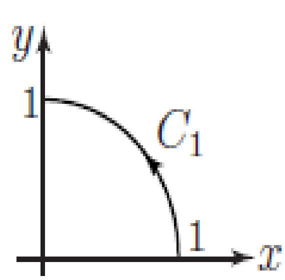
$$\int_{C1} zdz=\int_1^3 -ydy+i\int_1^3 3dy=\left[-\frac{y^2}{2}\right]_1^3+i[3y]_1^3=-4+6i$$

بالنسبة للمسار $C2$، يكون $x=y$ ، فإن $z=x+ix$ وان $dz=dx+idx$، مما يعني أن $u=x$ و $v=x$. أيضًا باستخدام $(2-4)$:

$$\int_{C2} f(z)dz=\int_1^3 (xdx-xdx)+i\int_1^3 (xdx+xdx)=2i\int_1^3 xdx=8i$$

مثال٦: اذا علمت بأن $z=x+iy$ و $f(z)=u+iv$، جد التكامل $\int_{C1} z^2dz$ للحالات التالية:

الحالة الاولى: $C1$ جزء من محيط الدائرة الوحدة(r=1) في الربع الاول (الشكل ادناه)، هو المسار الذي يتجه عكس اتجاه عقارب الساعة من النقطة $z=1$ إلى النقطة $z=i$.



الحل: بدلالة الاحداثيات المتعامدة يمكن كتابة z^2 بالشكل التالي:

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$dz = dx + idy$$

$$u = x^2 - y^2$$

$$v = 2xy$$

باستخدام $(4-2)$:

$$\int_{z=1}^{z=i} z^2 dz = \int_{z=1}^{z=i} \left((x^2 - y^2)dx - 2xydy\right) + i\int_{z=1}^{z=i} (2xydx + (x^2 - y^2)dy) \qquad (4-3)$$

من الصعوبة حل هذه التكاملات لارتباط كل من x و y مع بعضها، بما ان C جزء من دائرة الوحدة فأن $z = e^{i\theta}$ وان $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$، وبالتالي نعيد كتابة y و x بدلالة متغير واحد θ.

$$x = cos(\theta) \qquad , dx = -sin(\theta)d\theta$$

$$y = sin(\theta) \qquad , dy = cos(\theta)d\theta$$

يمكن ان نعبر عن $x^2 - y^2$ و $2xy$ بدلالة 2θ:

$$x^2 - y^2 = cos^2(\theta) - sin^2(\theta) = cos(2\theta)$$

و

$$2xy = 2cos(\theta)sin(\theta) = sin(2\theta)$$

الان، لنقطة مثل z تتحرك من $z = x = 1$ الى $z = y = i$ على طول المسار C ، فأن قيمة الزاوية المعقدة θ تتغير من $\theta = 0$ الى $\theta = \frac{\pi}{2}$ وبالتالي:

$$\int_{z=1}^{z=i} z^2 dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-cos(2\theta)sin(\theta)d\theta - sin(2\theta)cos(\theta)d\theta)$$
$$+ i\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-sin(2\theta)sin(\theta)d\theta + cos(2\theta)cos(\theta)d\theta) \qquad (4-4)$$

يمكن تبسيط التكاملات اعلاه باستخدام المتطابقات المثلثية:

$$cos2\theta\sin\theta+\sin 2\theta\cos\theta=\sin(2\theta+\theta)=\sin(3\theta)$$

$$cos2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta=\cos(2\theta+\theta)=\cos(3\theta)$$

وبالتالي المعادلة $(4-4)$ تصبح:

$$\int_C z^2 dz=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(3\theta)\,d\theta\ +i\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(3\theta)\,d\theta \qquad (4-5)$$

$$=\left[\frac{1}{3}\cos(3\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+i\left[\frac{1}{3}\sin(3\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{3}(1+i)$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها في المثال٢.

الحالة الثانية: $C1$ يمثل كل محيط دائرة: هنا حدود التكامل في المعادلة $(4-5)$ هي من $\theta=0$ الى $\theta=2\pi$، وبالتالي فأن المعادلة $(4-5)$ بعد تغير حدود التكامل تصبح:

$$\int_C z^2 dz=-\int_0^{2\pi}\sin(3\theta)\,d\theta\ +i\int_0^{2\pi}\cos(3\theta)\,d\theta$$

$$=\left[\frac{1}{3}\cos(3\theta)\right]_0^{2\pi}+i\left[\frac{1}{3}\sin(3\theta)\right]_0^{2\pi}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)+i(0-0)=0$$

تمارين

ا) جد قيمة التكامل $\int_{(0,3)}^{(2,4)}(2y+x^2)dx+(3x-y)dy$ للحالات التالية:

١- عندما $x=2t$ و $y=t^3+3$.

٢- لحالة خطين مستقيمين، الاول من النقطة $(0,3)$ و $(2,3)$ والثاني $(2,3)$ الى $(2,4)$.

٣- لحالة الخط المستقيم $(0,3)$ الى $(2,4)$.

ب) جد قيمة التكامل $\int_C \bar{z}dz$ من $z = 0$ الى $z = 4 + 2i$ على المنحني C المعطى بالحالات التالية:

١- $z = t^2 + it$.

٢- من $z = 0$ الى $z = 2i$ ومن $z = 2i$ الى $z = 4 + 2i$.

ج) اذا علمت بأن $z = x + iy$ و $f(z) = u + iv$ ، جد التكامل $\int_{C1} z^2dz$ حيث ان $C1$ هو خط مستقيم يصل نقطة الاصل O بنقطة $P(2,1)$ في المستوي المعقد.

خواص التكاملات

اذا كانت $f(z)$ و $g(z)$ دالتين قابلتين للتكامل على C فأن:

$$a)\quad \int_C \{f(z) + g(z)\}dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz$$

$$b)\quad \int_C Af(z)dz = A\int_C f(z)dz \qquad , A: constant$$

$$c)\quad \int_a^b f(z)dz = -\int_b^a f(z)dz$$

$$d)\quad \int_a^b f(z)dz = \int_a^m f(z)dz + \int_m^b f(z)dz$$

تكاملات خاصة مع حذف ثابت التكامل

1. $\int z^n\,dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad n \neq -1$
2. $\int \frac{dz}{z} = \ln z$
3. $\int e^z\,dz = e^z$
4. $\int a^z\,dz = \frac{a^z}{\ln a}$
5. $\int \sin z\,dz = -\cos z$
6. $\int \cos z\,dz = \sin z$
7. $\int \tan z\,dz = \ln \sec z = -\ln \cos z$
8. $\int \cot z\,dz = \ln \sin z$
9. $\int \sec z\,dz = \ln(\sec z + \tan z) = \ln \tan(z/2 + \pi/4)$
10. $\int \csc z\,dz = \ln(\csc z - \cot z) = \ln \tan(z/2)$
11. $\int \sec^2 z\,dz = \tan z$
12. $\int \csc^2 z\,dz = -\cot z$
13. $\int \sec z \tan z\,dz = \sec z$
14. $\int \csc z \cot z\,dz = -\csc z$
15. $\int \sinh z\,dz = \cosh z$
16. $\int \cosh z\,dz = \sinh z$
17. $\int \tanh z\,dz = \ln \cosh z$
18. $\int \coth z\,dz = \ln \sinh z$
19. $\int \operatorname{sech} z\,dz = \tan^{-1}(\sinh z)$
20. $\int \operatorname{csch} z\,dz = -\coth^{-1}(\cosh z)$
21. $\int \operatorname{sech}^2 z\,dz = \tanh z$
22. $\int \operatorname{csch}^2 z\,dz = -\coth z$
23. $\int \operatorname{sech} z \tanh z\,dz = -\operatorname{sech} z$
24. $\int \operatorname{csch} z \coth z\,dz = -\operatorname{csch} z$
25. $\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 \pm a^2}} = \ln\left(z + \sqrt{z^2 \pm a^2}\right)$
26. $\int \frac{dz}{z^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{z}{a}$ or $-\frac{1}{a}\cot^{-1}\frac{z}{a}$
27. $\int \frac{dz}{z^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{z-a}{z+a}\right)$
28. $\int \frac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}} = \sin^{-1}\frac{z}{a}$ or $-\cos^{-1}\frac{z}{a}$
29. $\int \frac{dz}{z\sqrt{a^2 \pm z^2}} = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{z}{a + \sqrt{a^2 \pm z^2}}\right)$
30. $\int \frac{dz}{z\sqrt{z^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\cos^{-1}\frac{a}{z}$ or $\frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{z}{a}$
31. $\int \sqrt{z^2 \pm a^2}\,dz = \frac{z}{2}\sqrt{z^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left(z + \sqrt{z^2 \pm a^2}\right)$
32. $\int \sqrt{a^2 - z^2}\,dz = \frac{z}{2}\sqrt{a^2 - z^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{z}{a}$
33. $\int e^{ax}\sin bz\,dz = \frac{e^{az}(a\sin bz - b\cos bz)}{a^2 + b^2}$
34. $\int e^{ax}\cos bz\,dz = \frac{e^{ax}(a\cos bz + b\sin bz)}{a^2 + b^2}$

التكامل حول المنحني المغلق

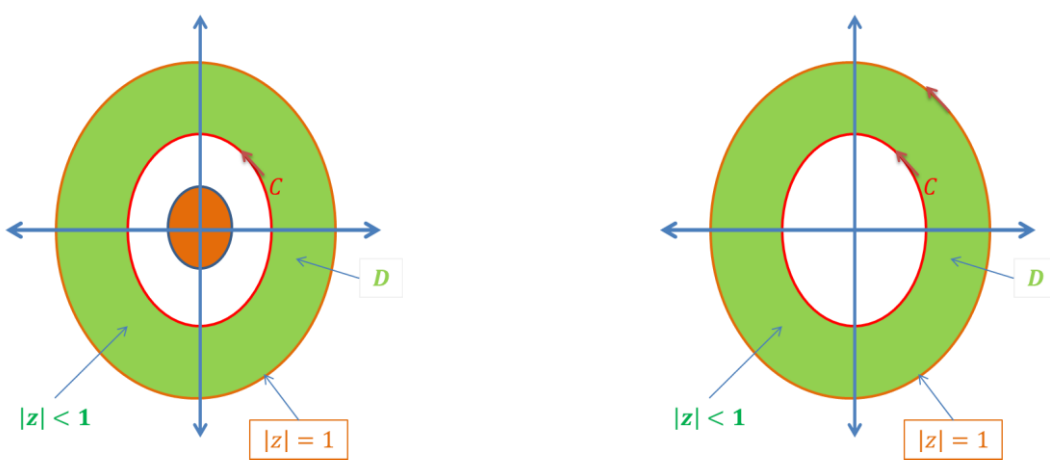
يعبر عن التكامل حول المنحني المغلق (الكنتور) C بالشكل التالي:

$$\oint_C f(z)dz \qquad (4-6)$$

الكنتور :في التحليل المعقد، هو منحنى في المستوى المعقد. في تكامل الكنتوري، يوفر الكنتور تعريفاً دقيقاً للمنحنيات التي يمكن تحديد التكامل عليها بشكل مناسب. يتم تعريف المنحني في المستوي المعقد كدالة مستمرة عند الفترة المغلقة لخط حقيقي إلى المستوى المعقد: $z: [a,b] \rightarrow C$.

المناطق البسيطة والمعقدة الاتصال

يقال للمنطقة D انها منطقة اتصال اذا كان بالإمكان ايصال نقطتين في المنطقة D بمسار يقع كلياً فيها. ويقال للمنطقة D بانها بسيطة الاتصال اذا كان المنحني المغلق البسيط واقع كليا في المنطقة D يحيط بنقاط تقع كليا في المنطقة D ايضاً. تسمى المنطقة D منطقة معقدة الاتصال اذا لم تكن بسيطة الاتصال.



الشكل(٣أ) الشكل(٣ب)

نلاحظ ان في الشكل(٣أ)، تكون المنطقة D (الاخضر) منطقة اتصال بسيطة لان المنحني C يقع كليا فيها ويحيط بنقاط تقع عليه او داخله تقع كليا في المنطقة D. اما في الشكل(٣ب)، فأن المنطقة D تكون متعددة الاتصال لان المنحني C يقع كلياً في المنطقة D ولكنه يحيط بنقاط (الدائرة) تقع داخله لا تقع كليا في المنطقة D.

نظرية كرين

نفرض ان $P(x,y)$ ، $Q(x,y)$ ، $\frac{\partial P}{\partial y}$ و $\frac{\partial Q}{\partial x}$ مستمرة في المنطقة المغلقة R تشمل نقاط داخل وعلى كنتور مغلق بسيط C ،فأن صيغة كرين في بعدين تعطى بالعلاقة:

$$\oint Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \qquad (4-7)$$

نظرية كوشي – كورسات

نظرية كوشي: لتكن $f(z) = u + iv$ تحليلية ، ولتكن $\acute{f}(z)$ مستمرة لكل النقاط داخل او على المنحني C فأن:

$$\oint_C f(z)dz = 0 \qquad (4-8)$$

هذه الصيغة تعرف بصيغة كوشي التكاملية. لأثبات صيغة كوشي التكاملية: لتكن R منطقة تشمل جميع نقاط داخل وعلى المنحني C ،يمكننا كتابة المعادلة $(4-8)$ باستخدام المعادلة $(4-2)$ بالصيغة التالية:

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C (udx - vdy) + i\oint_C (vdx + udy) = 0 \qquad (4-9)$$

باستخدام صيغة كرين بالمقارنة لكل تكامل في المعادلة اعلاه

$$\oint_C f(z)dz = -\iint_R \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i\iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = 0 \qquad (4-10)$$

من الفصل الثالث، عرفنا بأن تفاضل الدالة $f(z)$ باستخدام معادلات كوشي ريمان يمكن ايجاده:

$$\acute{f}(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

وبالتالي فأن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

وبالتالي فأن $(4-10)$ تصبح:

$$\oint_C f(z)dz = -\iint_R \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) dxdy + i \iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) dxdy = 0 \qquad (4-11)$$

لقد وجد لأول مرة من قبل كورسات، بانه ليس من الضروري افتراض استمرارية $\acute{f}(z)$ وان مبرهنة كوشي تتحقق اذا افترض ان $\acute{f}(z)$ موجودة فقط عند جميع النقاط داخل او على C ولهذا تسمى المبرهنة كوشي-كورسات والتي سيتم ذكرها بدون برهان لها والتي فيها:

مبرهنة كوشي- كورسات: اذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية عند جميع النقاط داخل وعلى الكنتور المغلق C، فأن:

$$\oint_C f(z)dz = 0 \qquad (4-12)$$

اذا كانت $f(z)$ تحليلية في منطقة معقدة الاتصال D، فأنه لا يمكن ان نستنتج ان

$$\oint_C f(z)dz = 0 \qquad (4-13)$$

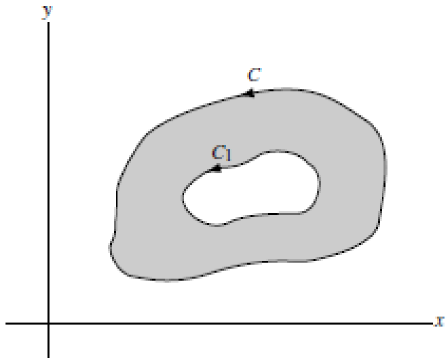
على كل كنتور مغلق بسيط C في D.

بعض نتائج نظرية كوشي:

نظرية ١: لتكن $f(z)$ تحليلية في منطقة ما محددة بمنحنيين بسيطين مغلقين C و $C1$ (حيث $C1$ يقع في C كما في الشكل(٤أ)) وكذلك على هذين المنحنيين، فأن

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C1} f(z)dz \qquad (4-14)$$

حيث تبين هذه النتيجة انه اذا اردنا ان نكامل $f(z)$ على المنحني C فأنه يمكن ان نكامل على المنحني $C1$ بدلاً من C طالما ان $f(z)$ تحليلية في المنطقة بين المنحنيين C و $C1$

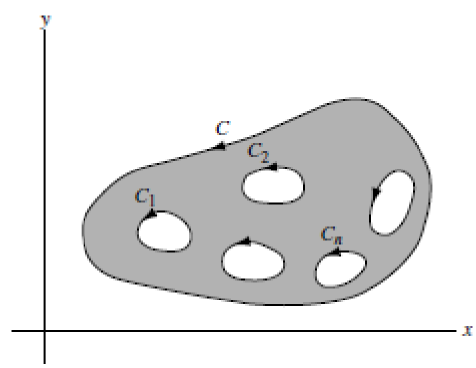


الشكل(٤أ)

النظرية ٢: لتكن $f(z)$ تحليلية في منطقة ما محددة بمنحنيات بسيطة مغلقة غير متداخلة C و $C1$ و $C2$ الى Cn (حيث تقع المنحنيات C و $C1$ و $C2$ الى Cn في C كما في الشكل(٤ب)) وكذلك على هذه المنحنيات، فأن

$$\oint_{C} f(z)dz = \oint_{C1} f(z)dz + \oint_{C2} f(z)dz + \oint_{C3} f(z)dz + \cdots + \cdots \oint_{Cn} f(z)dz \qquad (4-15)$$

تعتبر هذه نظرية تعميماً للنظرية ١.



الشكل(٤ب)

صيغ كوشي التكاملية

لتكن D منطقة بسيطة الاتصال ولتكن نقطة ثابتة في D، فاذا $f(z)$ كانت دالة تحليلية في D فأن الدالة $\frac{f(z)}{z-z_0}$ لا يمكن ان تكون تحليلية عند z_0. اي ان $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz$ لا يساوي صفراً بصورة عامة على المنحني C

يشمل z_0. وكما هو معروف من نظرية كوشي لمنطقة بسيطة الاتصال ان لهذا التكامل القيمة نفسها على جميع مسارات C حول z_0. لتحديد قيمة هذا التكامل نأخذ الصيغ التكاملية:

صيغة كوشي التكاملية ١

لتكن $f(z)$ دالة تحليلية داخل او على المنحني المغلق البسيط C، مأخوذاً بالاتجاه الموجب، فاذا كانت z_0 نقطة داخل C، فأن

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \qquad , z_0 \in C \qquad (4-16)$$

صيغة كوشي التكاملية ٢ للتفاضلات

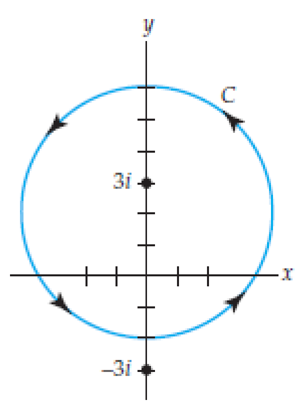
لتكن $f(z)$ دالة تحليلية داخل او على المنحني المغلق البسيط C، مأخوذاً بالاتجاه الموجب، فاذا كانت z_0 نقطة داخل C، لهذا فأن المشتقة من الرتبة n تعطى:

$$f^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \qquad , z_0 \in C \qquad (4-17)$$

مثال٧: طبقاً لنظرية كوشي التكاملية ١، جد

$$\oint_C \frac{z}{z^2+9} dz$$

حيث C مأخوذ باتجاه الموجب كما مبين في الشكل ادناه، يمثل دائرة $|z-2i| = 4$ بنصف قطر 4 وتم ازاحة الدائرة التي مركزها $(0,0)$ على المحور y الى الاعلى بمقدار $2i$.



الحل: بتحليل المقام $z^2+9=(z-3i)(z+3i)$، نرى ان النقطة $z=3i$ فقط تقع داخل الكنتور C المتمثل $|z-2i|=4$. لذلك فأن

$$f(z)=\frac{z}{z+3i}$$

لدينا $z-z_0=z-3i$، وان $f(z)$ عند z_0 تتمثل بـ $f(z_0)$

$$f(z_0)=\frac{3i}{3i+3i}=\frac{1}{2}$$

يمكن كتابة التكامل

$$\oint_{|z-2i|=4}\frac{z}{z^2+9}dz=\oint_{|z-2i|=4}\frac{\frac{z}{z+3i}}{(z-3i)}dz$$

باستخدام صيغة كوشي التكاملية ١، فأن

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-2i|=4}\frac{\frac{z}{z+3i}}{z-3i}dz$$

بترتيب المعادلة اعلاه

$$2\pi i\frac{1}{2}=\oint_{|z-2i|=4}\frac{\frac{z}{z+3i}}{z-3i}dz$$

وبالتالي فان

$$\oint_{|z-2i|=4}\frac{z}{z^2+9}dz=\pi i$$

مثال٨: باستخدام صيغة كوشي التكاملية، اثبت ان

$$\oint_C\frac{z}{(z^2-9)(z+i)}dz=-\frac{\pi}{5}$$

حيث C مأخوذ باتجاه الموجب وهو يمثل دائرة $|z|=2$ بنصف قطر 2 ومركزها يقع عند $(0,0)$.

الحل: : بتحليل المقام $(z^2-9)(z+i)=(z-3)(z+3)(z+i)$، نرى ان النقطة $z=-i$ فقط تقع داخل الكنتور C المتمثل $|z|=2$. لذلك فأن

$$f(z)=\frac{z}{z^2-9}$$

لدينا $z-z_0=z+i$،وان $f(z)$ عند z_0 تتمثل بـ $f(z_0)$

$$f(z_0)=\frac{-i}{(-i)^2-9}=\frac{i}{10}$$

يمكن كتابة التكامل بالشكل

$$\oint_{|z|=2}\frac{z}{(z^2-9)(z+i)}dz=\oint_{|z|=2}\frac{\frac{z}{z^2-9}}{z+i}dz$$

بالمقارنة مع صيغة كوشي التكاملية ١، فأن

$$2\pi i f(z_0)=\oint_{|z|=2}\frac{\frac{z}{z^2-9}}{z+i}dz$$

بترتيب المعادلة اعلاه

$$2\pi i\frac{i}{10}=\oint_{|z|=2}\frac{\frac{z}{z^2-9}}{z+i}dz$$

وبالتالي فأن

$$\oint_{|z|=2}\frac{z}{(z^2-9)(z+i)}dz=-\frac{\pi}{5}$$

مثال٩: باستخدام صيغة كوشي التكاملية١، جد

$$\oint_C\frac{z^2-1}{z^2+1}dz$$

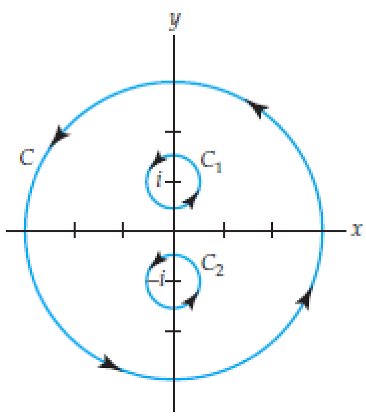
حيث ان C دائرة $|z|=3$ بنصف قطر 3 مركزها عند $(0,0)$، مأخوذ باتجاه الموجب.

الحل: نبسط لكي نستخدم صيغة كوشي التكاملية١. بتحليل المقام $z^2+1=(z-i)(z+i)$، نرى ان كل من $z=i$ و $z=-i$ تقع داخل C. لذلك بالنسبة لبعض $A ، B \in C$ لدينا ما يلي:

$$\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{z^2-i^2}=\frac{1}{(z-i)(z+i)}=\frac{A}{z-i}+\frac{B}{z+i}=\frac{A(z+i)+B(z-i)}{(z-i)(z+i)}$$

لذلك من $1=A(z+i)+B(z-i)$ نجد، عند $z=i$ فأن $A=\frac{1}{2i}$، وعند $z=-i$ فأن $B=-\frac{1}{2i}$.
لذلك فأن:

$$\frac{1}{(z^2+1)}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right)$$



أن $f(z)=z^2-1$ في كلا التكاملين، وبالتالي باستخدام $(4-15)$

$$\oint_{|z|=3}\frac{z^2-1}{(z^2+1)}dz=\frac{1}{2i}\left(\oint_{C1}\frac{z^2-1}{z-i}dz-\oint_{C2}\frac{z^2-1}{z+i}dz\right)$$

بالمقارنة مع صيغة كوشي التكاملية١:

$$\oint_{|z|=3}\frac{z^2-1}{(z^2+1)}dz=\frac{1}{2i}(2\pi i\, f(z_0=i)-2\pi i\, f(z_0=-i))$$

$$\oint_{|z|=3}\frac{z^2-1}{(z^2+1)}dz=\frac{1}{2i}(2\pi i(-2+2))=0$$

مثال١٠: باستخدام صيغة كوشي التكاملية، جد

$$\oint_C \frac{ze^z}{(z^2+1)}dz$$

حيث ان C دائرة $|z| = 2$ بنصف قطر 2 مركزها عند (0,0) ،مأخوذ بالاتجاه الموجب.

الحل: نبسط لكي نستخدم صيغة كوشي التكاملية١. بتحليل المقام $z^2 + 1 = (z-i)(z+i)$، نرى ان كل من $z = i$ و $z = -i$ تقع داخل C. لذلك بالنسبة لبعض A ، $\mathrm{B} \in \mathrm{C}$ لدينا ما يلي:

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{z^2-i^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{\mathrm{A}}{z-i} + \frac{\mathrm{B}}{z+i} = \frac{\mathrm{A}(z+i)+\mathrm{B}(z-i)}{(z-i)(z+i)}$$

لذلك من $1 = \mathrm{A}(z+i) + \mathrm{B}(z-i)$ نجد، عند $z = i$ فأن $\mathrm{A} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{i}}$، وعند $z = -i$ فأن $\mathrm{B} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{i}}$.
لذلك فأن:

$$\frac{1}{(z^2+1)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{i}}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)$$

أن $f(z) = ze^z$، لذا بواسطة صيغة كوشي التكاملية:

$$\oint_{|z|=2} \frac{ze^z}{(z^2+1)}dz = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{i}}\left(\oint_{C1} \frac{ze^z}{z-i}dz - \oint_{C2} \frac{ze^z}{z+i}dz\right)$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{i}}\left(2\pi i f(z_0 = i) - 2\pi i f(z_0 = -i)\right) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{i}}\left(2\pi i(ie^i) - 2\pi i(-ie^{-i})\right)$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(2\pi(ie^i + ie^{-i})\right)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{e^i + e^{-i}}{\mathbf{2}}\right)$$

$$\oint_C \frac{ze^z}{(z^2+1)}dz = 2\pi i\, cos(1)$$

مثال ١١: باستخدام صيغة كوشي التكاملية٢ للتفاضلات، جد

$$\oint_C \frac{z+1}{(z^4+2iz^3)}dz$$

حيث ان C دائرة $|z| = 1$ بنصف قطر 1 مركزها عند $(0,0)$، التكامل مأخوذ باتجاه الموجب.

الحل: من خلال فحص مقام الكمية تحت التكامل$(z^4 + 2iz^3) = z^3(z+2i)$، نجد أنها تكون غير تحليلية عند $z = 0$ و $z = -2i$ وان $z = 0$ فقط تقع في داخل الكنتور C، لذلك:

$$\frac{z+1}{(z^4+2iz^3)} = \frac{z+1}{z^3(z+2i)} = \frac{\frac{z+1}{z+2i}}{z^3}$$

حيث ان $z_0 = 0$ وان $n = 3-1 = 2$ وكذلك فأن $f(z) = \frac{z+1}{z+2i}$، وان

$$f''(z) = \frac{2-4i}{(z+2i)^3} = \frac{2-4i}{z^3+6iz^2-12z-8i}$$

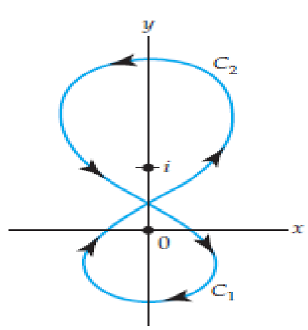
$$f''(z_0 = 0) = \frac{2i-1}{4i}$$

بالمقارنة مع صيغة كوشي التكاملية ٢ للتفاضلات، نجد

$$\oint_{|z|=1} \frac{z+1}{(z^4+2iz^3)}dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(z_0 = 0) = -\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{2}$$

مثال ١٢: للمنحني C على شكل رقم 8 المبين في الشكل ادناه وباستخدام صيغة كوشي التكاملية للتفاضلات، جد

$$\oint_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}dz$$



الحل: على الرغم من انه ليس كنتور بسيطاً، الذي هو مكون من كنتورين مغلقين بسيطين $C1$ و $C2$ كما موضح في الشكل اعلاه. ان اتجاه $C1$ يكون باتجاه عقرب الساعة او بالاتجاه **السالب**.

$$\oint_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}dz = -\oint_{C1} \frac{\frac{z^3+3}{(z-i)^2}}{z}dz + \oint_{C2} \frac{\frac{z^3+3}{z}}{(z-i)^2}dz = -I1+I2$$

لحساب $I1$: هنا لدينا $z_0=0$ و $n=0$،

$$f(z) = \frac{z^3+3}{(z-i)^2} = \frac{z^3+3}{z^3-2iz-1}$$

لا وجود للمشتقة لان $n=0$ لذلك كأنما نستخدم صيغة كوشي التكاملية،

$$f(z_0=0) = -3$$

$$I1 = \oint_{C1} \frac{\frac{z^3+3}{(z-i)^2}}{z}dz = 2\pi i f(z_0=0) = -6\pi i$$

لحساب $I2$: هنا لدينا $z_0=i$ و $n=1$،

$$f(z) = \frac{z^3+3}{z}$$

$$\acute{f}(z) = \frac{2z^3-3}{z^2}$$

$$\acute{f}(z_0=i) = 3+2i$$

$$I2 = \oint_{C2} \frac{\frac{z^3+3}{z}}{(z-i)^2}dz = 2\pi i\acute{f}(z_0=i) = -4\pi+6\pi i$$

$$\oint_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}dz = -(-6\pi i)-4\pi+6\pi i = -4\pi+12\pi i$$

تمارين

باستخدام صيغة كوشي التكاملية١، جد

1) $\oint_C \frac{z^2+1}{z^2-1} dz \qquad , C: |z-1| = 1$

2) $\oint_C \frac{z^2+1}{z(2z-1)} dz \qquad , C: |z| = 1$

3) $\oint_C \frac{cosz}{(z^2-6z+5)} dz \qquad , C: |z| = 4$

4) $\oint_C \frac{1}{z^2+4} dz \qquad , C: |z-i| = 2$

باستخدام صيغة كوشي التكاملية٢ للتفاضلات، جد

5) $\oint_C \frac{z+1}{(z^4+4z^3)} dz \qquad , C: |z| = 1$

6) $\oint_C \frac{e^z}{z^3} dz \qquad , C: |z| = 1$

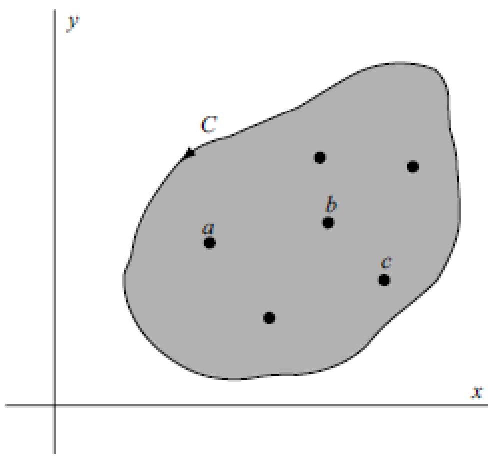
7) $\oint_C \frac{z+1}{z(z-1)(z-1)^3} dz \qquad , C: |z| = 1$

8) $\oint_C \frac{z^2+1}{(z-1)^3} dz \qquad , C: |z-1| = 1$

نظرية المتبقي وحساب التكاملات المحددة بطريقة نظرية الدوال المعقدة

نظرية المتبقي

نفرض أن الدالة $f(z)$ دالة احادية القيمة وتحليلية داخل او على المنحني المغلق البسيط C ما عدا في عدد محدود من النقاط $z = a$ ، $z = b$ و $z = c$ ، والتي لها المتبقيات المعطاة بـ $R(z = a)$ و $R(z = b)$ و $R(z = c)$ ، كما في الشكل (٥):



الشكل (٥)

تنص نظرية المتبقي على

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i[R(z = a) + R(z = b) + R(z = c)] \qquad (4-18)$$

لذلك فأن التكامل $f(z)$ حوال المنحني C يكون مساوي الى حاصل ضرب $2\pi i$ من المرات لمجموع المتبقيات عند جميع النقاط المنفردة a, b, c على الترتيب والتي تقع بأكملها داخل C. الشكل(٦) يوضح الدوائر C_1، C_2 و C_3 التي مركزها عند النقاط المنفردة c, b, a على الترتيب والتي تقع بأكملها داخل C، من النظرية ٢ التي تمثلها $(4-15)$

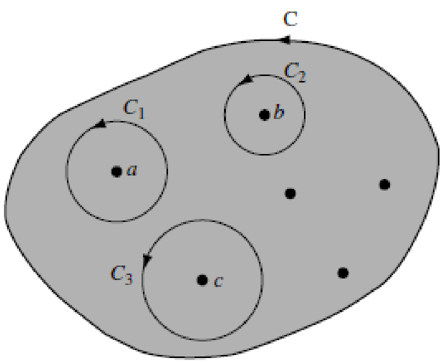
$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C1} f(z)dz + \oint_{C2} f(z)dz + \oint_{C3} f(z)dz + \cdots \qquad (4-19)$$

من المعادلتين $(4-18)$ و $(4-19)$، نجد ان:

$$\oint_{C1} f(z)dz = 2\pi i R(z = a)$$

$$\oint_{C2} f(z)dz = 2\pi i R(z=b)$$

$$\oint_{C3} f(z)dz = 2\pi i R(z=c)$$



الشكل(٦)

لنقطة منفردة مثل $z = a$ ، لكي نحسب متبقي الدالة $f(z)$ الذي يمثله $R(z=a)$ من العلاقة التالية:

$$R(z=a) = \lim_{z\to a}\left\{\frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}}[(z-a)^n f(z)]\right\} \qquad (4-20)$$

حيث n تمثل رتبة النقطة المنفردة او رتبة القطب. لحالة القطب البسيط $(n=1)$، فأن العلاقة $(4-20)$ تصبح:

$$R(z=a) = \lim_{z\to a}\{(z-a)f(z)\} \qquad (4-21)$$

مثال١٣: احسب التكامل التالي حسب نظرية المتبقي

$$\oint_C \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}dz \qquad C: |z| = 3$$

الحل: ان الدالة

$$f(z) = \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}$$

لها قطب مزدوج $n=2$ عند $z=0$ واخر بسيط $n=1$ عند النقاط $z=-1+i$ و $z=-1-i$

بالنسبة للقطب المزدوج $n=2$ عند $z=0$، من المعادلة $(4-20)$ وباستخدام تفاضل قسمة دالتين، يكون

$$R(z=0)=\lim_{z\to 0}\left\{\frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial z}\left[z^2\frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}\right]\right\}=\lim_{z\to 0}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{e^{zt}}{(z^2+2z+2)}\right]\right\}=\frac{t-1}{2}$$

بالنسبة للقطب البسيط $n=1$ عند النقاط $z=-1+i$ و $z=-1-i$ ، من المعادلة $(4-21)$، يكون

$$R(z=-1+i)=\lim_{z\to -1+i}\left\{(z-(-1+i))\frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}\right\}=\frac{e^{(-1+i)t}}{4}$$

$$R(z=-1-i)=\lim_{z\to -1-i}\left\{(z-(-1-i))\frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}\right\}=\frac{e^{(-1-i)t}}{4}$$

من المعادلة $(4-18)$

$$\oint_C \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}\,dz=2\pi i\left[\frac{t-1}{2}+\frac{e^{(-1+i)t}}{4}+\frac{e^{(-1-i)t}}{4}\right]=2\pi i\left[\frac{t-1}{2}+\frac{e^{-t}}{2}\cos(t)\right]$$

مثال١٤: طبقا لنظرية المتبقي، جد التكامل التالي:

$$\oint_C \frac{1}{z^2+1}\,dz \qquad ,C:|z|=3$$

بتحليل المقام $z^2+1=(z-i)(z+i)$، نرى ان كل من $z=i$ و $z=-i$ تقع داخل C.

$$\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{z^2-i^2}=\frac{1}{(z-i)(z+i)}$$

يوجد نقطتان منفردتان (قطبان بسيطان) $z=i$ و $z=-i$. **بالنسبة للقطب البسيط $n=1$ عند النقاط $z=i$ و $z=-i$ ، من المعادلة $(4-21)$، يكون**

$$R(z=i)=\lim_{z\to i}\left\{(z-i)\frac{1}{(z-i)(z+i)}\right\}=\frac{1}{2i}$$

$$R(z=-i)=\lim_{z\to -i}\left\{(z+i)\frac{1}{(z-i)(z+i)}\right\}=\frac{-1}{2i}$$

من المعادلة $(4-18)$

$$\oint_C \frac{1}{z^2+1}\,dz=2\pi i\left[\frac{1}{2i}-\frac{1}{2i}\right]=0$$

تمارين

طبقا لنظرية المتبقي، جد التكاملات التالية:

1) $\oint_C \frac{1}{z^2+4}\,dz \qquad ,C: |z+1|=3$

2) $\oint_C \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}\,dz \qquad ,C: |z+1|=3$

3) $\oint_C \frac{e^{\pi z/4}}{z^2+4}\,dz \qquad ,C: |z+1|=3$

حساب التكاملات المحددة بطريقة المتبقي

لحساب التكاملات المحددة بطريقة المتبقي للدالة $f(z)$ داخل وعلى حدود المنحني المغلق البسيط C وهناك بعض الحالات العامة مثل هذه التكاملات:

أحدها: تكاملات دوال النسبية لـ $\sin\theta\,,\cos\theta$ من النوع

$$I=\int_0^{2\pi} R(\sin\theta\,,\cos\theta)\,d\theta \tag{4-22}$$

حيث ان $R(\sin\theta\,,\cos\theta)$ دالة نسبية حقيقية لـ $\sin\theta\,,\cos\theta$ وتكون منتهية في الفترة $0\le\theta\le 2\pi$، لنفرض ان $z=e^{i\theta}$ فيكون

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \tag{4-22a}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) \qquad (4-22b)$$

وبهذا يكون المكامل دالة نسبية z مثل $f(z)$ وبالإضافة الى ذلك

$$dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta$$

وبهذا يمكن اعادة كتابة المعادلة $(4-22)$ بالشكل التالي:

$$I = \oint_C f(z)\frac{dz}{iz} \qquad (4-23)$$

حيث ان C هو دائرة الوحدة $|z| = 1$) عندما تتغير θ من 0 الى 2π فأن z يدور دورة واحدة على الدائرة $|z| = 1$).

مثال: طبقا لنظرية المتبقي، جد

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{5}{4} + \sin\theta}$$

الحل:

$$\frac{5}{4} + \sin\theta = \frac{5}{4} + \frac{z^2 - 1}{2iz} = \frac{2z^2 + 5iz - 2}{4iz}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{5}{4} + \sin\theta} = \oint_C \frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{2z^2 + 5iz - 2}{4iz}} = \oint_C \frac{4dz}{2z^2 + 5iz - 2}$$

$$= \oint_C \frac{4dz}{(z + 2i)(2z + i)} = \oint_C \frac{4dz}{2(z + 2i)\left(z + \frac{i}{2}\right)}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{5}{4} + \sin\theta} = \oint_C \frac{2dz}{(z + 2i)\left(z + \frac{i}{2}\right)}$$

حيث C دائرة $|z| = 1$. ولهذا تقع النقطة المنفردة الوحيدة $z = -\frac{i}{2}$ داخل C وهي قطب بسيط.

بالنسبة للقطب البسيط $n = 1$ عند $z = -\frac{i}{2}$ ، من المعادلة $(4-21)$، يكون

$$R\left(z = -\frac{i}{2}\right) = \lim_{z \to -\frac{i}{2}} \left\{ \left(z + \frac{i}{2}\right) \frac{2}{(z+2i)\left(z + \frac{i}{2}\right)} \right\} = \frac{4}{3i}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{5}{4} + \sin\theta} = 2i\pi R\left(z = -\frac{i}{2}\right) = \frac{8\pi}{3}$$

مثال: طبقا لنظرية المتبقي، جد

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta}$$

الحل:

$$3 - 2\cos\theta + \sin\theta = 3 - 2\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) + \left(\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) = \frac{2iz}{z^2(1-2i) + 6iz - 1 - 2i}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta} = \oint_C \frac{\frac{dz}{iz}}{3 - 2\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) + \left(\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)}$$

$$I = \oint_C \frac{2dz}{z^2(1-2i) + 6iz - 1 - 2i}$$

نستخدم طريقة الدستور بالنسبة للمقام $z^2(1-2i) + 6iz - 1 - 2i$ لاستخراج النقاط المنفردة

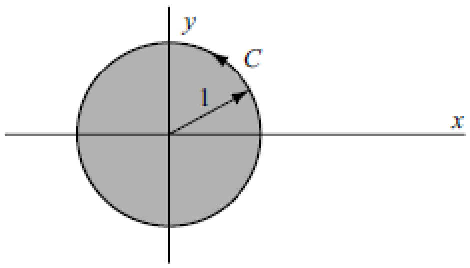
$$z = \frac{-6i \pm \sqrt{(6i)^2 - 4(1-2i)(-1-2i)}}{2(1-2i)} = \frac{-6i \pm 4i}{2(1-2i)} = 2 - i, \frac{2-i}{5}$$

النقطة $\frac{2-i}{5}$ تقع فقط داخل C وهي تمثل قطب بسيط حيث C هي دائرة وحدة التي نصف قطرها 1 ومركزها $(0,0)$

، بالنسبة للقطب البسيط $n = 1$ عند $z = \frac{2-i}{5}$ ، من المعادلة $(4-21)$، يكون

$$R\left(z=\frac{2-i}{5}\right)=\lim_{z\to\frac{2-i}{5}}\left\{\left(z-\frac{2-i}{5}\right)\frac{2}{z^2(1-2i)+6iz-1-2i}\right\}=\frac{1}{2i}$$

$$I=\oint_C \frac{2dz}{z^2(1-2i)+6iz-1-2i}=2i\pi R\left(z=\frac{2-i}{5}\right)=\pi$$



تمارين

طبقا لنظرية المتبقي، جد التكامل التالي:

1) $$I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos 3\,\theta\; d\theta}{5-4\cos\theta}$$

2) $$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(5-3\sin\theta)^2}$$

2) $$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2}$$