7 - إنتشار الموجات الكهرومغناطيسية المستوية في الأوساط غير المحدودة.

في هذه الفقرة سوف ندرس انتشار الموجات الكهرومغناطيسية في الأوساط المختلفة* وسنفترض أن الوسط ممتد إلى اللانهاية لكي نتفادى الانعكاسات والانكسارات التي تحدث فيها الموجة على السطوح المشتركة بين الأوساط المختلفة.

* كذلك سنفترض أن الوسط متجانس خطياً ومتماثلاً اي أن كل من μ و ϵ تكون ثابتة القيمة بحيث تصح العلاقتين

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

* سوف نعتبر أن الموجة أحادية التردد اي أن لا تتغير مع الزمن ولا تتغير مع الاحداثيات xyz .

الآن سوف نعتمد على معادلات ماكسويل

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f$$

وذلك لاشتقاق معادلة الموجة الخاصة بكل من $\vec{E}$ و $\vec{H}$.

من معادلة ماكسويل الاولى بعد أن نأخذ $\vec{\nabla}\times$ للطرفين

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\vec{\nabla}\,\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$

وباستخدام المتطابقة الآتية (حيث أن $\vec{A}$ تعني اي متجه):

$$\boxed{\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = -\nabla^2\vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})}$$

نعوض في العلاقة اعلاه نحصل على

$$-\nabla^2\vec{E} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$

وبما أن $\vec{B} = \mu\vec{H}$ وبعد أن نضرب بـ (-1) نحصل على:

$$\therefore\ \nabla^2\vec{E} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) = \mu\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{H}) \quad ---- 72$$

وبالاستفادة من معادلة ماكسويل الثانية وبعد التعويض عن $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ نحصل على:

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}_f + \epsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

نعوض في العلاقة (72):

$$\nabla^2\vec{E} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) = \mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{J}_f + \epsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \quad --- 73$$

وباستخدام معادلة ماكسويل الرابعة بعد أن نعوض عن $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon}$$

حيث أن $\rho_f \Leftarrow$ كثافة الشحنة الحجمية للشحنات الحرة

$\Leftarrow J_f$

$$\therefore \nabla^2\vec{E} - \vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}_{\left(\frac{\rho_f}{\epsilon}\right)}) = \mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{j}_f + \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\therefore \nabla^2\vec{E} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{j}_f + \vec{\nabla}\left(\frac{\rho_f}{\epsilon}\right) \quad ---74$$

المعادله 74 تسمى معادله الموجة للمتجه $\vec{E}$ في وسط متجانس خطي متماثل الصفات ، واذا ما استخدمنا العلاقة $\vec{j}_f = \sigma\vec{E}$ فأن العلاقة (74) تصبح :

$$\boxed{\nabla^2\vec{E} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla}\left(\frac{\rho_f}{\epsilon}\right)} \quad ----75$$

معادله الموجة للمتجه $\vec{E}$

الأن سوف نستخرج معادله الموجة للمتجه $\vec{H}$:
من معادله ماكسويل الثانية :

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j}_f + \epsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

نأخذ $\vec{\nabla}\times$ للطرفين نحصل على :

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{H}) = \vec{\nabla}\times\vec{j}_f + \epsilon\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{E})$$

معادله ماكسويل الأولى

$$-\nabla^2\vec{H} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}) = \vec{\nabla}\times\sigma\vec{E} + \epsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$$

$$\therefore -\nabla^2\vec{H} + \vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{H}}) = \sigma\underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{E})}_{-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}} - \epsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

$\vec{B} \Rightarrow \mu\vec{H}$

من معادله ماكسويل الثالثة

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

$\therefore \vec{\nabla}\cdot\vec{H} = 0$

لان $\vec{B} = \mu\vec{H}$

$$\therefore \quad -\nabla^2 \vec{H} + \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + \sigma\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0$$

وبضرب الطرفين ب (1-) نحصل على

$$\boxed{\nabla^2 \vec{H} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \sigma\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0} \quad --- 76$$

المعادلة (76) هي : معادلة الموجة الخاصة بالمتجه $\vec{H}$

8 . حل معادلة الموجة في الأوساط غير المحدودة

قبل أن نبدأ بحل معادلة الموجه في الأوساط غير المحدوده المختلفه لابد أن نؤكد الملاحظات الفيزيائيه التاليه :

أولاً :
لاتوجد هنالك حدود معينه للتردد لأستخدام معادلات ماكسويل ولكن عملياً يتم تطبيق هذه المعادلات على ترددات تمتد من ترددات موجات الراديو الطويله $f = 10^4 \ Hz$ الى الترددات الخاصه بأشعة كاما ذات الطاقة العاليه $f = 10^{24} \ Hz$.

ثانياً :
كل مركبات المجال سوف تعتمد الداله الاسيه $e^{i\omega t}$ كمعامل ليتغير مع الزمن ومعنى هذا أن :

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{i\omega t} = \underset{\substack{\text{مقدار ثابت} \\ \text{مع الزمن}}}{i\omega} \, e^{i\omega t}$$

ثالثاً: سوف نستخدم المتجه $\mu\vec{H}$ في جميع المعادلات الرياضية بدلاً من المتجه $\vec{B}$ وذلك لأن المتجه $\vec{H}$ يرتبط بالكثير من المصطلحات الفيزيائية على سبيل المثال متجه بوينتنك

$$\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H}$$

وكذلك كما سنثبت لاحقاً أن الممانعة المميزة للوسط تعطى بما يلي:

$$Z = \frac{E}{H}$$

رابعاً:
في كل الأوساط التي سوف نناقشها سوف نفرض أنها خالية من الشحنات الحرة اي أن:

$$\rho_f = 0$$

وبذلك المعادله (75) تأخذ الصيغه التالية:

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad --- 77$$

خامساً:

سوف نعتبر أن الموجه الكهرومغناطيسيه تنتشر بالإتجاه Z فقط اي أن المتجه $\vec{E}$ أو المتجه $\vec{H}$ لا يعتمدان على المحورين x و y . واعتماداً على معادله ماكسويل الرابعه:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f = 0 \quad ; \quad \vec{\nabla} \cdot \epsilon \vec{E} = 0 \quad ; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\vec{i}E_x+\vec{j}E_y+\vec{k}E_z\right)=0$$

$$\therefore \frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0 \quad ---\ 78$$

وعندما نأخذ الملاحظة (خامساً) بنظر الاعتبار فهذا يعني أن

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}=0 \quad و \quad \frac{\partial E_y}{\partial y}=0$$

وبذلك نحصل على أن $\frac{\partial E_z}{\partial z}=0$ وهذا معناه أن

أما أن تكون E_z ثابتة القيمة وهذا غير ممكن لأننا نتعامل مع مجالات متغيرة القيمة بالنسبة للزمن وبالنسبة للمحاور

أو تكون $E_z=0$ وهذه هي الحالة الصحيحة أي أن المجال الكهربائي $\vec{E}$ له مركبتان الأولى E_x في الاتجاه x و الثانية E_z في الاتجاه y.

وعليه المعادلة (78) تصبح:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}=0 \quad ---\ 79$$

وبنفس الطريقة يمكن أن نثبت أن

$$\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}=0$$

لذلك فإن الموجة المستوية التي تنتشر بالاتجاه Z يكون
لها مركبتان لكل من $\vec{E}$ و $\vec{H}$ في الاتجاهين
X و Y وعلى التوالي العموديين على اتجاه انتشار
الموجة ، إذن هي موجة كهرومغناطيسية مستعرضة
في الوسط المتجانس المتماثل الصفات الخطي .

سادساً :
إن الأوساط غير المحدودة المختلفة التي يمكن أن نناقش
انتشار الموجات الكهرومغناطيسية المستوية فيها هي :

1 - الفراغ
2 - الوسط العازل
3 - الوسط الموصل
4 - الوسط جيد التوصيل
5 - الغاز المتأين .