## 3 - معادلة الموجة غير المتجانسة لكل من الجهد العددي $\Phi$ والجهد المتجه $\vec{A}$

عندما تكون المجالات الكهربائية والمغناطيسية متغيرة مع الزمن فإننا لا يمكن أن نستخدم المعادلات الخاصة بالمجالات المستقرة وهذا ما أكدنا عليه من الفقرتين الاولى والثانية من الفصل السادس . بمعنى أن

$\vec{\nabla}\times\vec{E} \neq 0$

$E \Leftarrow$ المجال الكهربائي

$B \Leftarrow$ كثافة الفيض المغناطيسي

$\vec{\nabla}\times\vec{B} \Rightarrow$ تعطي قيمة مختلفة في حالة المجالات المتغيرة مع الزمن عما هو عليه في حالة المجالات المستقرة .

وبما أن $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ تصح في كل الحالات وأن تفرق دوار اي متجه يساوي صفر (بمعنى $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{Z})=0$ حيث أن $\vec{Z}$ تمثل اي متجه) فأننا سوف نعرف المتجه $\vec{B}$ بدلالة الجهد المتجه $\vec{A}$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \qquad (29) \qquad \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0}$$

كذلك نعرف المتجه $\vec{E}$ بدلالة الجهد العددي $\Phi$ والجهد المتجه $\vec{A}$ وكالآتي

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad --- \ 30$$

وعليه/عندما تكون $\vec{B}$ لا تتغير مع الزمن فأن $\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=0$

ونحصل على :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$$

تماما في حالة الكهربائية المستقرة .

**الآن** سوف نأخذ دوار ( $\vec{\nabla}\times$ ) طرفي المعادلة 30 نحصل على

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\underbrace{\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi)} - \underbrace{\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}} \quad \ldots 31$$

هذا الحد يساوي صفر حيث أن
$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\phi = 0$
لـ $\phi$ كمية عددية ويمكن إثبات ذلك بسهولة

هذا الحد يمكن اعادة كتابته كالآتي :

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{A})} \rightarrow \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

∴ العلاقة 31 تأخذ الصيغة الآتية

$$\therefore \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow$$
وهي العلاقة ( ) التي تمثل معادلة ماكسويل الأولى .

∴ التعريفين في العلاقات (29) و(30) يتفقان مع معادلات ماكسويل الأولى والثانية .

بعد التأكد من صحة التعريفين في العلاقات (29) و (30) ، الآن يمكن أن نجد معادلات الحركة الخاصة بالجهد المتجهي $\vec{A}$ والجهد العددي $\phi$ .

من معادلة ماكسويل الثانية :

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

نفرض $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$ و $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ حيث أن $\epsilon$ هي سماحية الوسط و $\mu$ نفاذية الوسط .

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{B}}{\mu} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \epsilon \vec{E}$$

نفوض عن $\vec{B}$ من العلاقة 29

نفوض عنها من العلاقة 30

$$\therefore \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu \vec{J} + \epsilon \mu \frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu \vec{J} - \epsilon \mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) \quad --- 32$$

وباستخدام المتطابقة

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad --- 33$$

نفوض (33) في (32) نحصل على العلاقة التالية :
( بعد ضرب طرفي العلاقة بـ 1- )

$$\nabla^2 \vec{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = -\mu \vec{J} \quad --- 34$$

ولو تم تطبيق شرط لورنس الذي ينص على أن

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\epsilon \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad --- 35$$

فإن القوس في العلاقة (34) يساوي صفر .

وبذلك العلاقة 34 كالآتي

$$\nabla^2 \vec{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \quad ---- 36$$

المعادله (36) هي معادله تفاضليه غير متجانسه وتسمى معادله الموجيه الخاصه بالجهد المتجهي $\vec{A}$ .

وفي الحاله التي تكون فيها المجالات غير معتمده على الزمن فأن

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

وبذلك نحصل على :

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{j} \quad --- 37$$

حيث أن المعادله (37) تصح في حالة التيارات المستمره

∴ العلاقات المهمه الخاصه بالجهد المتجهي هي

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \quad --- 29$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\epsilon\mu \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad --- 35$$

وفي حاله التيارات المستمره (حيث تكون $\phi$ ثابته لاتتغير مع الزمن)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad ---- 38$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{j} \quad --- 37$$

أما فيما يخص الجهد العددي $\phi$ :

نستخدم معادلة ماكسويل الرابعة

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_f \quad ----(28)$$

وبما أن $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ فإن

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon}$$

نعوض عن $\vec{E}$ من العلاقة 30 ؛

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot\left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho_f}{\epsilon}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\phi + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = -\frac{\rho_f}{\epsilon}$$

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi + \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) = -\frac{\rho_f}{\epsilon}$$

نعوض عنها من العلاقة 35

$$\therefore \nabla^2\phi - \epsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = \frac{-\rho_f}{\epsilon}$$

$$\therefore \nabla^2\phi - \epsilon\mu\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_f}{\epsilon} \quad ---- (39)$$

المعادلة (39) هي معادلة تفاضلية غير متجانسة تمثل معادلة الموجة الخاصة بالجهد العددي $\phi$ .

وعندما تكون $\phi$ ثابتة لا تتغير مع الزمن فإن $\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0$ وبذلك نحصل على

$$\nabla^2\phi = \frac{-\rho_f}{\epsilon} \quad ---(40)$$

العلاقة الأخيرة علاقة معروفة وهي معادلة بوزون (Poisson's equation)