الفصل السادس

معادلات ماكسويل وأنتشار الموجات الكهرومغناطيسية في الاوساط المختلفة

1- تمهيد

في الفصول السابقة درسنا ظواهر فيزيائية لها علاقة بالشحنات الكهربائية المستقرة والتي تسبب وجود مجال كهربائي مستقر أو شحنات كهربائية متحركة بسرعة ثابتة (تيار مستمر) والتي ينتج عنها مجال مغناطيسي مستقر، حيث توصلنا الى العلاقات التالية

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 j \qquad \text{---- } 1$$

في هذا الفصل سندرس الظواهر الفيزيائية التي لها علاقة بالمجالات الكهربائية والمغناطيسية عندما تكون هذه المجالات متغيرة مع الزمن حيث لا يصح استخدام العلاقات (1) أعلاه.

وعليه سوف ندرس مايلي :

الجزء الاول : دراسة معادلات ماكسويل .

الجزء الثاني : أستخدام هذه المعادلات لاشتقاق معادله الموجة ثم حلها لدراسة انتشار الموجات الكهرومغناطيسية المستوية في الاوساط المختلفة.

2 : معادلات ماكسويل Maxwell's Equations

ينص قانون الحث لفاراداي على أن القوه الدافعه الكهربائيه المحتثه في دائره تساوي التناقص الزمني للفيض المغناطيسي Ψ الذي يقطع هذه الدائره . اما الصيغه الرياضيه المقابله لهذا النص هي

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Psi}{dt} \quad --- (2)$$

كما أن القوه الدافعه الكهربائيه المحتثه تساوي التكامل الخطي المغلق للمجال الكهربائي $\vec{E}$ في تلك الدائره :

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad --- (3)$$

ما معنى أن تتغير الفيض المغناطيسي بالنسبه للزمن في قانون الحث لفاراداي ؟؟

بمعنى ماذا نقصد ب $\frac{d\Psi}{dt}$ ؟

$\frac{d\Psi}{dt}$

اما / أن تتغير المساحه التي تقطعها المجال المغناطيسي بالنسبه للزمن .

أو / أن تتغير كثافة الفيض المغناطيسي $\vec{B}$ بالنسبه للزمن .

حيث أن :

$$\Psi = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad --- 4$$

تكامل سطحي $\longrightarrow$ s

$$\therefore \mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad --- 5$$

من العلاقتين (5) و (3) نحصل على العلاقة التاليه :

$$\therefore \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad ---- (6)$$

وباستخدام مبرهنة ستوكس:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_s \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad ----(7)$$

وبمقارنة (6) مع (7) نحصل على

$$\int_s \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad ---(8)$$

وبما أن التكامل على طرفي العلاقة (8) هو تكامل سطحي

$$\therefore \quad \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad ---(9)$$

العلاقة (9) تسمى قانون الحث لفاراداي في صيغته التفاضلية وهي اول معادلة من معادلات ماكسويل.

من المعروف أن التكامل الخطي لكثافة الفيض المغناطيسي $\vec{B}$ حول مسار مغلق يساوي حاصل ضرب μ_0 في التيار I الذي يحتويه المسار المغلق وهذا هو نص قانون أمبير

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad ---(10)$$

$$\because \quad I = \int_s \vec{j} \cdot d\vec{s} \quad ---(11)$$

حيث أن $\vec{j}$ تمثل كثافة التيار

$$\therefore \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_s \vec{j} \cdot d\vec{s} \quad --- 12$$

وباستخدام مبرهنة ستوكس:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_s (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} \quad --- 13$$

وبمقارنة (12) و (13) نحصل على

$$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_S \vec{j}\cdot d\vec{s} \quad --- 14$$

وبما أن التكامل سطحي على طرفي العلاقة (14) نحصل على

هذه العلاقة تمثل قانون أمبير الفراغ ←
$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad --- 15$$

الآن نأخذ تفرق $(\vec{\nabla}\cdot)$ لطرفي العلاقة (15)

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \mu_0 (\vec{\nabla}\cdot\vec{j}) \quad ---(16)$$

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = 0 \quad --- (17)$$

وبما أن $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{Z}) = 0$ حيث أن $\vec{Z}$ اي كمية أتجاهية .

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \quad --- (18)$$

ملاحظة مهمة: بالرجوع الى قانون حفظ الشحنة $\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t}$

نستنتج أن $\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0$. لقد اكد ماكسويل أن هذه النتيجة

تصح فقط للمجالات المستقرة وهي لا تصح في حالة المجالات المتغيرة مع الزمن .

وعليه / أقترح ماكسويل أضافة حد مثل $\vec{X}$ الى العلاقة (15) .

وبذلك يأخذ قانون أمبير الصيغة التالية :

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \vec{X} \quad --- 19$$

↑ مجرد كمية أتجاهية

وسوف نحدد معناها الفيزيائي

(4)

ماذا تمثل $\vec{x}$ ؟

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\vec{x} \quad --- (19)$$

$$\therefore \mu_0\vec{J}=\vec{\nabla}\times\vec{B}-\vec{x}$$

نأخذ $\vec{\nabla}\cdot$ للطرفين

$$\mu_0\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{B}}_{\text{صفر}}-\vec{\nabla}\cdot\vec{x}$$

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot\vec{J}=-\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\cdot\vec{x} \quad — 20$$

وبما أن :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=-\frac{\partial\rho_f}{\partial t}$$

فإن

$$-\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\cdot\vec{x}=-\frac{\partial\rho_f}{\partial t} \quad ---- 21$$

وبما أن العلاقة بين كثافة الشحنات الحرة ρ_f ومتجه الازاحة $\vec{D}$ يعطى بما يلي :

$$\frac{\partial\rho_f}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{D})$$

$$\therefore \frac{\partial\rho_f}{\partial t}=\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad --- 22$$

من العلاقتين (21) و (22) نحصل على

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\cdot\vec{x}$$

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{x}}{\mu_0} \quad — 23$$

وبرفع $(\vec{\nabla}\cdot)$ من طرفي العلاقة الأخيرة نحصل على

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\vec{X}}{\mu_0}$$

$$\therefore \vec{X} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{——} \; 24$$

وبتعويض صيغة $\vec{X}$ من العلاقة (24) في العلاقة (19):

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\therefore \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \quad --- \; 25$$

وبما أن $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

$$\boxed{\therefore \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \quad --- \; 26 \leftarrow$$

ثاني علاقة من علاقات ماكسويل

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ تسمى كثافة تيار الأزاحة

ما المعنى الفيزياوي للعلاقة (26) (معادلة ماكسويل الثانية)؟

المعنى هو أن المجال المغناطيسي لا ينشأ فقط من وجود تيار التوصيل الاعتيادي وإنما قد ينشأ من وجود مجال كهربائي متغير.

كذلك لدينا المعادلات (التي مرت علينا سابقاً):

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0} \quad --- \; 27$$

وهي معادلة ماكسويل الثالثة

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f} \quad --- \; 28$$

وهي معادلة ماكسويل الرابعة

كثافة الشحنة الحجمية للشحنات الحرة

وبذلك نحصل على معادلات ماكسويل وهي كالآتي :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\nabla}\times\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad &---9 \\ \vec{\nabla}\times\vec{H} &= \vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad &---26 \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= 0 \quad &---27 \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \rho_f \quad &---28 \end{aligned}}$$

مع العلم أن $\vec{B} = \mu\,\vec{H}$

$$\vec{D} = \epsilon\,\vec{E}$$

حيث أن

ϵ تمثل سماحية الوسط

μ تمثل نفاذية الوسط .
