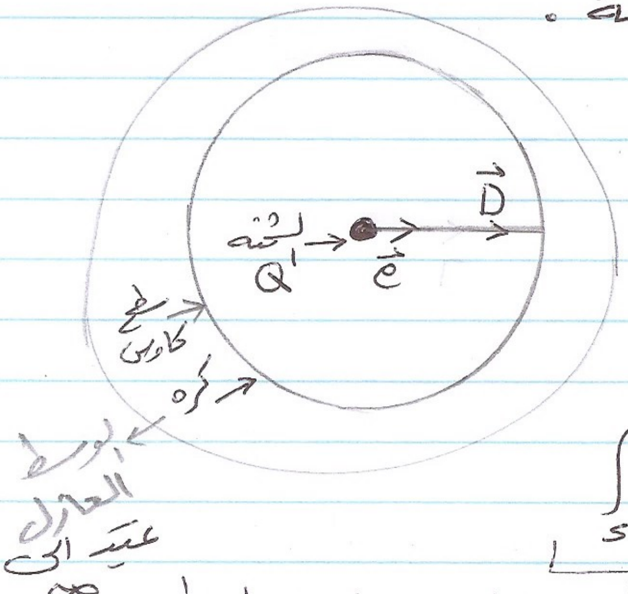
ملاحظة مهمة :

في هذه الأمثلة سوف تعتبر المادة العازلة متجانسة وخطية و متماثلة الصفات ، مالم يشر الى غير ذلك .

مثال (١)

وضعت شحنة نقطية مقدارها $+Q$ داخل مادة عازلة تمتد الى المالانهاية. أحسب الازاحة الكهربائية ، شدة المجال والاستقطاب داخل المادة العازلة.

الحل:



اولاً نرسم سطح كاوس وهو عبارة عن كرة نصف قطرها r مركزها الشحنة النقطية Q.

من قانون كاوس في المواد العازلة من العلاقة (21):

$$\underbrace{\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{s}}_{\text{مقدار الازاحة} \times \text{المساحة السطحية للكرة}} = \underbrace{\int_\tau \rho_f \, d\tau}_{\text{مقدار الشحنة}}$$

مقدار الازاحة $\rightarrow D$ ، المساحة السطحية للكرة $\rightarrow 4\pi r^2$ ، مقدار الشحنة $\rightarrow +Q$

المعادلة 21 تربط بين الازاحة الكهربائية والشحنة

$$\therefore D\,4\pi r^2 = Q \Rightarrow \therefore D = \frac{Q}{4\pi r^2} \Rightarrow \vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\,\vec{e}_r$$

ومن المعادلة (24)

$$\vec{D} = K_e \epsilon_0 \vec{E}$$

K_e: ثابت العزل

المعادلة 24 تربط بين الازاحة الكهربائية وشدة المجال

$$\therefore \frac{Q}{4\pi r^2} = K_e \epsilon_0 E \Rightarrow \therefore E = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0 K_e}$$

ولحساب الاستقطاب علينا الاستفادة من معادلة (25)

المعادلة 25 تربط بين الاستقطاب وشدة المجال

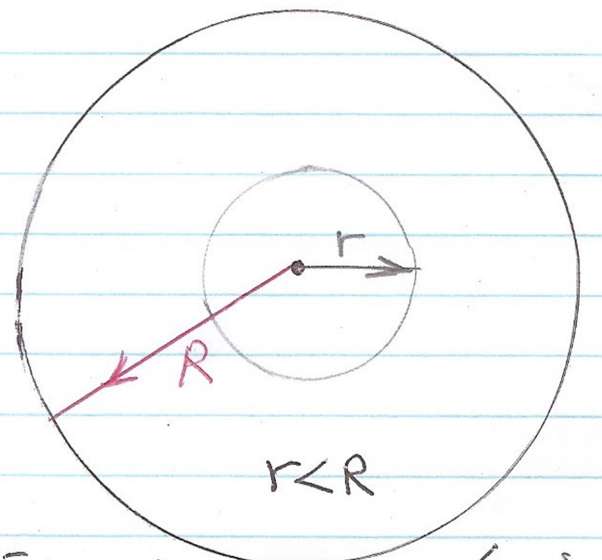
$$\vec{P} = (K_e - 1)\epsilon_0 \vec{E}$$

$$\therefore P = (K_e - 1)\epsilon_0 \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0 K_e} = \frac{(K_e - 1)}{4\pi r^2 K_e} Q$$

$$\therefore P = \frac{K_e - 1}{K_e}\frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{K_e - 1}{K_e} D.$$

مثال (٢)
وضعت شحنة نقطية مقدارها Q في مركز كرة من مادة عازلة
ثابت عزلها K_e أحسب :
١- شدة المجال الكهربائي
٢- الازاحة الكهربائية — في اية نقطة داخل الكرة .
٣- الاستقطاب
٤- الشحنة الكلية المحتثة على السطح
٥- كثافة الشحنة السطحية المحتثة σ_p على سطح الكرة .
٦- كثافة الشحنة الحجمية المحتثة داخل الكرة .

الحل :



① من العلاقة (21)

$$\int_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_\tau \rho_f \, d\tau$$

$$4\pi r^2 D = Q$$

$$\therefore D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$\therefore \vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{e}_r$$

اي أن اتجاه الازاحة الكهربائية يكون باتجاه نصف القطر .

② من العلاقة (24)

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$D = \epsilon E$$

$$\therefore E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2}$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 K_e r^2} \vec{e}_r$$

(٣) من المعادله (25)

$$\vec{P} = (K_e - 1)\,\epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{P} = (K_e - 1)\,\epsilon_0 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 K_e r^2}\,\vec{e}_r$$

$$\therefore P = \frac{K_e - 1}{K_e}\,\frac{Q}{4\pi r^2} = (P_n)_r$$

(٤) اما الشحنه الكليه المحتشده على السطح فهي

$$Q_p = \frac{K_e - 1}{K_e}\,Q$$

(٥) من العلاقة (9)

$$\sigma_p = (P_n)_{r=R}$$

$$(P_n)_{r=R} = \frac{K_e - 1}{K_e}\,\frac{Q}{4\pi R^2}$$

$$\therefore \sigma_p = \frac{K_e - 1}{K_e}\,\frac{Q}{4\pi R^2}$$

(٦) من العلاقة (14)

$$\rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$$

$$= -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 P\right)$$

$$= -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\cancel{r^2}\,\frac{K_e - 1}{K_e}\,\frac{Q}{4\pi \cancel{r^2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\text{مقدار ثابت}\right) = 0$$

حيث أن مشتقة الثابت لاي متغير تساوي الصفر.

مثال (٣)

عندما توضع مادة عازلة في مجال كهربائي متناوب (يتغير مع الزمن) فأن حركة الشحنات المنقطبة تعطي تياراً متناوب يسمى بتيار الأستقطاب . أستخدم قانون حفظ الشحنة لايجاد كثافة التيار .

قانون حفظ الشحنة : أن معدل أنتقال الشحنة المحتثة خلال السطح S يساوي معدل النقصان في مقدار الشحنة المحتثة المنتقلة من الحجم τ

$$\int_S \vec{J}_p \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \rho_p \, d\tau$$

حفظ

$\vec{J}_p$ كثافة تيار الأستقطاب

ρ_p كثافة الشحنة الحجمية المحتثة

$$\int_S \vec{J}_p \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \underbrace{\rho_p}_{=-\vec{\nabla}\cdot\vec{P}} \, d\tau$$

تغير التكامل السطحي الى حجمي باستخدام مبرهنة كاوس

$$\therefore \int_\tau \vec{\nabla}\cdot\vec{J}_p \, d\tau = -\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau (-\vec{\nabla}\cdot\vec{P}) \, d\tau$$

$$\int_\tau \vec{\nabla}\cdot\vec{J}_p \, d\tau = \int_\tau \left(\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\right) d\tau$$

يرفع التكامل من الطرفين :

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot\vec{J}_p = \vec{\nabla}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec{P}$$

برفع $\vec{\nabla}$ من الطرفين نحصل

$$\vec{J}_p = \frac{\partial}{\partial t}\vec{P}$$

مثال (٤)
عزم ثنائي القطب لجزيء يساوي p وكان في حالة سكون
ثم ترك في مجال كهربائي منتظم شدته $\vec{E}$.
ناقش حركة هذا الجزيء في المجال الكهربائي .

الحل
الطاقة الحركية الابتدائية للجزيء $T = 0$ لأنه كان في حالة سكون .
الطاقة الكامنة له تساوي

$$U = -\vec{p}\cdot\vec{E} = -pE\cos\theta$$

متجه عزم ثنائي القطب

θ هي الزاوية المحصورة بين المتجه $\vec{p}$ والمتجه $\vec{E}$.
إذن الطاقة الكلية

$$\therefore W = T + U$$

$$= -\vec{p}\cdot\vec{E}$$

لإيجاد العزم المؤثر على ثنائي القطب نتبع الخطوات التالية

$$\Gamma = \frac{dU}{d\theta} = -pE(-\sin\theta) = pE\sin\theta$$

$$\therefore \vec{\Gamma} = \vec{p}\times\vec{E}$$

أما القوة $\vec{F}$ والتي تساوي الانحدار في الجهد

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\vec{\nabla}(-\vec{p}\cdot\vec{E})$$
$$= \vec{\nabla}(\vec{p}\cdot\vec{E}) = 0$$

$\therefore$ محصلة القوة على الجزيء تساوي صفر

* أن $\vec{\Gamma}$ لا يساوي صفر إلا عندما يكون $\vec{p}$ بنفس اتجاه $\vec{E}$.
لذلك فإن الجزيء يحاول أن يدور في الاتجاه الذي يكون فيه $\vec{p}$ موازي الى $\vec{E}$ أو في الاتجاه الذي تقل فيه الطاقة الكامنة U .

* ألا أن الجزيء لا يتوقف عن حركته هذه عندما يكون أتجاه $\vec{P}$ موازي الى $\vec{E}$ (وضع الاتزان) ولأن الطاقة الكامنة تحولت جميعها الى طاقة حركية لذلك نجد أن الجزيء يتعدى في حركته موضع الاتزان الى الجهة الأخرى الى أن يكتسب طاقة كامنة معينة وتصبح طاقته الحركية مساوية الى الصفر ويعود مرة أخرى في حركته حول موضع الاتزان. هذه الحركة هي عبارة عن حركة توافقية بسيطة.