4.5 معاملات الجهد ، السعة ، الحث :

Coefficients of Potential, Capacitance and Induction

من الحالات المهمة هي الحالات التي تكون فيها الشحنة موزعة بأجمعها على سطوح المواد (الاجسام) الموصلة . في هذه الحالة تكون كثافة الشحنة الحجمية ρ مساوية للصفر لذلك العلاقة (26) تصبح

$$W = \frac{1}{2}\int_S \sigma \phi \, ds \qquad ---\ 31$$

تمثل s جميع سطوح الاجسام الموصلة التي تم توزيع الشحنة لكليه عليها ، σ هي كثافة الشحنة السطحية . أن منظومة الاجسام الموصلة التي تشغل حيز معين تكون فيها كل جسم بعيد عن تأثير الاجسام الأخرى . نرمز لكل جسم بالرمز i . ولنبدأ بشحن هذه الأجسام وذلك بنقل شحنات تفاضلية متعاقبة أليها حتى تصبح كثافة الشحنة السطحية على احدها ولنكن i مساوية الى σ_i ويكون الجهد مساوي الى ϕ_i .

$\therefore$ الشغل المنجز لشحن هذا الجسم هو :

$$W_i = \frac{1}{2}\int_{S_i} \sigma_i \phi_i \, ds_i \qquad --\ 32$$

ويكون الجسم i وسطحه منطقة تساوي جهد ، بمعنى أن ϕ_i تبقى ثابتة على جميع نقاط سطحه :

$$\therefore W_i = \frac{1}{2}\phi_i \int_{S_i} \sigma_i \, ds_i \qquad ---\ 33a$$

$$= \frac{1}{2}\phi_i Q_i \qquad ---\ 33b$$

Q_i تمثل شحنة الجسم i .

∴ الشغل الكلي المنجز لشحن جميع الأجسام الموصلة التي عددها N يساوي :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \phi_i Q_i \qquad --- 34$$

الآن : لو كانت هنالك عدة أجسام موصلة مكونة ومتقاربة فأن الشحنات على هذه الأجسام ترتبط ارتباط خطي . ونعني بالتقارب هنا أن الجهد في أي نقطة على سطح اي جسم من هذه الأجسام الموصلة في ذلك الحيز يعتمد على مقدار وموقع جميع الشحنات الموجودة في ذلك الحيز.

لنفرض أن ϕ_1 ، ϕ_2 ، ϕ_3 ، ---- ، ϕ_N هي جهود الأجسام $N \longrightarrow 1$ عندما توضع عليها الشحنات Q_1 ، Q_2 ، Q_3 ، ---- Q_N على التوالي .

ولنفرض أن ϕ'_1 ، ϕ'_2 ، ϕ'_3 ، ---- ϕ'_N هي الجهود المتولدة على هذه الأجسام عندما تستبدل الشحنات السابقة بالشحنات الجديدة Q'_1 ، Q'_2 ، Q'_3 ، --- Q'_N .

أذن لو وضعنا الشحنات :

$Q_1 + Q'_1$ ، $Q_2 + Q'_2$ ، $Q_3 + Q'_3$ ، ------- ، $Q_N + Q'_N$

على هذه الأجسام الموصلة على التوالي ليصبح الجهد على كل منها مساوي الى :

$\phi_1 + \phi'_1$ ، $\phi_2 + \phi'_2$ ، $\phi_3 + \phi'_3$ ، -------- ، $\phi_N + \phi'_N$.

وهذا يعني كلما تضاعفت الشحنة يتضاعف الجهد . وعليه أذا أزدادت الشحنات على جميع هذه الأجسام بنفس النسبة تزداد أيضاً جميع الجهود عليها بالنسبة نفسها .

لنفترض الآن هنالك شحنة Q_1 وضعت على الجسم الأول بينما بقيت الأجسام الأخرى التي عددها $N-1$ خالية منها. لذا تكون جميع جهود هذه الأجسام من ضمنها الجسم الأول متناسبة مع الشحنة Q_1 وتساوي:

$$P_{11}Q_1 \ , \ P_{21}Q_1 \ , \ P_{31}Q_1 \ , \ \ldots\ldots \ , \ P_{N1}Q_1$$

حيث أن P_{i1} ثوابت لا تعتمد على الشحنة Q_1

وبالمثل اذا كانت هنالك شحنة Q_2 وضعت على الجسم الثاني بينما بقيت الأجسام الأخرى خالية من الشحنة نحصل تناسب بين هذه الشحنة والجهود المتولدة على هذه الأجسام وتساوي

$$P_{12}Q_2 \ , \ P_{22}Q_2 \ , \ P_{32}Q_2 \ , \ \ldots\ldots \ , \ P_{N2}Q_2$$

وهكذا يمكننا أن نضع أي شحنة على أي جسم من هذه الأجسام الموصلة وندع الأجسام الأخرى المتبقية خالية منها فيحصل أن تتناسب جميع جهودها مع تلك الشحنة الموضوعة على ذلك الجسم.

الآن عندما تكون جميع هذه الأجسام مشحونة يصبح جهد كل منها مساوي الى:

$$\Phi_1 = P_{11}Q_1 + P_{12}Q_2 + P_{13}Q_3 + \cdots + P_{1N}Q_N$$

$$\Phi_2 = P_{21}Q_1 + P_{22}Q_2 + P_{23}Q_3 + \cdots + P_{2N}Q_N$$

$$\vdots$$

$$\Phi_N = P_{N1}Q_1 + P_{N2}Q_2 + P_{N3}Q_3 + \cdots + P_{NN}Q_N$$

نظام المعادلات هذا علينا أن نكتب بصورة مختصرة كالآتي:

$$\phi_i = \sum_{j=1}^{N} P_{ij} Q_j \quad --- 35$$

P_{ij} ثوابت تعتمد على الشكل الهندسي لهذه الأجسام وتسمى معاملات الجهد (Coefficient of Potential)

ويعرف P_{ij} بأنه الجهد على الجسم الموصل i نتيجة وجود شحنة مقدارها كولوم واحد على الجسم الموصل j.

* هذه المعاملات قد لا تكون جميعها مستقلة وانما يعتمد بعضها على بعض. ولها خصائص مهمة وهي

1- $P_{ij} = P_{ji}$

2- تكون قيمتها موجبة

3- $P_{ii} - P_{ij} \geq 0$ لكل قيم j.

في بعض الأحيان نحتاج الى أن نعبر عن الشحنات الموزعة على منظومة الأجسام الموصلة بدلالة جهودها. ويمكن الحصول على ذلك عن طريق حل نظام المعادلات المعطى بالعلاقة (35) حيث يكون عدد المعادلات مساوي الى N. ويمكن حل هذا النظام بإستخدام المحددات (determinants). وبذلك يمكن أن نحصل على هذه العلاقة:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} C_{ij} \phi_j \quad ---- 36$$

حيث أنه عندما:

$i = j$ نحصل على C_{ii} التي تمثل معاملات السعة (Coefficient of Capacitance).

$i \neq j$ نحصل على C_{ij} التي تمثل معاملات الحث (Coefficient of induction).

ومن خصائص هذه المعاملات :

1- جميع معاملات السعة تكون موجبة $C_{ii} > 0$.

2- تحت هذه الشحنة الموجبة شحنات سالبة على الاجسام الأخرى او تكون في حالات خاصة مساوية للصفر.

3 - جميع معاملات الحث تكون سالبة أو صفراً.

4 - تكون هذه المعاملات متناظرة اي أن $C_{ij} = C_{ji}$
كما في حالة معاملات الجهد .

واجب : أثبت أن مبرهنة كرين المتبادلة (Green Reciprocal theorem)
تعطي مايلي :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} Q'_i \Phi_i = \sum_{j=1}^{N} Q_j \Phi'_j} \quad \text{---} (37) \quad \text{علاقة مهمة}$$

راجع/ الكتاب المنهجي ص ٦٣

مثال (2) منظومة مكونة من أجسام موصلة عددها N تكون جهودها مساوية الى $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \ldots, \phi_N$ عندما تحمل شحنات كهربائية مساوية الى $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_N$ وتصبح جهودها مساوية الى $\phi_1', \phi_2', \phi_3', \ldots, \phi_N'$ عندما تحمل شحنات كهربائية مساوية الى $e_1', e_2', e_3', \ldots, e_N'$. فاذا كانت طاقة المنظومة في الحالة الأولى تساوي W وفي الحالة الثانية تساوي W' فأثبت أن

$$W' - W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(e_i' - e_i)(\phi_i' + \phi_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(e_i' + e_i)(\phi_i' - \phi_i)$$

أستخدم: علاقة كرين المتبادلة $\sum_{i=1}^{N} Q_i \phi_i = \sum_{j=1}^{N} Q_j \phi_j'$

الحل: بما أن الشغل المنجز في الحالة الأولى هو:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} e_i \phi_i$$

والشغل المنجز في الحالة الثانية هو

$$W' = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} e_i' \phi_i'$$

$$\therefore W' - W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(e_i'\phi_i' - e_i\phi_i) \quad ---- \quad 1*$$

الآن نجد منه ما يلي:

$$\sum_{i=1}^{N}(e_i' + e_i)(\phi_i' - \phi_i) = \sum_{i=}^{N} e_i'\phi_i' - \sum_{i=1}^{N} e_i\phi_i + \cancel{\sum_{i=1}^{N} e_i\phi_i'} - \cancel{\sum_{i=1}^{N} e_i'\phi_i}$$

$$= \sum_{i=}^{N}(e_i'\phi_i' - e_i\phi_i) \quad ----- \quad 2*$$

ملاحظة الحد الثالث = الحد الرابع وفقاً لنظرية كرين

كذلك

$$\sum_{i=1}^{N}(e_i'-e_i)(\phi_i'+\phi_i) = \sum_{i=1}^{N} e_i'\phi_i' - \sum_{i=1}^{N} e_i\phi_i$$

$$+ \cancel{\sum_{i=1}^{N} e_i'\phi_i} - \cancel{\sum_{i=1}^{N} e_i\phi_i'}$$

ايضاً الحد الثالث = الحد الرابع لذلك وفقاً لنظرية كرين المتبادلة يكون حاصل جمعهما يساوي صفر.

$$\therefore \sum_{i=}(e_i'-e_i)(\phi_i'+\phi_i) = \sum_{i=1}^{N}(e_i'\phi_i' - e_i\phi_i) \quad ---3*$$

إذن وفقاً للعلاقات 1* و 2* و 3* يمكن أن

نكتب ما يلي:

$$W'-W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(e_i'-e_i)(\phi_i'+\phi_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(e_i'+e_i)(\phi_i'-\phi_i)$$

ملاحظة

هذه العلاقة مفيدة في حساب مقدار التغير الذي يحصل في الطاقة الكهربائية المستقرة لمنظومة أجسام موصلة مشحونة.

هذا التعليق يعد ملاحظة فيزياوية حول هذه العلاقة المهمة.