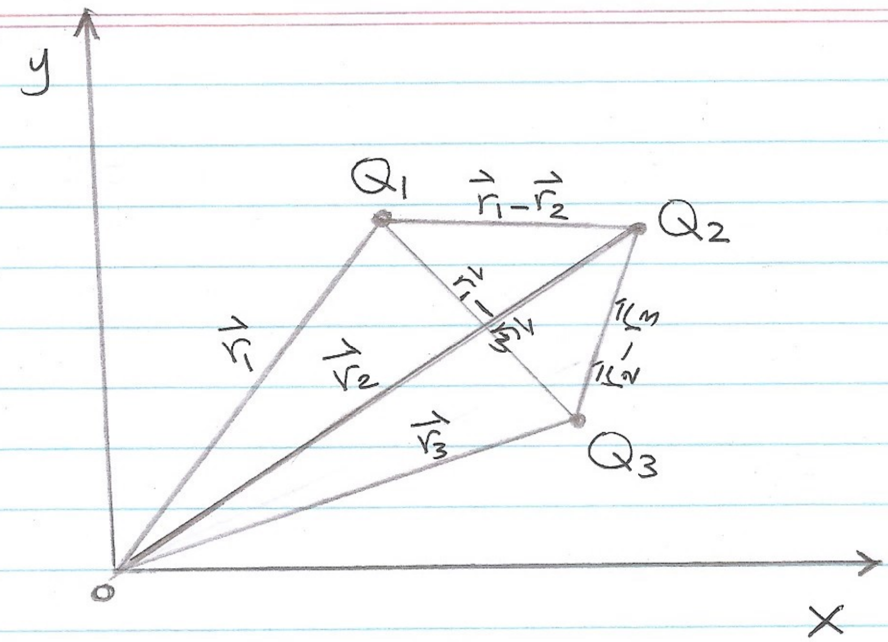
الفصل الرابع
الطاقة الكهربائية المستقرة

لاحظنا عند دراسة الميكانيك أن هنالك الكثير من المسائل يمكن حلها بسهولة باستخدام قوانين الطاقة. وثبت كذلك أن من أيسر الوسائل وانجحها في دراسة الخصائص الميكانيكية لأي نظام كهربائي هو تطبيق قوانين الطاقة. ومن المعروف أن اي نظام ميكانيكي تقسم الطاقة لمنظومة من شحنات كهربائية الى طاقة كامنة كهربائية وطاقة حركية. وعندما تكون الحالة مستقرة، فأن الطاقة الكلية للشحنة تكون بأجمعها طاقة كامنة. وفي هذا الفصل سوف نركز على هذه الطاقة التي تتولد نتيجة التفاعل الكهربائي (electric interaction) الذي يحصل بين الشحنات الكهربائية والتي تسمى الطاقة الكهربائية المستقرة.

(4-1): الطاقة الكامنة لمنظومة شحنات نقطية
Potential energy of a group of point charges

هنالك قول سائد بأن الطاقة تتواجد ضمن الشحنات الكهربائية. هذا القول اصبح سائد بعد أن تم حساب الشغل اللازم لتجميع منظومة من الشحنات النقطية بنمط وبترتيب معين. هذه الطاقة تسمى الطاقة الكامنة الذاتية لمنظومة الشحنات. أذا فرضنا أن W_1 تمثل الشغل اللازم لجلب شحنة نقطية Q_1 من اللانهاية (حيث تنعدم المجالات الكهربائية) الى النقطة P_1 (الواقعة في حيز خالي من اي شحنة أخرى) فأن هذا الشغل يكون مساوي للصفر. (أنظر الشكل (1))



الشكل (1)

الشغل اللازم لجلب شحنه أخرى Q_2 بوجود الشحنه Q_1
الى الموقع $\vec{r}_2$ يساوي

$$W_2 = \int_{\infty}^{r_{12}} -\vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{\infty}^{r_{12}} \frac{kQ_1Q_2}{r^2}\,dr \qquad ---(1)$$

$$\therefore W_2 = k\frac{Q_1Q_2}{r_{12}} \qquad ---(2) \qquad\qquad \int -\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x}$$

حيث أن :

$$r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

وأن ϵ_0 يمثل سماحية الفراغ ،
$\vec{F}$ هي القوة المتولدة بين الشحنتين من قانون كولوم
$-\vec{F}$ هي القوه الواجب تسليطها على الشحنه Q_2 لكي
تتحرك بصوره بطيئه جداً وبدون تعجيل
ولجلب الشحنه Q_3 الى الموقع $\vec{r}_3$ بوجود الشحنتين Q_1 و Q_2
نحتاج الى الشغل الآتي :

$$W_3 = \frac{kQ_1Q_3}{r_{13}} + \frac{kQ_2Q_3}{r_{23}}$$

$$\therefore W_3 = Q_3\left(\frac{kQ_1}{r_{13}} + \frac{kQ_2}{r_{23}}\right) \quad ----(3)$$

∴ بالامكان حساب الشغل اللازم لجلب مجموعة شحنات نقطية عددها N وبذلك نحصل على الطاقة الكامنة للمنظومة :

$$U = W = W_1 + W_2 + W_3 + ---- + W_N$$

علماً بأن $W_1 = 0$ لأن الحيز كان خالي من اي شحنة .

$$\therefore U = Q_2\left\{\frac{kQ_1}{r_{12}}\right\} + Q_3\left\{\frac{kQ_1}{r_{13}} + \frac{kQ_2}{r_{23}}\right\} + ----$$

والتي يمكن أن تكتب كالآتي :

$$U = Q_1\left\{\frac{kQ_2}{r_{12}} + \frac{kQ_3}{r_{13}} + ---- + \frac{kQ_N}{r_{1N}}\right\}$$
$$+ Q_2\left\{\frac{kQ_3}{r_{23}} + \frac{kQ_4}{r_{24}} + ---- + \frac{kQ_N}{r_{2N}}\right\} + ------$$

$$\therefore U = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{kQ_iQ_j}{r_{ij}} \quad ----(4)$$

ملاحظة $\rightarrow$ $i<j$

من الممكن أيضاً كتابة العلاقة 4 بشكل آخر :

$$U = \frac{1}{2}Q_1\left\{\frac{kQ_2}{r_{12}} + \frac{kQ_3}{r_{13}} + -------- + \frac{kQ_N}{r_{1N}}\right\}$$
$$+ \frac{1}{2}Q_2\left\{\frac{kQ_1}{r_{12}} + \frac{kQ_3}{r_{23}} + ---- + \frac{kQ_N}{r_{2N}}\right\}$$
$$+ --------$$

والتي يمكن أن تكتب كالآتي :

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} Q_i \underbrace{\sum_{j=1}^{N} \frac{kQ_j}{r_{ij}}}_{U_i} \quad ---(5)$$

نفرض أن U_i هو الشغل المنجز لنقل وحدة الشحنات الموجبة من اللانهاية الى موقع الشحنة Q_i المحذوفة من منظومة الشحنات الكهربائية.

$$\Rightarrow U_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{kQ_j}{r_{ij}} \quad ---(6)$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} Q_i U_i \quad ---- 7$$

أن العلاقة (7) يمكن أن تستخدم أيضاً في حالة تجميع لشحنات الكهربائية في وسط آخر غير الفراغ حيث تستعيض عن الثابت ϵ_0 بالثابت ϵ الذي يخص الوسط.

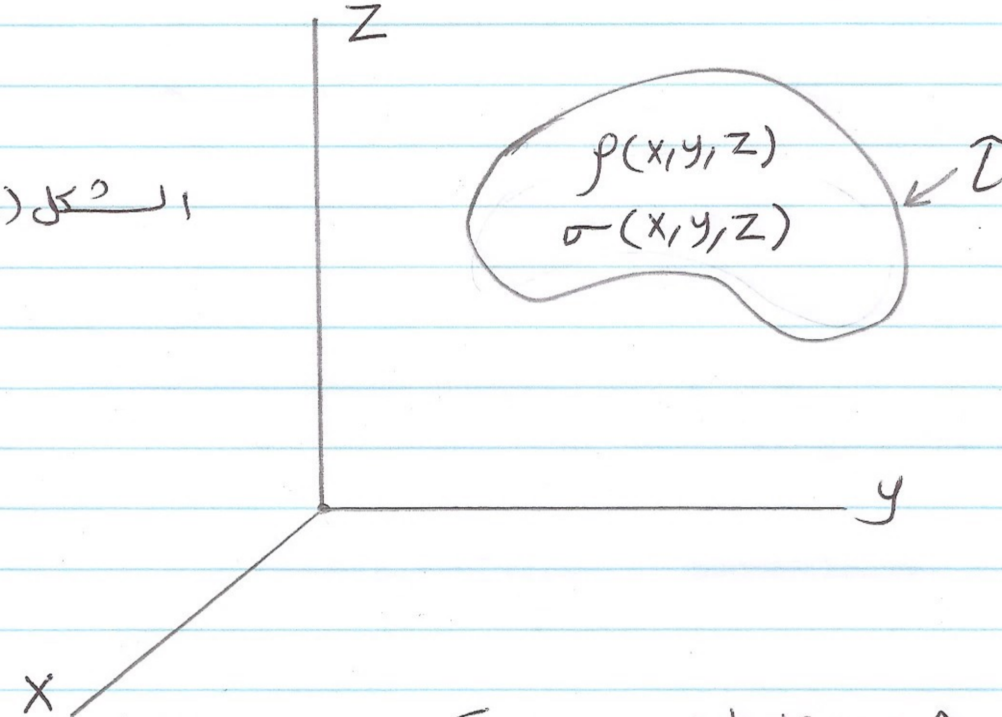
كذلك يمكن استخدامها لشحنات كهربائية تم تجميعها في اكثر من وسط عازل وتطبق أيضاً اذا كانت الشحنات هذه على أجسام موصلة محدودة الحجوم.

—

4-2 الطاقة الكامنة لشحنة موزعة حجمياً وسطحياً

Electrostatic energy of a charge distribution

لنفرض حيزاً حجمه τ وهو خال من الأجسام الموصلة ومن الشحنات الكهربائية إلا أنه يحتوي على أجسام عازلة (انظر الشكل (2)) .



الشكل (2)

نفرض أنه تم شحن هذا الحيز بصورة تدريجية وذلك بجلب شحنات تفاضلية مقدار كل منها dQ من موقع فيه الجهد صفراً الى هذا الحيز .

نفرض أيضاً أن الشحنات المتراكمة في هذا الحيز توزعت فيه توزيعاً حجمياً وسطحياً وأن :

$\rho'(x,y,z)$ تمثل كثافة الشحنة الحجمية .

$\sigma'(x,y,z)$ تمثل كثافة الشحنة السطحية .

$\phi'(x,y,z)$ تمثل الجهد الذي تولد في هذا الحيز في لحظة معينة خلال فترة الشحن .

فإذا تم نقل شحنة تفاضلية أخرى مقدارها dQ لتضاف الى ما تراكم من الشحنة يكون الشغل المنجز هو :

$$dW' = \phi' \, dQ \qquad ---- (8)$$

الشحنة dQ تشغل حجماً متناهياً في الصغر $d\tau$ وأن كثافة الشحنة الحجمية فيه $d\rho'$ وعليه يمكن أن نكتب الآتي :

$$dQ = d\rho' \, d\tau \qquad --- (9)$$

* وقد تتوزع هذه الشحنة على سطح متناهي في الصغر ds وأن وأن كثافة الشحنة السطحية عليه $d\sigma$ ، وعليه يمكن أن نكتب الآتي

$$dQ = d\sigma \, ds \qquad ---- (10)$$

إذن يصبح الشغل المنجز dW' مساوي الى

$$dW' = \phi' \, d\rho' \, d\tau$$

$$---- (11)$$

$$dW' = \phi' \, d\sigma \, ds$$

ولحساب الشغل المنجز النهائي W بعد أن يتم نقل جميع الشحنات الكهربائية المتناهية في الصغر ليصبح جهد الحيز النهائي $\phi(x,y,z)$ وكثافة الشحنة الحجمية النهائية $\rho(x,y,z)$ والسطحية $\sigma(x,y,z)$ نتبع الخطوات التالية .

أولاً : نفرض أن الشحنة النهائية قد توزعت بصورة حجمية وسطحية ضمن ذلك الحيز أثناء عملية الشحن .

ثانياً : نفرض أن كل من كثافة الشحنة الحجمية وكثافة الشحنة السطحية تساوي جزءاً من قيمتها النهائية :

$$\rho'(x,y,z) = \lambda \rho(x,y,z)$$
$$\sigma'(x,y,z) = \lambda \sigma(x,y,z) \quad --- (12)$$

حيث أن $0 \le \lambda \le 1$ خلال عملية الشحن .

كذلك : $\phi'(x,y,z) = \lambda \phi(x,y,z) \quad --- 13$

وعليه فالشغل الكلي المنجز لشحن الحيز هو :

$$W = \int \phi' \, d\rho' \, d\tau + \int \phi' \, d\sigma' \, ds \quad ---- 14$$

الآن نفاضل المعادلات (12) :

$$\left.\begin{aligned} d\rho'(x,y,z) &= \rho(x,y,z)\, d\lambda \\ d\sigma'(x,y,z) &= \sigma(x,y,z)\, d\lambda \end{aligned}\right\} --- 15$$

نعوض (15) في العلاقة (14) نحصل على :

$$W = \iint_{\lambda\,\tau} \phi' \rho(x,y,z)\, d\lambda\, d\tau + \iint_{\lambda\,s} \phi' \sigma(x,y,z)\, d\lambda\, ds \quad --- (16)$$

كذلك :

نعوض عن ϕ' بما يساويها من العلاقة (13) :

$$\therefore W = \int_0^1 \lambda\, d\lambda \int_\tau \rho \phi\, d\tau + \int_0^1 \lambda\, d\lambda \int_s \sigma \phi\, ds \quad --- (17)$$

$$\therefore \int_0^1 \lambda \, d\lambda = \frac{\lambda^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore W = \frac{1}{2}\int_{\tau} \rho \phi \, d\tau + \frac{1}{2}\int_{s} \sigma \phi \, ds \qquad \text{---(18)}$$

العلاقة (18) تمثل الطاقة الكهربائية الكامنة المتولدة نتيجة تراكم شحنة كهربائية وتوزيعها تحت حيز معين توزيعاً حجمياً وسطحياً.

* الجدير بالذكر أن الحيز الذي افترضناه يتضمن أجسام عازلة خطية (linear dielectric) * كذلك تؤكد هذه العلاقة أن الشغل المنجز لا يعتمد على الوسيلة التي تم بواسطتها شحن هذا الحيز.

4-3 كثافة الطاقة الكامنة لمجال كهربائي مستقر

Energy density of an electrostatic field

لما كان الحيز المأخوذ بنظر الاعتبار من الفقرة السابقة يحوي فقط أجسام عازلة تتخللها مناطق فراغ يكون معظم توزيع الشحنة حجمياً في تلك المناطق وضمن المواد العازلة الموجودة في ذلك الحيز. وقد تتوزع الشحنة على السطوح الفاصلة بين الأجسام العازلة كذلك إلا أنها تعد منتشرة و متداخلة مع بقية الشحنة وعليه يكون عندئذ توزيعها في الحيز بأجمعه توزيع حجمي وبذلك على كتابة العلاقة (18) كالآتي

$$W = \frac{1}{2}\int_{\tau} \rho \phi \, d\tau \quad ---(19)$$

وبما أن:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

وأن:

$$\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{D}) = \phi \, \vec{\nabla} \cdot \vec{D} + \vec{D} \cdot (\vec{\nabla} \phi) \quad ---(20)$$

$$\therefore W = \frac{1}{2}\int_{\tau} (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \phi \, d\tau$$

من المعادلة (20) يمكن أن نكتب

$$\phi (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) = \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{D}) - \vec{D} \cdot (\vec{\nabla} \phi) \quad --- 21$$

نعوض (21) في صيغة W نحصل على

$$W = \frac{1}{2}\int_{\tau} \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{D}) \, d\tau - \frac{1}{2}\int_{\tau} \vec{D} \cdot (\vec{\nabla} \phi) \, d\tau \quad --- 22$$

وبالاستفادة من مبرهنة كاوس يمكن أن نحول التكامل الحجمي في الحد الاول من الطرف الأيمن من العلاقة (22) الى تكامل سطحي وكالآتي:

$$W = \frac{1}{2}\int_S (\Phi\vec{D})\cdot d\vec{s} - \frac{1}{2}\int_\tau \vec{D}\cdot(\vec{\nabla}\Phi)\, d\tau \quad --- 23$$

ويمكن اعتبار السطح كروي ذو قطر كبير جداً يحيط بجميع الشحنات ذات الكثافة الحجمية ρ. وعليه فأن الجهد يتناسب مع r^{-1} و D يتناسب مع r^{-2} و ds يتناسب مع r^2 وكالآتي:

$$\Phi \propto \frac{1}{r}$$

الإزاحة الكهربائية

$$D \propto \frac{1}{r^2}$$

$$ds \propto r^2$$

كذلك في حالة المسافات البعيدة فأن قيمة التكامل السطحي تقترب من الصفر وبذلك نحصل على

$$W = -\frac{1}{2}\int_S \vec{D}\cdot(\vec{\nabla}\Phi)\, d\tau \quad --- 24$$

وبما أن $-\vec{\nabla}\Phi = \vec{E}$

حيث أن $\vec{E}$ تمثل متجه المجال الكهربائي

مع ملاحظة أن الطاقة تكون مساوية للصفر في المناطق التي يكون فيها الجهد Φ مساوي للصفر.

$$\therefore W = \frac{1}{2}\int_\tau \vec{D}\cdot\vec{E}\, d\tau \quad --- 25$$

أذن لن يكون هنالك طاقة بدون شحنة كما أنه لايمكن أن يكون هنالك اي طاقة بدون الجهد Φ وهكذا فأن الشحنة والجهد متماثلات من حيث علاقتهما بالطاقة. ربما تظهر الطاقة في المجال الكهربائي نفسه كما يلاحظ من العلاقة (25).

ملاحظة : العلاقة (25) تحتوي على الكمية $\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$
والتي تعرف بكثافة الطاقة لوحدة الحجم ويرمز لها
بالرمز u
(u حرف صغير)

$$u = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} \quad --- \quad 25$$

وكما ذكرنا أعلاه أن الحيز الذي يشحن بصورة تدريجية
تضم في داخله أجساماً عازلة قطبية متماثلة الخواص
(isotropic dielectric) اي أن ثابت السماحية ϵ
يمثل مقدار ثابت لكل هذه الأجسام ، وبما أن
$\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ أذن العلاقة (25) تصبح :

$$u = \frac{1}{2}\epsilon\vec{E}\cdot\vec{E} = \frac{1}{2}\epsilon E^2 \quad --- \quad 25$$

—