8-2 مبرهنة الحل الوحيد

عند حل بعض المسائل في الكهربائية المستقرة كحلول معادلة لابلاس مثلاً فإننا نفترض وجود دالة مستمرة للإحداثيات كما أنها تحقق الشروط الحدودية للوسط. الآن نريد أن نبرهن أن الحل الصحيح هو الحل الوحيد لهذه المسألة.

ولكي نبرهن ذلك سوف نفرض دالتين هما ϕ_1 و ϕ_2 كل منهما تحقق معادلة لابلاس بمعنى أن

$$\nabla^2\phi=0 \;;\; \nabla^2\phi_1=0 \quad \text{and} \quad \nabla^2\phi_2=0$$

معادلة لابلاس ⇓

في تلك المنطقة (او الحيز).

بحيث يعطي كل من ϕ_1 و ϕ_2 حلولاً صحيحة للدالة ϕ وللمركبة العمودية $\vec{\nabla}\phi$ وكذلك عند حدود الحيز معين $\frac{\partial\phi}{\partial n}$.

الآن نفرض $\phi'=\phi_1-\phi_2$ وهي دالة عددية وكذلك الدالة $\vec{\nabla}\phi'$ وهي دالة أتجاهية.

وبما اننا فرضنا أن الدالة تحقق معادلة لابلاس

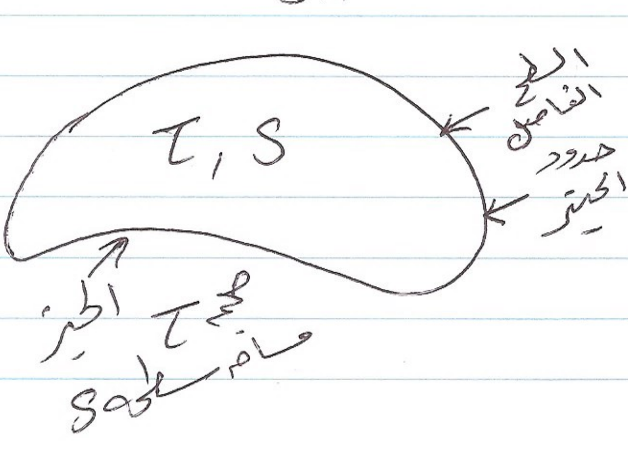
$$\therefore \quad \nabla^2\phi'=0$$

$$\nabla^2\phi_1-\nabla^2\phi_2=0 \qquad ----(36)$$

في كل نقطة من نقاط الحيز الذي حجمه τ ومساحة سطحه S، الذي يحتوي ذلك الحجم والسطح المحيط بالحجم يمثل السطح الفاصل.

كذلك يمكن أن نكتب

$$\phi'\frac{\partial\phi'}{\partial n}=(\phi_1-\phi_2)\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial n}-\frac{\partial\phi_2}{\partial n}\right) \qquad ---(37)$$



عند السطح الفاصل تكون الدوال ϕ ومشتقاتها $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ مساوية للصفر وهذا ما تسميه الشروط الحدودية .

وباستخدام مبرهنة كاوس للدالة ϕ' :

$$\int_{\tau} \vec{\nabla}\cdot(\phi' \vec{\nabla} \phi')\, d\tau = \int_{S} (\phi' \vec{\nabla} \phi')\cdot d\vec{s} \quad \text{-----}(38)$$

واعتماداً على الشروط الحدودية التي تنص على أن الدوال ϕ ومشتقاتها عند السطح S تكون مساوية الى الصفر فأن الطرف الأيمن من العلاقة (38) تكون مساوية للصفر .

$$\therefore \int_{\tau} \vec{\nabla}\cdot(\phi' \vec{\nabla} \phi')\, d\tau = 0 \quad \text{---}(39)$$

وبما أن

$$\vec{\nabla}\cdot(\phi' \vec{\nabla} \phi') = \phi' \nabla^2 \phi' + (\vec{\nabla} \phi')^2 \quad \text{---}(40)$$

$\therefore$ المعادلة (39) تصبح

$$\int_{\tau} \phi' \nabla^2 \phi'\, d\tau + \int_{\tau} (\vec{\nabla} \phi')^2\, d\tau = 0 \quad \text{---}41$$

وبما أن $\nabla^2 \phi' = 0$ عند كل نقطة في الحيز τ لذلك المعادلة (41) تصبح

$$\int_{\tau} (\vec{\nabla} \phi')^2\, d\tau = 0 \quad \text{---}42$$

وبما أن :

$$(\vec{\nabla} \phi')^2 = (\vec{\nabla} \phi')\cdot(\vec{\nabla} \phi') = \left(\frac{\partial \phi'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi'}{\partial z}\right)^2 \quad \text{---}43$$

$\therefore$ تكامل الناتج من المعادلة (42) لا يمكن أن يساوي مقدار سالب وذلك لأن $\vec{\nabla}\phi'$ كمية حقيقية .

وبما أن التكامل الحجمي في العلاقة (42) يساوي صفر
إذن

$$\left(\frac{\partial \phi'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \phi'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \phi'}{\partial z}\right)^2=0 \quad ---44$$

وعليه علينا أن نكتب

$$\frac{\partial \phi'}{\partial x}=\frac{\partial \phi'}{\partial y}=\frac{\partial \phi'}{\partial z}=0 \quad ---45$$

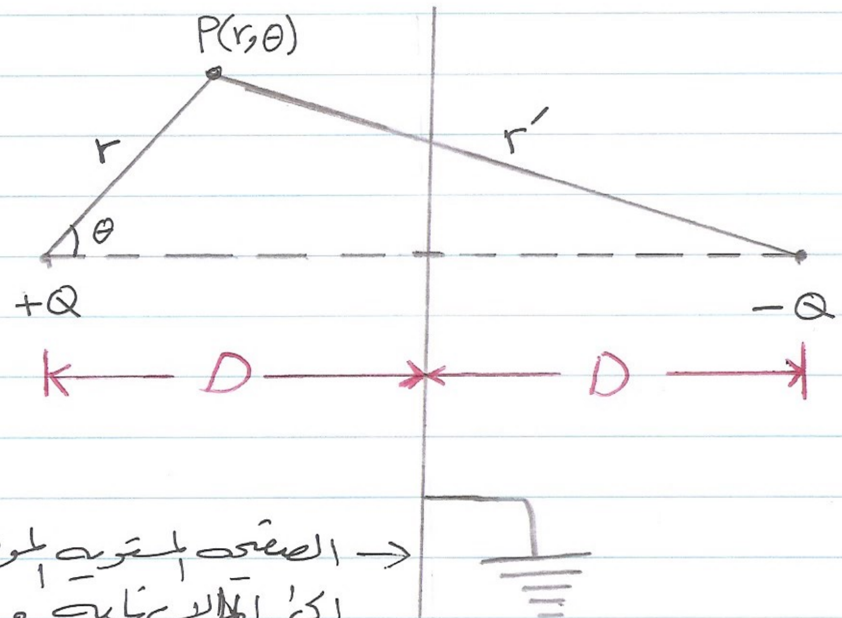
وهذا يصح في كل نقطة من نقاط الحيز τ.
وبما أن ϕ' تمثل الفرق بين ϕ_1 و ϕ_2 فهذا يعني أن الدالة ϕ_1 مساوية الى ϕ_2 في كل نقطة من نقاط الحيز المذكور أي أن هنالك قيمة واحدة للجهد تحقق معادلة لابلاس وكذلك تحقق الشروط الحدودية.

2-9 الصور الكهربائية Electrical Images

طريقة الصور الكهربائية هي طريقة تستخدم لحساب الجهد أو المجال الكهربائي لنظام كهربائي مستقر معين وذلك بإستبداله بشحنة نقطية أو مجموعة شحنات نقطية بحيث تحقق الشروط الحدودية لذلك النظام. وعليه فأنه طريقة الحل لحساب الجهد والمجال الكهربائي تعتبر صحيحة حسب نظرية الحل الوحيد (مبرهنة الحل الوحيد الفقرة (2-8))
بأعتبار هذه الطريقة حققت الشروط الحدودية لذلك النظام وبذلك تكون الطريقة التي إستعملت بإستبدال النظام الكهربائي المستقر بشحنة نقطية او مجموعة شحنات نقطية في حساب كل من الجهد والمجال الكهربائي هي طريقة صحيحة. وتسمى مجموعة الشحنات النقطية بالصور الكهربائية وتسمى هذه الطريقة بطريقة الصور الكهربائية.

الشكل (5) يوضح ابسط حالات الصور الكهربائية.

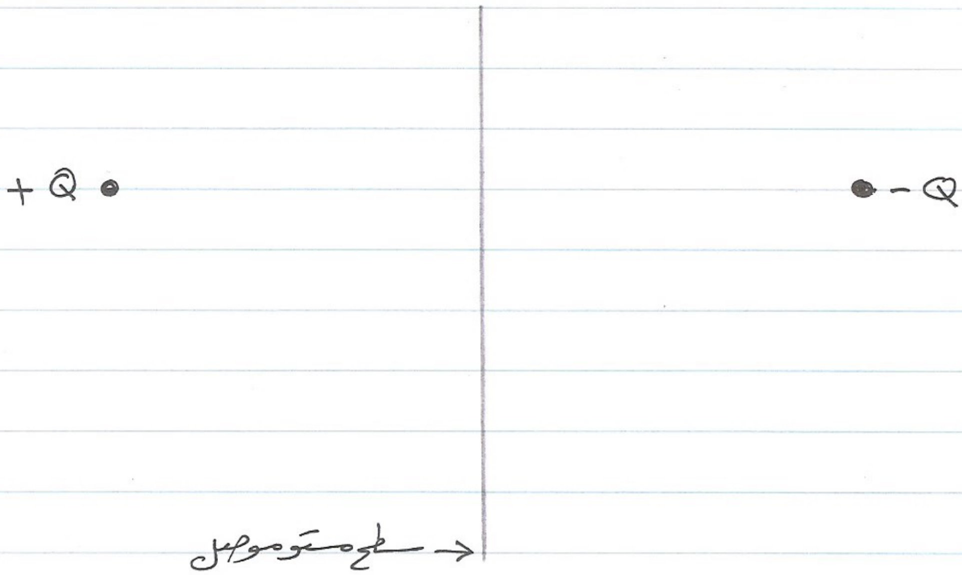
الشكل يوضح شحنة $+Q$ على بعد D من صفيحة موصلة مستوية واسعة جداً . أن المجال الكهربائي في المنطقة الواقعة بين الشحنة والصفيحة الموصلة مشابه تماماً للمجال الكهربائي في تلك النقطة إذا أستبدلت الصفيحة الموصلة بشحنة مقدارها $-Q$ توضع على بعد $2D$ من الشحنة $+Q$.
وتسمى $-Q$ بالصورة الكهربائية للشحنة $+Q$.
أن مصطلح الصورة الكهربائية أخذ من هذه الحالة الخاصة التي تشبه في طبيعتها الصورة المتكونة في مرآة مستوية.



الشكل (5)

فاذا ألغينا هذا السطح الموصل واستبدلناه بشحنة نقطية مقدارها $-Q$ توضع على بعد $2D$ من الشحنة النقطية $+Q$ فأن اي نقطة تقع على المستوي العمودي في منتصف المسافة بين الشحنتين تكون متساوية البعد عن الشحنتين $+Q$ و $-Q$. وبهذا تكون جهدها مساوي للصفر وتكون هذا المستوي سطح تساوي جهد ، وبهذا تعطي الشحنتان النقطيتان الحل المناسب المكافئ الى الشحنة النقطية $+Q$ والسطح الموصل . وتسمى الشحنة $-Q$ بالصورة الكهربائية للشحنة $+Q$.
ملاحظة : سطح تساوي الجهد موضح في الشكل (6) .

واجب : أكمل رسم هذا الشكل.



الشكل (٦) يوضح سطح تساوي الجهد

∴ الجهد ϕ عند النقطه p بالنسبه للشحنتين النقطيتين يكون :

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'} \quad ....(46)$$

حيث أن

$$r' = \sqrt{r^2 + (2D)^2 - 2r(2D)\cos\theta}$$

$2D$ = المسافه بين الشحنتين

$$\therefore r' = (r^2 + 4D^2 - 4rD\cos\theta)^{1/2} \quad ---47$$

اما مركبات المجال

$$E_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r}$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}(-1)r^{-2} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}(-1)(r')^{-2}\frac{\partial r'}{\partial r}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (r')^2}(r - 2D\cos\theta)\frac{1}{r'}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{Q(r - 2D\cos\theta)}{4\pi\epsilon_0 r'^3} \quad —— (48)$$

حيث أن $r'^2 = r^2 + 4D^2 - 4rD\cos\theta$

$$\frac{\partial r'^2}{\partial r} = 2r'\frac{\partial r'}{\partial r} = 2r - 4D\cos\theta$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{-1}{r}\frac{-Q}{4\pi\epsilon_0}(-1)(r')^{-2}\frac{\partial r'}{\partial\theta}$$

ايضاً نشتق طرفي العلاقه $r'^2 = r^2 + 4D^2 - 4rD\cos\theta$

بالنسبه لـ θ نحصل على

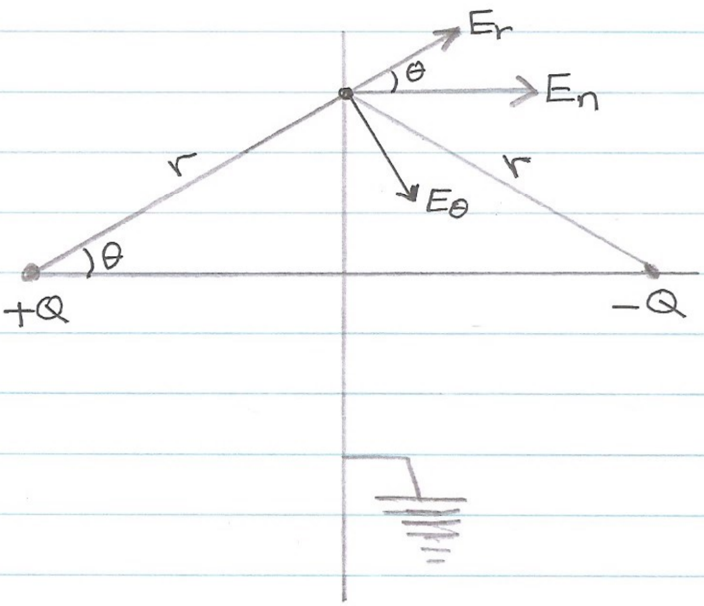
$$2r'\frac{\partial r'}{\partial\theta} = +4rD\sin\theta \Rightarrow \frac{\partial r'}{\partial\theta} = \frac{2rD\sin\theta}{r'}$$

$$\therefore E_\theta = \frac{-2QD\sin\theta}{4\pi\epsilon_o r'^3} \quad --- \quad 49$$

ويمكن حساب كثافة الشحنة المحتثة على السطح الموصل من معرفة المركبة العمودية لشدة المجال على السطح الموصل (E_n) :

$$\sigma = -\epsilon_o E_n \quad ---- \quad 50$$

عندما تكون $r=r'$ فأن الشكل (5) يصبح



$$\therefore E_n = E_r\cos\theta - E_\theta\sin\theta \quad --- \quad 51$$

نفرض $r=r'$ في العلاقات (48) و(49) ثم نعوض في العلاقة (51) وبعد التبسيط والاستفادة من العلاقة

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

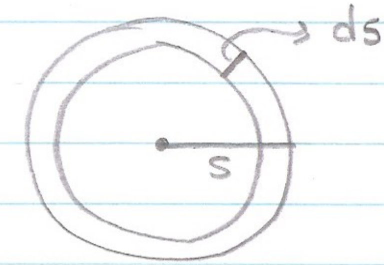
نحصل على :

$$E_n = \frac{2QD}{\pi\epsilon r^3} \quad --- (52)$$

$$\therefore \sigma = -\frac{QD}{2\pi r^3} \quad --- \quad 53$$

ويمكن حساب مقدار الشحنة المحتثة على السطح الموصل (Q) كالآتي :

$$Q = \int_0^\infty \sigma \, 2\pi s \, ds = -Q \qquad ---54$$



∴ واضح أن مقدار الشحنة على السطح الموصل مساويه الى الشحنه السالبه Q- للشحنه النقطيه التي استبدلنا السطح الموصل بها .

2-10 حلول معادلة لابلاس بأستخدام المحاور المختلفة

سوف نركز على معادله لابلاس بأعتبارها اكثر شموليه واسهل حلاً من معادله بوازان .

ويمكن حلها بأستخدام ١- المحاور المتعامده

٢- المحاور الكرويه

٣- المحاور الاسطوانيه

اعتماداً على الابعاد وشكل الجسم المراد دراسته وتحديد الشروط الحدوديه المناسبة .

اولاً : حل معادله لابلاس بأستخدام المحاور المتعامدة

يمكن ايجاد حل لمعادلة لابلاس التي يمكن أن تناسب شروط الحدود فيها بطريقه فصل المتغيرات (لحل المعادله $\nabla^2\phi=0$) :

$$\phi = X(x)\, Y(y)\, Z(z) \qquad ----55$$

والذي يعني أن الداله X تعتمد على x فقط

= Y = = y فقط

= Z = = z فقط

نعوض العلاقة (55) في معادلة لابلاس

$$\frac{d^2}{dx^2}XYZ+\frac{d^2}{dy^2}XYZ+\frac{d^2}{dz^2}XYZ=0$$

$$YZ\frac{d^2X}{dx^2}+XZ\frac{d^2Y}{dy^2}+XY\frac{d^2Z}{dz^2}=0$$ ⇐ ملاحظة

تقسم المعادلة الأخيرة على حاصل الضرب XYZ نحصل على

$$\underbrace{\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}}_{\text{تعتمد على } x}+\underbrace{\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}}_{\text{تعتمد على } y}+\underbrace{\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}}_{\text{تعتمد على } z}=0 \quad ---- 56$$

∴ يمكن أن نكتب

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}&=\alpha^2\\ \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}&=\beta^2\\ \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}&=\gamma^2\end{aligned}\right\}\longrightarrow 57$$

$$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$$

كذلك :

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2X}{dx^2}+\alpha^2X&=0\\ \frac{d^2Y}{dy^2}+\beta^2Y&=0\\ \frac{d^2Z}{dz}+\gamma^2Z&=0\end{aligned}\right\}\longrightarrow 58$$

∴ حل المعادلات الثلاثة في العلاقة (58) يعني حل معادلة لابلاس بالمحاور الكارتيزية وهذا يعتمد على الشروط الحدودية الخاصة بشكل الجسم .

ثانياً : حل معادلة لابلاس باستخدام المحاور الكروية

كما ذكرنا سابقاً الحل يعتمد على شكل الجسم والشروط الحدودية وفي حالة كون الاجسام كروية يكون من الانسب استخدام المحاور الكروية (ϕ و θ و r) .

تعطى ∇^2 بالمحاور الكروية بما يلي :

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$$\because \nabla^2\phi = 0$$

$$\therefore \nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0 \quad \text{---59}$$

سوف نركز على المجال المتناظر محورياً أي ان الجهد او المجال الكهربائي لا يعتمد على φ اي يعتمد على r و θ .

$$\therefore \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = 0 \quad \text{---60}$$

نستخدم طريقة فصل المتغيرات لحل هذه المعادلة

$$\therefore \phi(r,\theta) = R(r)\,P(\theta) \quad \text{---61}$$

نعوض (61) في (60) ثم نقسم طرفي العلاقة على حاصل الضرب $R(r)P(\theta)$ نحصل على :

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr} r^2\frac{dR(r)}{dr} + \frac{1}{P\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta} = 0 \quad \text{---62}$$

الحد الاول في العلاقة (62) يعتمد على r فقط

" الثاني " " " " θ فقط

∴ يمكن كتابة المعادلتين :

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{R}\frac{d}{dr}r^2\frac{dR}{dr} &= k \\ \frac{1}{P\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{dP}{d\theta} &= -k \end{aligned}\right\} \quad --- (63)$$

بالنسبة للمعادلة الأولى من المعادلات 63

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) - kR = 0$$

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} - kR = 0 \quad --\ 64$$

الحل التجريبي الذي يحقق المعادلة هو

$$R = r^n \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \quad --\ 65$$

نعوض (65) في (64) نحصل على أن

$$k = n(n+1) \quad ---\ 66$$

كذلك الحل التجريبي $R = r^{-(n+1)}$ أيضاً
يحقق المعادلة (64) ولنفس قيم k في العلاقة (66)

∴ من الممكن أن نجد حل عام من الحلين اعلاه وكالآتي

$$R(r) = Ar^n + Br^{-(n+1)}$$

$$R(r) = Ar^n + \frac{B}{r^{(n+1)}} \quad ---\ 67$$

الجمع الخطي للحلين

الثوابت A و B تمثل ثوابت عشوائية يمكن تحديد قيمتها
بالاعتماد على الشروط الحدودية شكل الجسم

الآن نحل المعادله الخاصه بـ $P(\theta)$

$$\frac{1}{P\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)=-k$$

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)+P\sin\theta\, k=0$$

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)+n(n+1)\sin\theta\, P=0 \quad ---68$$

لحل المعادله 68 نفرض أن $u=\cos\theta$ ، $du=-\sin\theta d\theta$

نقسم المعادله 68 على $\sin\theta$:

$$\frac{d}{\sin\theta d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)+n(n+1)P=0$$

$$\frac{d}{-\sin\theta d\theta}\left(\sin\theta\sin\theta\frac{dP}{-\sin\theta d\theta}\right)+n(n+1)P=0$$

$$\therefore \frac{d}{du}\left(\sin^2\theta\frac{dP}{du}\right)+n(n+1)P=0$$

$$\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$\sin^2\theta+u^2=1$$

$$\therefore \sin^2\theta=1-u^2$$

$$\therefore \frac{d}{du}\left((1-u^2)\frac{dP}{du}\right)+n(n+1)P=0 \quad ---69$$

المعادله (69) تسمى معادلة لجندر Legendre's Equation

وحل هذه المعادله عباره عن متعددة حدود ليجندر

وتتميز بالعدد n يعني أن $P_n(u)$ أو $P_n(\cos\theta)$:

$$P=P_n(u)=P_n(\cos\theta) \quad ---70$$

n تمثل درجة متعددة حدود ليجندر

الجدير بالذكر أن القيم $-(n+1)$ تحقق أيضاً المعادلة (69) نفسها

$$P_{-(n+1)}(\cos\theta) = P_n(\cos\theta)$$

∴ حل معادلة لابلاس يكون

$$\phi(r,\theta) = R(r)\,P(\cos\theta)$$

$$\phi(r,\theta) = \left(A r^n + \frac{B}{r^{n+1}}\right) P_n(\cos\theta)$$

∴ الحل العام للمعادلة (62)

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right) P_n(\cos\theta) \quad ----(71)$$

نجد أن المعادلة التفاضلية (62) تصح لكل قيم n الموجبة من الصفر الى المالانهاية وعليه يمكن كتابة الحل بالعلاقة (71) الذي يكتب بصيغة متسلسلة.
مع العلم أن كل حل مفرد لقيمة محددة من قيم n يعتبر حل لمعادلة لابلاس.

n	P_n
0	1
1	$\cos\theta$
2	$\frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$
3	
4	
5	

واجب

اكمل الجدول.

ثالثاً: حل معادلة لابلاس باستخدام المحاور الأسطوانية

المحاور الاسطوانية $\Leftarrow (r, \theta, Z)$

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Z^2} = 0 \quad --- 72$$

وللسهولة سوف نفرض ان الجهد والمجال الكهربائي يعتمد على r و θ فقط ولا يتغير مع Z وبذلك المعادلة (72) تصبح:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0$$

نضرب طرفي العلاقة بـ r^2 تصبح

$$\underbrace{r\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \phi}{\partial r}}_{\text{هذا الحد يعتمد على } r \text{ فقط}} + \underbrace{\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}}_{\text{يعتمد هذا الحد على } \theta \text{ فقط}} = 0 \quad --- 73$$

لحل المعادلة 73 نستخدم اسلوب فصل المتغيرات

$$\phi(r, \theta) = R(r)\, C(\theta) \quad --- 74$$

نعوض العلاقة (74) في العلاقة (73) نحصل على:

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr} r \frac{dR}{dr} + \frac{1}{C}\frac{d^2 C}{d\theta^2} = 0 \quad --- 75$$

وبما أن الحد الأول يعتمد على r والحد الثاني يعتمد على θ ∴ كلا الحدين تكون مساويا الى كمية ثابتة K

$$\left.\begin{aligned} \frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) &= K' \\ \frac{1}{C}\frac{d^2C}{d\theta^2} &= -K' \end{aligned}\right\} \quad --- \quad 76$$

وبما أن الحل r^n يحقق المعادلة الأولى اعلاه أذن نستطيع أن نكتب

$$\left.\begin{aligned} \frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) &= n^2 \\ \frac{1}{C}\frac{d^2C}{d\theta^2} &= -n^2 \end{aligned}\right\} \quad --- \quad 77 \text{ و}$$

توضيح
$$\boxed{\begin{aligned} \frac{r}{r^n}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dr^n}{dr}\right) &= \frac{1}{r^{n-1}}\left[rn(n-1)r^{n-2} + \frac{dr^n}{dr}\right] \\ &= \frac{1}{r^{n-1}}\left[n(n-1)r^{n-1} + nr^{n-1}\right] \\ &= n^2 \cancel{-n} \cancel{+n} = n^2 \end{aligned}}$$

كذلك الحل r^{-n} أيضاً يحقق المعادلة

جمع قطبي للحلين $\therefore R(r) = Ar^n + Br^{-n}$

كذلك لدينا $\sin(n\theta)$ و$\cos(n\theta)$ تعد حلول مقبولة للدالة $C(\theta)$ ، حيث تتغير θ من $n=1$ الى $n=\infty$. بينما لا يصح وفقاً للشروط الحدودية أن تكون n مساوية للصفر.

—