(1-18) الأحداثيات المعممة Generalized Coordinates

لفهم هذه الأحداثيات نفرض العلاقة التالية

$$u(x,y,z) = q \quad --- 97$$

حيث أن q كمية ثابتة
لو فرضنا أن $x = q$ فهذا يعني أن هنالك مجموعة من سطوح موازية للمستوي (yz) في نظام الاحداثيات الديكارتيه.

لنفرض الآن:

$$u_1(x,y,z) = q_1$$

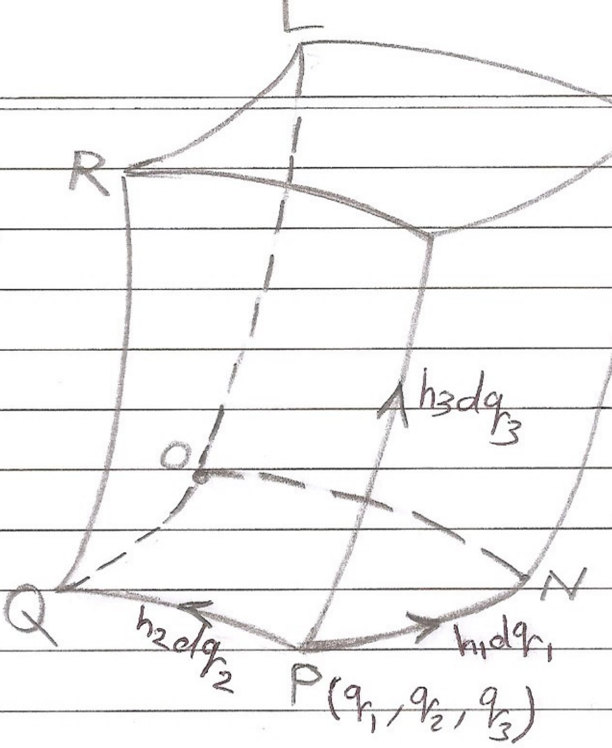
$$u_2(x,y,z) = q_2 \quad ---(98)$$

$$u_3(x,y,z) = q_3$$

المعادلات الثلاثه أعلاه تمثل مجموعات من سطوح متعامدة مع بعضها البعض فأي نقطه في الفراغ مثل P سوف نعلم تحديدها بتلاقي ثلاثه من هذه السطوح التي يعود كل منها الى مجموعة من مجاميع السطوح الثلاثه المعينه. وتعين هذه النقطه بصوره تامه اذا عرفت قيم كل من q_1 و q_2 و q_3 المناظره لهذه السطوح الثلاثه، انظر الشكل (21). أن المتغيرات الثلاثه q_1 و q_2 و q_3 تسمى الاحداثيات المعممة للنقطة P.
الآن نفرض أن dl_1 تمثل طول تفاضلي عمودي على السطح q_1 فأن الازاحه الكائنه بين السطحين q_1 و $q_1 + dq_1$ يكون مساوي لهذا الطول التفاضلي ضمن حجم متناهي في الصغر $d\tau$.
ويرتبط هذا الطول التفاضلي مع dq_1 بالعلاقة الآتيه:

$$dl_1 = h_1\, dq_1 \quad --- 99$$

ملاحظ
مول قاعدة
اليد اليمنى



الشكل (21)

وبالمثل يمكننا أن نكتب الآتي

$$dl_2 = h_2\, dq_2 \qquad \text{---} 100$$

$$dl_3 = h_3\, dq_3 \qquad \text{---} 101$$

ملاحظة: إذا اعتبرنا أن $h_1 = h_2 = h_3 = 1$ فإن نظام الإحداثيات يكون الإحداثيات المتعامدة (الديكارتية).
أما الحجم التفاضلي $d\tau$ الذي تنطبق أوجهه على السطوح q_1 و q_2 و q_3 فيكون مساوي الى:

$$d\tau = dl_1\, dl_2\, dl_3 = h_1 h_2 h_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3 \qquad \text{---} 102$$

يكون الطول التفاضلي dl قطر الشكل الذي حجمه $d\tau$ مساوي الى:

$$dl = \left[(dl_1)^2 + (dl_2)^2 + (dl_3)^2\right]$$

$$= \left[(h_1 dq_1)^2 + (h_2 dq_2)^2 + (h_3 dq_3)^2\right]^{1/2} \qquad \text{---} 103$$

لنفرض الدالة $\phi(q_1, q_2, q_3)$ وأن $\vec{A}$ تمثل مجال متجهي مركباته A_1 و A_2 و A_3 في الاتجاهات الثلاثة التي تزداد فيها الاحداثيات q_1 و q_2 و q_3 ، أوجد من المكن حساب مركبة أنحدار ϕ باتجاه الاحداثي q_1 :

$$(\vec{\nabla}\phi)_1 = \lim_{dq_1 \to 0} \frac{\phi(q_1+dq_1, q_2, q_3) - \phi(q_1, q_2, q_3)}{h_1 dq_1} \quad \text{---(104)}$$

وعليه :

$$(\vec{\nabla}\phi)_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial q_1} \quad \text{---105}$$

مركبة $\vec{\nabla}\phi$ باتجاه الاحداثي q_1

وبالمثل يمكن أن نكتب المركبات الأخرى

$$(\vec{\nabla}\phi)_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial q_2} \quad \text{---(106)}$$

مركبة $\vec{\nabla}\phi$ باتجاه الاحداثي q_2

$$(\vec{\nabla}\phi)_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial q_3} \quad \text{---(107)}$$

مركبة $\vec{\nabla}\phi$ باتجاه الاحداثي q_3

واذا فرضنا أن $\vec{e}_1$ و $\vec{e}_2$ و $\vec{e}_3$ وحدة متجه في الأتجاهات التي تزداد فيها q_1 و q_2 و q_3 على التوالي

$$\therefore \vec{\nabla}\phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial q_1}\vec{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial q_2}\vec{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial q_3}\vec{e}_3 \quad \text{---108}$$

ولحساب $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ (تفرق مجال متجه $\vec{A}$) نبدأ بحساب التكامل السطحي $\int \vec{A}\cdot d\vec{s}$ على جميع أوجه الشكل الذي حجمه $d\tau$.

نبدأ بالوجه PQRT (في الشكل (21)):
التكامل السطحي على هذا الوجه يساوي

$$-A_1 h_2 h_3 \, dq_2 dq_3$$

ملاحظة حول الإشارة

التكامل السطحي على الوجه LMNO يساوي

$$A_1 h_2 h_3 \, dq_2 \, dq_3 + \frac{\partial}{\partial q_1}(A_1 h_2 h_3) \, dq_1 dq_2 dq_3$$

وبنفس الطريقة نكتب التكامل السطحي على الوجوه الأربع الأخرى.

$$\therefore \int_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1}(A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(A_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(A_3 h_1 h_2) \right\} dq_1 dq_2 dq_3$$

---- 109

ملاحظة: حول الحدود التي حذفت ، الحدود المختلفة في الإشارة.
وبما أن تفرق مجال المتجه $\vec{A}$ $(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$ يعرف بأنه النهاية التي يصل إليها التكامل السطحي لوحدة الحجوم عندما يقترب حجم الشكل المحاط بالأوجه الستة من الصفر:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \lim_{d\tau \to 0} \frac{1}{d\tau} \int_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1}(A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(A_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(A_3 h_1 h_2) \right\}$$

---(110)

وبما أن $\vec{A}=\vec{\nabla}\phi$ فأن $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi = \nabla^2\phi$

ملاحظة : بالرجوع للمعادلة (108)

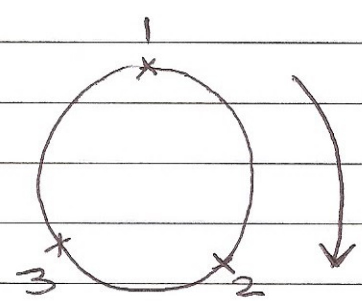
$$\vec{\nabla}\phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \phi}{\partial q_1}\vec{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial \phi}{\partial q_2}\vec{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial \phi}{\partial q_3}\vec{e}_3$$

$$\vec{A} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3$$

$$\therefore A_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \phi}{\partial q_1}, \quad A_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial \phi}{\partial q_2}, \quad A_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial \phi}{\partial q_3}$$

نعوض المركبات A_1 ، A_2 ، A_3 في العلاقة (110) نحصل على:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial \phi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial \phi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial \phi}{\partial q_3}\right)\right\} \quad \text{---} \; 111$$



ملاحظة :
حول ترتيب الحدود

الآن نجد $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ باستخدام مبرهنة ستوك ،
نجد أولاً مركبة $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ باتجاه الاحداثي q_1 ، اي نطبق
مبرهنة ستوك للسطح PQRT :

$$\underset{\substack{PQRT \\ \text{مسار مغلق}}}{\oint} \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_P^Q \vec{A}\cdot d\vec{l} + \int_Q^R \vec{A}\cdot d\vec{l} + \int_R^T \vec{A}\cdot d\vec{l} + \int_T^P \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

$$= A_2h_2dq_2 + A_3h_3dq_3 + \frac{\partial}{\partial q_2}(A_3h_3)\,dq_3\,dq_2$$

$$-\left(A_2h_2dq_2 + \frac{\partial}{\partial q_2}(A_2h_2)\,dq_2\,dq_3\right\}$$

$$-A_3h_3dq_3$$

$$\therefore \oint_{PQRT} \vec{A}\cdot d\vec{l} = \underbrace{\left\{\frac{\partial}{\partial q_2}(A_3h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(A_2h_2)\right\}}_{}\ \underbrace{dq_2\,dq_3}_{}$$

المقدار بين القوسين { } يمثل مركبة
$\vec{\nabla}\times\vec{A}$ الموازية للاتجاه 1
(اي باتجاه q_1) مضروبة على h_2h_3

مساحة الوجه
PQRT
تساوي
$h_2h_3\,dq_2\,dq_3$

العلاقة الاخيرة يمكن أن تكتب كالآتي :

$$\oint_{PQRT} \vec{A}\cdot d\vec{l} = \frac{1}{h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_2}(A_3h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(A_2h_2)\right\} h_2h_3\,dq_2\,dq_3 \qquad (112)$$

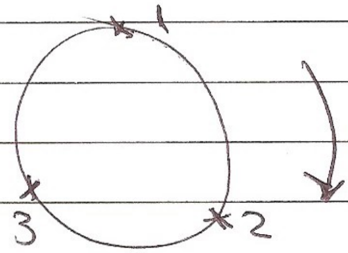
$$\therefore (\vec{\nabla}\times\vec{A})_1 = \frac{1}{h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_2}(A_3h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(A_2h_2)\right\} \quad \text{---} 113$$

وبنفس الطريقة نجد المركبات الأخرى

$$(\vec{\nabla}\times\vec{A})_2 = \frac{1}{h_3h_1}\left\{\frac{\partial}{\partial q_3}(A_1h_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(A_3h_3)\right\} \quad \text{---} 114$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{A})_3 = \frac{1}{h_1h_2}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}(A_2h_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(A_1h_1)\right\} \quad \text{---} 115$$

ملاحظة :



∴ يمكن كتابة $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ بصيغة محددة :

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} h_1\vec{e}_1 & h_2\vec{e}_2 & h_3\vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix} \quad \text{---} 116$$

مثال لو أخذنا المحاور الديكارتية (المحاور المتعامدة X و Y و Z)
فأن

$$\vec{e}_1 = \vec{i} \qquad h_1 = 1 \qquad q_1 = x \qquad A_1 = A_x$$

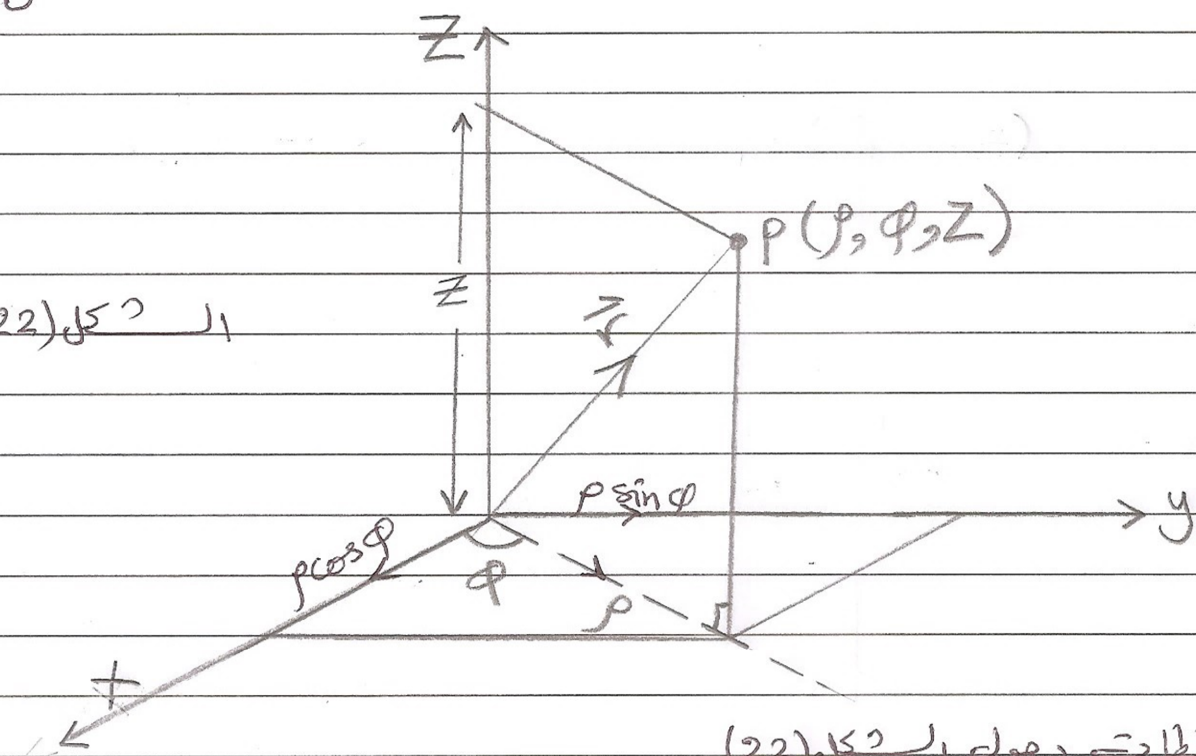
$$\vec{e}_2 = \vec{j} \qquad h_2 = 1 \qquad q_2 = y \qquad A_2 = A_y$$

$$\vec{e}_3 = \vec{k} \qquad h_3 = 1 \qquad q_3 = z \qquad A_3 = A_z$$

$$\therefore \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad \text{—— 117}$$

(1-19) الاحداثيات الأسطوانية

Cylindrical Coordinates



الشكل (22)

ملاحظات حول الشكل (22)

بالرجوع إلى الشكل (22) نحصل على

$$x = \rho \cos\varphi$$
$$y = \rho \sin\varphi \qquad \text{--- } 118$$
$$z = z$$

$$\therefore \; d\tau = \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz \qquad \text{--- } 119$$

واجب : أثبت العلاقة (119)

الآن علينا أن نكتب العلاقات التالية :

$\vec{e}_1 = \vec{e}_\rho$ $h_1 = 1$ $q_1 = \rho$

$\vec{e}_2 = \vec{e}_\varphi$ $h_2 = \rho$ $q_2 = \varphi$

$\vec{e}_3 = \vec{e}_z$ $h_3 = 1$ $q_3 = z$

$\vec{e}_\rho$ و $\vec{e}_\varphi$ و $\vec{e}_z$ هي وحدات المتجه في الاتجاه الذي تزداد فيه ρ و φ و z على التوالي .

الآن علينا أن نجد $\vec{\nabla}\phi$ و $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ و $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ و $\nabla^2\phi$ بالمحاور الأسطوانية ، وكالآتي :

لإيجاد $\vec{\nabla}\phi$ نرجع للعلاقة (108) ونعوض فيها بالاستفادة من الجدول الأخير عن h_1 و h_2 و h_3 و q_1 و q_2 و q_3 وكذلك وحدات المتجه $\vec{e}_1$ و $\vec{e}_2$ و $\vec{e}_3$:

$$\therefore \vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{e}_z \quad --(120)$$

كذلك نستفاد من العلاقة (110)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(A_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho A_z)\right\}$$

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad -- 121$$

الآن نستفاد من العلاقة (116)

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix} \quad (122)$$

$$\therefore \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{e}_\rho\left(\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial z}(\rho A_\varphi)\right) + \vec{e}_\varphi\rho\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right) \quad --(122)$$

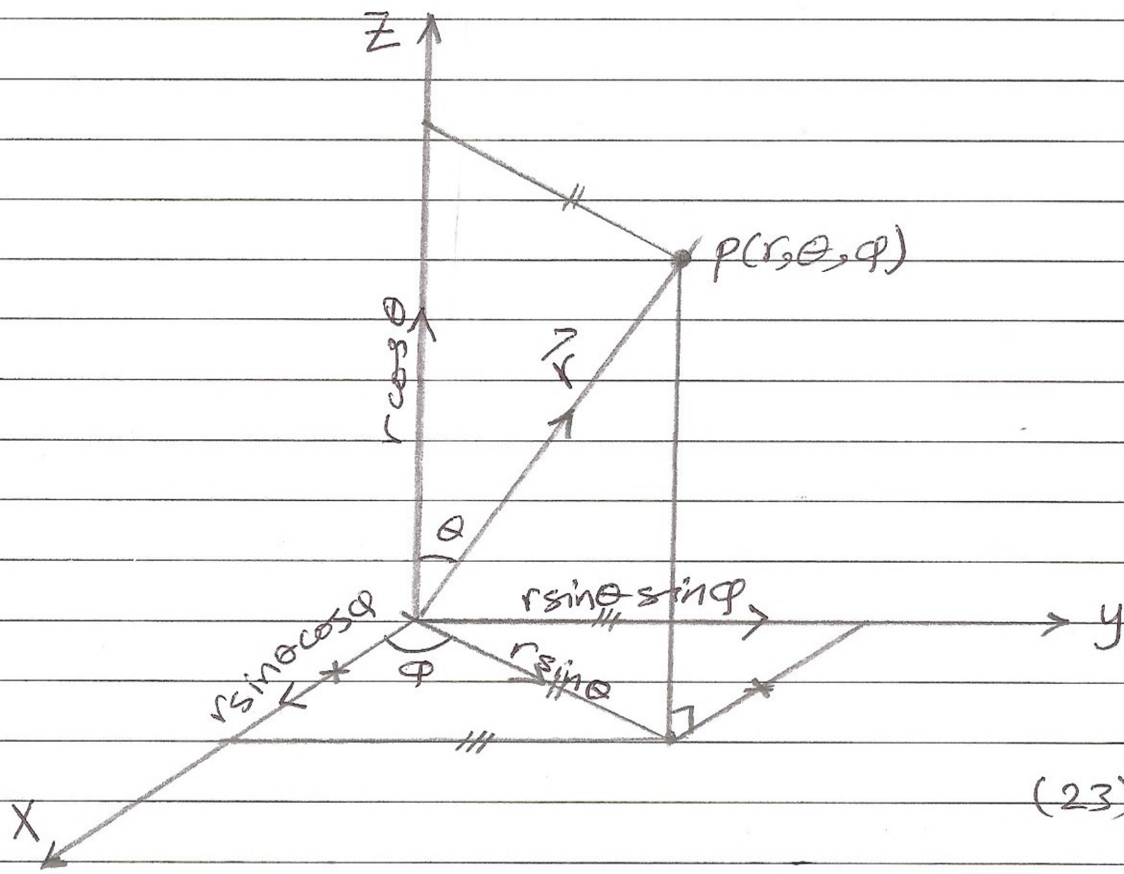
وبالاستفادة من العلاقة (111) علينا أن نكتب $\nabla^2\phi$ بالاحداثيات الاسطوانية :

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\right\}$$

$$\therefore \nabla^2\phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \quad \text{----(123)}$$

1-20 الاحداثيات الكروية Spherical Coordinates

الاحداثيات الكرويه هي (r, θ, φ)



ملاحظة :

الشكل (23)

اعتماداً على الشكل (23) :

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad \text{---} \; 124$$
$$z = r\cos\theta$$

واجب :
اثبت أن

$$d\tau = r^2\sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \qquad \text{---} \; 125$$

$$d\tau = \underbrace{dr}_{h_1 dq_1} \; \underbrace{r\,d\theta}_{h_2 dq_2} \; \underbrace{r\sin\theta\, d\varphi}_{h_3 dq_3}$$

وعليه يمكن كتابة الجدول التالي:

$\vec{e}_1 = \vec{e}_r$	$h_1 = 1$	$q_1 = r$	$A_1 = A_r$
$\vec{e}_2 = \vec{e}_\theta$	$h_2 = r$	$q_2 = \theta$	$A_2 = A_\theta$
$\vec{e}_3 = \vec{e}_\varphi$	$h_3 = r\sin\theta$	$q_3 = \varphi$	$A_3 = A_\varphi$

وبالاستفادة من العلاقة (108) نجد

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi \qquad (126)$$

وبالاستفادة من العلاقة (110)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \qquad (127)$$

كذلك بالاستفادة من (116) :

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r A_\varphi)\right]\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\vec{e}_\varphi$$

كذلك بالاستفادة من (111) :

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$