(1-15) مبرهنة كرين Green's theorem

أن مبرهنة كاوس مبرهنة مفيدة ومهمة في الفيزياء والرياضيات ويمكن الاستفادة منها للحصول على تحويلات مهمة.

نفرض أن $\vec{A} = u\vec{\nabla}v$ حيث أن u و v دوال عددية
الآن نأخذ الضرب العددي لطرفي العلاقة

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot(u\vec{\nabla}v) \quad ---- \quad (76)$$

$$\because \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial}{\partial x}v\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial}{\partial y}v\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial}{\partial z}v\right)$$

أو تكتب كالآتي (ملاحظة):

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) +$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) \quad ---- 77$$

الحد الأول من المعادلة الأخيرة يمكن أن تكتب كالآتي

$$u\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)v = u\nabla^2 v$$

اما الحد الثاني من العلاقة الأخيرة فهو يمثل حاصل الضرب العددي للمتجهين $\vec{\nabla}u$ و $\vec{\nabla}v$ ،
إذن الحد الثاني يكون مساوي الى

$$\vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}v$$

وبذلك نحصل على

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = u\nabla^2 v + \vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}v \quad \text{-----}(78)$$

وبالرجوع الى مبرهنة كاوس وبالتعويض عن $\vec{A}$ بما يساويها

$$\int_s \vec{A}\cdot d\vec{s} = \int_\tau \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\, d\tau \Leftarrow \text{مبرهنة كاوس}$$

وبالاستفادة من العلاقة (78) نحصل :

$$\therefore \int_s (u\vec{\nabla}v)\cdot d\vec{s} = \int_\tau (u\nabla^2 v + \vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}v)\, d\tau \quad \text{---}79$$

المعادلة (79) تسمى مبرهنة كرين الأولى .

الآن علينا أن نكتب $\vec{A}$ بالصيغة التالية $\vec{A} = v\vec{\nabla}u$

وأجراء الخطوات ذاتها نحصل على

$$\int_s (v\vec{\nabla}u)\cdot d\vec{s} = \int_\tau (v\nabla^2 u + \vec{\nabla}v\cdot\vec{\nabla}u)\, d\tau \quad \text{---}80$$

وبطرح العلاقة (80) من العلاقة (79) نحصل على :

$$\int_s (u\vec{\nabla}v - v\vec{\nabla}u)\cdot d\vec{s} = \int_\tau (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\, d\tau \quad \text{----}81$$

العلاقة (81) تمثل مبرهنة كرين الثانية .

* ملاحظة : توضيح $\vec{\nabla}v\cdot\vec{\nabla}u = \vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}v$

سؤال : أثبت أن مبرهنة كرين الأولى تعطى بما يلي :

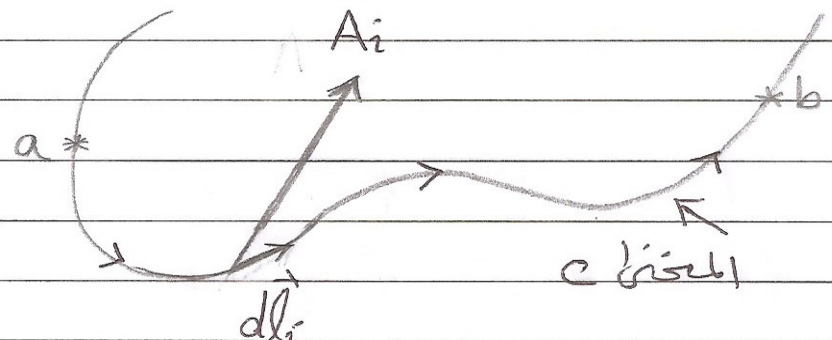
$$\int_s (u\vec{\nabla}v)\cdot d\vec{s} = \int_\tau (u\nabla^2 v + \vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}v)\, d\tau$$

(16-1) التكامل الخطي للمجال Line integral of vector field

إذا كانت $\vec{A}$ تمثل مجال متجهي فأن التكامل الخطي لهذا المتجه يعرف وفقاً للعلاقة التالية:

$$\int_a^b \vec{A} \cdot \vec{dl}$$

حيث أن a هي نقطة البداية و b نقطة النهاية على المنحني c الذي يجري عليه التكامل، $\vec{dl}$ يمثل متجه إزاحة تفاضلي كما أن ناتج التكامل اعلاه كمية عددية لأن $\vec{A} \cdot \vec{dl}$ كمية عددية. وللحصول على قيمة التكامل الخطي نقسم الجزء المحصور بين a و b الى عدد كبير من المتجهات التفاضلية $\vec{dl_i}$ التي تعين لكل واحدة منها $\vec{A_i}$ (انظر الشكل (17)).



الشكل (17)

ثم تتم عملية حاصل الضرب العددي $\vec{A_i} \cdot \vec{dl_i}$ وجمع النتائج اذا فرضنا أن i تتغير من 1 الى n.

$$\therefore \int_a^b \vec{A} \cdot \vec{dl} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{A_i} \cdot \vec{dl_i} \quad ---(82)$$

علماً بأن التكامل الخطي لا يعتمد فقط على نقطة البداية والنهاية وإنما يعتمد كذلك على المنحني c الذي يؤخذ عليه التكامل

أما التكامل على منحنى مغلق فإنه يكتب كالآتي

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

حيث أن

$$\oint_c \vec{A} \cdot d\bar{l} = \oint_c (A_x dx + A_y dy + A_z dz)$$

الآن لو فرضنا أن المتجه $\vec{A}$ يمثل قوة تؤثر على جسم متحرك يكون التكامل الخطي للمتجه على مسار الجسم مساوياً للشغل المنجز من قبل تلك القوة. ولنفرض ان $\vec{A} = \vec{\nabla} \phi$ حيث أن ϕ داله عدديه. إذن التكامل الخطي لهذا المتجه بين النقطتين a و b الواقعتين على منحنى معين ضمن مجال هذا المتجه.

$$\therefore \int_a^b \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_a^b (\vec{\nabla} \phi) \cdot d\vec{l} = \int_a^b \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{d\phi}{dz} dz \right) \quad \text{---}83$$

وبما أن

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{dy} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \quad \text{---} 84$$

∴ المعادله 83 تصبح

$$\int_a^b \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_a^b d\phi = \phi_b - \phi_a \quad \text{---} 85$$

حيث أن ϕ_a تمثل قيمة ϕ عند النقطة a.

ϕ_b تمثل قيمة ϕ عند النقطة b.

مما سبق نستنتج أن التكامل الخطي لأنحدار اي داله عدديه أحادية القيمة ولها تفاضل تام مثل ϕ يساوي صفر إذا أجري التكامل حول منحنى مغلق وذلك لأن النقطتان a و b سوف تنطبقان على بعضهما فيكون ناتج التكامل في معادلة (85).

مساوي

الى $(\phi_a - \phi_a)$ وهو مساوي للصفر.

مما سبق نستنتج أن التكامل الخطي للمتجه $\vec{A}$ حول اي منحنى مغلق يساوي صفر إذا كانت المتجه انحدار داله عدديه مثل ϕ.

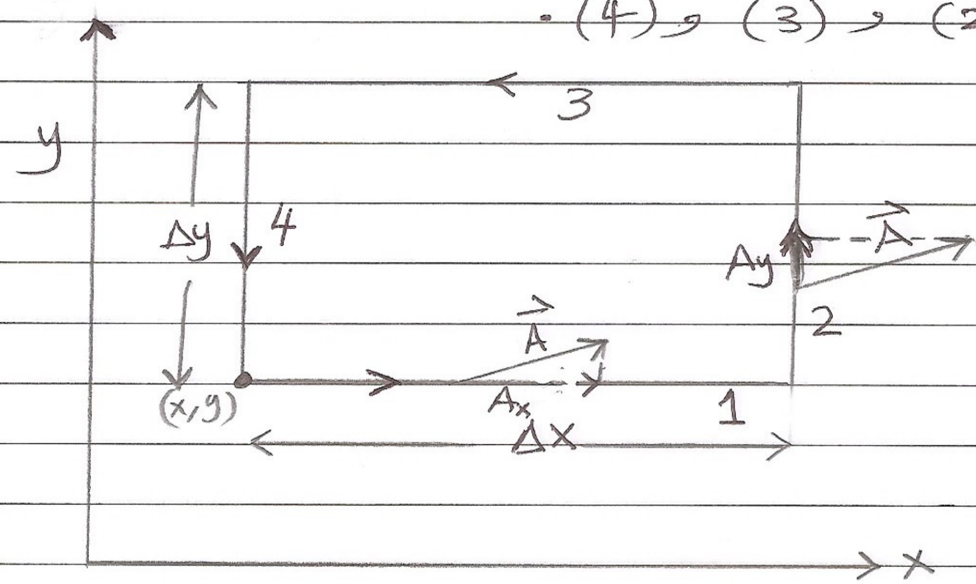
$$\boxed{\oint \vec{A}\cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{if} \quad \vec{A} = \vec{\nabla}\phi} \qquad (86)$$

منحنى مغلق

(1-17) دوار المجال ومبرهنة ستوكس

The Curl and Stokes theorem

يوضح الشكل (18) مسار مغلق متناهي في الصغر أتجاهه معاكس لحركة عقارب الساعة. هذا المسار عبارة عن مستطيل مساحته $\Delta x \Delta y$ وأضلاعه توازي المحورين x و y. نفرض مجال فيه $\vec{A}$ يقطع هذا المسار المغلق وأن مركباته A_x و A_y لا تتغير لصغر هذه الابعاد. تمت الأشارة الى الاضلاع الأربعة بالأرقام (1) و (2) و (3) و (4).



الشكل (18)

الآن نحسب التكامل الخطي حول المستطيل، نبدأ من الرأس (x, y) باتجاه المسار المغلق:

التكامل الخطي على الضلع (1) $\Leftarrow$ $A_{1x} \; \Delta x$
= = = = (2) $\Leftarrow$ $A_{2y} \; \Delta y$
= = = = (3) $\Leftarrow$ $-A_{3x} \; \Delta x$
= = = = (4) $\Leftarrow$ $-A_{4y} \; \Delta y$

الإشارة السالبة؟ ⟵

الإشارة السالبة تعني أن التكامل الخطي أنجز باتجاه معاكس لاتجاه المجال.

∴ التكامل الخطي حول هذا المسار المستطيل يعطى بما يلي:

$$\oint_{\text{مستطيل}} \vec{A} \cdot d\vec{l} = (A_{1x} - A_{3x})\,\Delta x + (A_{2y} - A_{4y})\,\Delta y \quad \text{---}(87)$$

وباستخدام تمديد تيلر يمكن ان نكتب الآتي:

$$A_{3x} = A_{1x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\Delta y$$

$$A_{2y} = A_{4y} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\Delta x \quad \text{---}(88)$$

ملاحظة: تم اهمال الحدود التي تتضمن $(\Delta x)^2$ و $(\Delta y)^2$ مما فوق وذلك لأن قيمها مساويه للصفر وذلك لصغر قيمها

نعوض (88) في العلاقة (87) نحصل على:

$$\oint_{\text{مستطيل}} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \underbrace{\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)}_{\text{هذه الكمية تمثل مركبة } \vec{\nabla}\times\vec{A} \text{ باتجاه المحور } z} \underbrace{\Delta x \, \Delta y}_{\text{مساحة المستطيل المتناهي في الصغر}} \quad \text{---}(89)$$

وعليه يمكن أن نكتب :

$$\int_{\text{مستطيل}} \vec{A}\cdot d\vec{l} = (\vec{\nabla}\times\vec{A})_z \Delta x \Delta y = \underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{A})_z}_{\text{هذه المركبة عمودية}} \Delta S_{xy} \quad ---(90)$$

على المستطيل في الشكل (18)

لذلك يمكن أن نكتب :

$$\int_{\text{مستطيل}} \vec{A}\cdot d\vec{l} = (\vec{\nabla}\times\vec{A})_n \Delta S_{xy}$$

$$= (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\Delta\vec{S}_{xy} \quad ---- (91)$$

المعادله (91) تؤكد أن التكامل الخطي لاي متجه مثل $\vec{A}$ حول مستطيل متناهي في الصغر يساوي حاصل ضرب مركبة $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ العمودية على السطح في مساحة المستطيل.

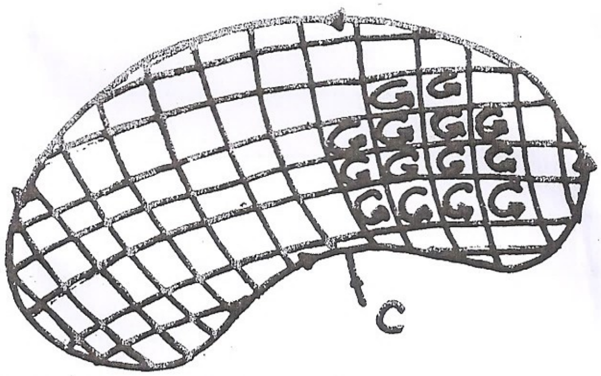
الآن نأخذ التكامل الخطي حول المسار المغلق C الموضح في الشكل (19)، حيث جزيء السطح المحاط بالمسار المغلق الى مستطيلات متناهية في الصغر مساحة كل منها كما.

إذن التكامل الخطي حول المسار المغلق C يساوي مجموع التكاملات الخطية حول المسارات الصغيرة المغلقة التي يعتبر كل منها مستطيل متناهي في الصغر، وعليه :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \oint_i \vec{A}\cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l} \quad ---(92)$$

ملاحظة : أن التكاملات الخطية هذه المأخوذة حول المسارات المغلقة المتجاورة تختزل بعضها البعض لأنها في اتجاهات متعاكسة عدا التي تشترك معها المسار الرئيسي المغلق C حيث أنها لا تختزل.

الرمز i في العلاقة 92 يشير الى رقم المستطيل في الشكل (19)



الشكل (١٩)

وبالرجوع الى العلاقة (٩١) وأخذ المجموع $\sum_{i=1}^{\infty}$ لطرفي العلاقة نحصل على

$$\sum_{i=1}^{\infty}\oint_{i} \vec{A}\cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^{\infty}(\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\Delta\vec{S}_{xy} \quad ---(93)$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\therefore \oint_{C} \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_{S}(\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{S} \quad ---(94)$$

S هو اي سطح محاط بالمسار المغلق C .

العلاقة (٩٤) تسمى مبرهنة ستوك .

نص المبرهنة :

أن التكامل الخطي للمتجه $\vec{A}$ حول اي مسار مغلق C يساوي التكامل السطحي لمركبة $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ العمودية على السطح S المحاط بالمسار المغلق C

وهي مبرهنة مهمة لها استخدامات مهمة وخاصة في موضوع النظرية الكهرومغناطيسية .

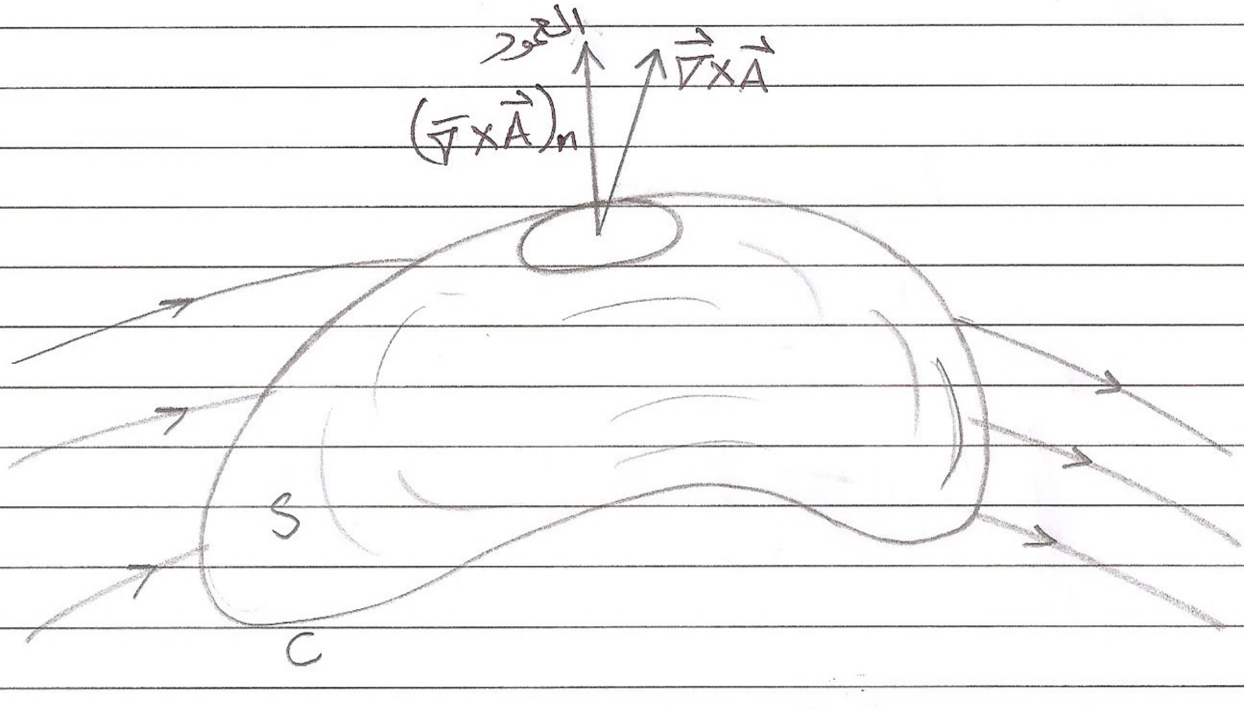
وعندما يكون السطح S المحاط بالمسار المغلق C صغيراً بما فيه الكفاية بحيث تكون مركبة دوار المتجه $(\vec{\nabla}\times\vec{A})_n$ العمودية على السطح ثابتة ضمن ذلك السطح المتناهي في الصغر في هذه الحالة يمكن أن نكتب الآتي

$$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l} = (\vec{\nabla}\times\vec{A})_n S \quad \text{---(95)}$$

أذن المركبة العمودية تأخذ الصيغة الآتية

$$(\vec{\nabla}\times\vec{A})_n = \lim_{S\to 0} \frac{1}{S} \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l} \quad \text{---(96)}$$

الشكل (20) يوضح أتجاه كل من دوار المتجه $\vec{A}$ (يعني $\vec{\nabla}\times\vec{A}$) ومركبته العمودية على السطح S المحاط بالمنحني C.



الشكل (20):