fortran 90

الفصل الخامس

التكامل العددي

Numerical Integration

♣♣♣§§§§♣♣♣

التفاضل العددي

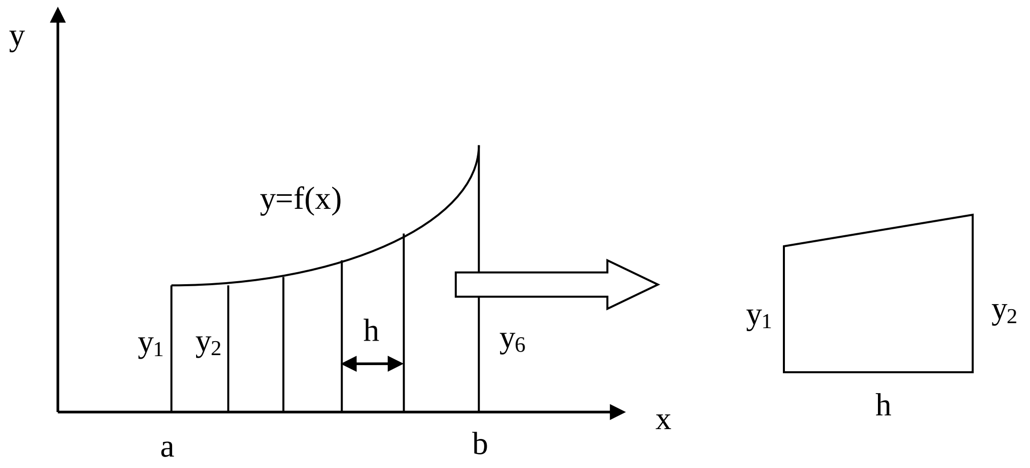
Numerical Differentiation

إعداد: م. سناء مهدي

التكامل العددي *Numerical Integration*

التكامل العددي لأي دالة f(x) بين قيمتين x=a و x=b يساوي المساحة تحت منحني الدالة f(x) محصورة x-axis والخطين العمودين x=a و x=b. وتوجد طريقتين لإيجاد التكامل العددي هما :

قانون شبه المنحرف *Trapezoidal Rule*



مساحة شبه المنحرف

$$A = \frac{y_1 + y_2}{2} h$$

عدد التقسيمات (الشرائح)

$$n = \frac{b-a}{h}$$

يكون n عدد صحيح فردي أو زوجي n= integer even or odd

تحسب المساحة الكلية التقريبية Aap

$$A_{ap} = \frac{1}{2}[y_1 + y_2]h + \frac{1}{2}[y_2 + y_3]h + \frac{1}{2}[y_3 + y_4]h + \frac{1}{2}[y_4 + y_5]h + \frac{1}{2}[y_5 + y_6]h$$

إعداد: م. سناء مهدي

$$A_{ap} = \left[\frac{1}{2}y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + \frac{1}{2}y_6\right]h$$

y=f(x)

$$A_{ap} = \frac{h}{2}\left[F(a) + F(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)\right]$$

$x_i = a + ih$

مثال : اكتب برنامجا يحسب تكامل الدالة $f(x)= x^3$ من a=0 إلى b=4 مستخدما قانون شبه المنحرف.

$$A = \int_a^b f(x)dx = \int_0^4 x^3 dx = \frac{x^4}{4} = 64$$

```
Program Trap
Implicit none
Integer :: n, I
Real :: a, b, h, s, s1
Read*,n
a=0 ; b=4
h=(b-a)/n
s1=0.0
DO I=1, n-1
s1=s1+F(a+I*h)
End Do
s=(h/2)*(F(a)+F(b)+2*s1)
Print*,s
Contains
```

```
Function F(z)
Implicit none
Real f, z
F=z**3
End Function F
End
```

مثال : اكتب برنامجا يحسب تكامل الدالة $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$ مستخدما قانون شبه المنحرف.

نفس البرنامج السابق فقط الدالة تتغير F=sin(z) وقيم a= 0 و b=π ولا تضرب بـ (π/180) لتحويلها إلى (rad) لان a,b أعطيت بـ (rad)

تمرين : اكتب برنامجا يحسب تكامل الدالة $f(x)= x^3$ من a=0 إلى b=4 بطريقة شبه المنحرف مستخدما subroutine.

```
Program Trap
Implicit none
Integer :: n, I
Real :: a1, b1, h, s
Read*,n
a1=0 ; b1=4
h=(b-a)/n
print*,h
Call Sub(a1,b1,s)
print*,s
Contains
```

```
Subroutine sub(a,b,s)
Real  a,b,ss,s1,Fa,Fb
s1=0.0
DO I=1, n-1
x=a+I*h
s1=s1+x**3
End Do
Fa=a**3 ; Fb=b**3
s=(h/2)*(Fa+Fb+2*s1)
End Subroutine
End
```

قانون سمبسون ***Simpson's Rule***

يعتبر هذا التكامل أكثر دقة من تكامل شبه المنحرف وفيه بدلا من ربط النقاط $f(x)$ بخط مستقيم يتم ربط كل ثلاث نقاط باستخدام قطع مكافئ parabola لضمان ان يكون هنالك عدد زوجي من الشرائح .

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) \right]$$

even: $x_{2i}=a+2*i*h$

odd: $x_{2i-1}=a+(2*i-1)*h$

$$n = \frac{(b-a)}{2h}$$

n : تمثل عدد التقسيمات ويجب أن تكون عدد زوجي.

إعداد: م. سناء مهدي

أو يمكن استخدام القانون التالي لسمبسون ويعطي نفس قيمة التكامل بالضبط

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{(n/2)-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) \right]$$

even

x_{2i}=a+2*i*h

odd

x_{2i-1}=a+(2*i-1)*h

$$n = \frac{(b-a)}{h}$$

مثال: اكتب برنامجا لحساب التكامل التالي $\int_0^4 x^3 dx$ مستخدما قانون سمبسون .

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^4 x^3 dx$$

```
Program simp
Implicit none
Integer :: n ,I
Real :: a,b,h,s,s1,s2
Read*,n
a=0 ; b=4
h=(a-b)/(n)
s1=0.0 ; s2=0.0
DO I=1, (n/2)-1
s1=s1+F(a+2*I*h)            الشرائح الزوجية
End Do
DO I=1,n/2
s2=s2+F(a+(2*I-1)*h)        الشرائح الفردية
End Do
```

```
s=(h/3.0)*(F(a)+F(b)+2*s1+4*s2)
Print*,s
Contains
Function F(z)
Implicit none
Real :: F,z
 F=z**3
End Function F
End
```

تمرين : اعد كتابة البرنامج مستخدما الروتين الفرعي subroutine.

```
Program simp
Implicit none
Integer :: n ,I
Real :: a1,b1,h,s
Read*,n
a1=0 ; b1=4;  h=(b1-a1)/n
Call Sim(a1,b1,s)
Print*,s
Contains
Subroutine Sim(a,b,s)
Real a,b,s,s1,s2,Fa,Fb
s1=0.0 ; s2=0.0
DO I=1, (n/2-1)
x=a+2*I*h
s1=s1+x**3                    الشرائح الزوجية
End Do
```

```
DO I=1,n/2
x=a+(2*I-1)*h
s2=s2+x**3
End Do
Fa=a**3 ; Fb=b**3
s=(h/3.0)*(F(a)+F(b)+2*s1+4*s2)
End Subroutine
End
```

الشرائح الفردية

مثال : اكتب برنامجا يحسب تكامل الدالة $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$ مستخدما قانون سمبسون.

```
program simp
implicit none
INTEGER ::N,I
REAL ::a1,b1,h,s
a1=0;b1=3.1415;n=4
h=(b1-a1)/(n)
print*,h
call sim(a1,b1,s)
print*,s
contains
Subroutine sim(a,b,s)
real a,b,s,s1,Fa,Fb,s2 ,x
s1=0.0 ;s2=0.0
do I=1,(N/2-1)
x=a+2*i*h
```

```
 s1=s1+sin(x)
 print*,'Even    ',x
end do
do I=1,N/2
x=a+(2*i-1)*h
s2=s2+sin(x)
print*,'ODD    ',x
  end do
  Fa=sin(a) ;Fb=sin(b)
  s=(h/3.0)*(Fa+Fb+2*s1+4*s2)
  end subroutine
  end
```

التفاضل العددي Numerical Differentiation

توجد طريقتين لحساب التفاضل العددي هما :

- من تعريف المشتقة

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \overline{f}(x)$$

مثال : جد المشتقة للدالة $f(x)=x^2$ عند $x=2$

```
Program Diff
Double precision  NQ, x, H
Integer I, N
x=2 ; H=1
Read*, N
DO I=1,N
NQ=(F(x+H)-F(x))/H
H=H/10
End Do
Print*, H, NQ
Contains
Function F(x)
Real F,x
F=x**2
End Function
End
```

استخدام الفروقات المركزية

تعتبر طريقة الفروقات المركزية من أشهر الطرق العددية المستعملة في تمثيل المشتقات التفاضلية الأولى والثانية والثالثة ...الخ. ويعبر عن المشتقة الأولى بالفرق المركزي كما يلي :

$$\overline{F}(x) = \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h}$$

أما المشتقة الثانية فتمثل بالفرق المركزي التالي :

$$\overline{\overline{F}}(x) = \frac{F(x+h) - 2F(x) + F(x-h)}{h^2}$$

مثال : اكتب برنامجا لحساب المشتقة التفاضلية الأولى والمشتقة التفاضلية الثانية للدالة $f(x)=xe^x$ ثم جد قيمة كل منهما عند النقطة x=1.

```
Program Diff
Implicit none
Real x,h,Df1, Df2
x=1 ; h=0.01
Df1=(F(x+h)-F(x-h))/(2*h)
Df2=(F(x+h)-2*F(x)+F(x-h))/h**2
Print*,x,Df1,Df2
Contains
Function F(z)
Real F,z
F=z*Exp(z)
End Function
End
```